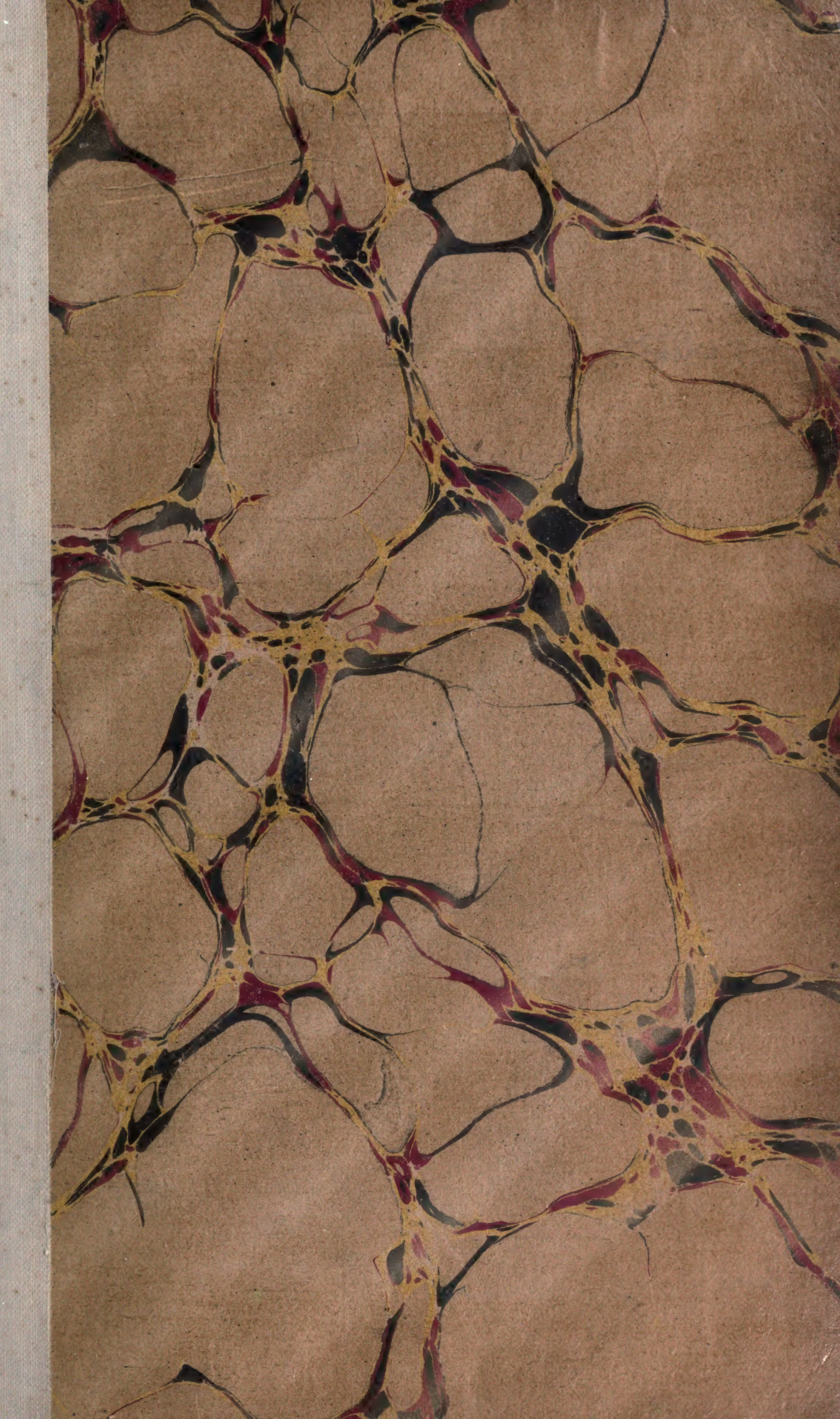

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01227090 6





COURS D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS
D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE.

TOME DEUXIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

81909

6/5/07

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

(Tous droits réservés.)

QA
300
J57
1893
t.2

PRÉFACE.

Le présent Volume a subi, comme le précédent, une refonte presque complète dans cette seconde édition.

Nous avions émis au sujet des conditions où la dérivation sous le signe $\int$ est légitime une assertion inexacte. En cherchant à rectifier cette erreur, que M. de la Vallée-Poussin nous avait signalée, nous nous sommes trouvé conduit à discuter avec détail les propositions essentielles relatives aux intégrales définies.

La théorie des fonctions elliptiques a été entièrement remaniée et considérablement étendue. La supériorité incontestable des méthodes de M. Weierstrass nous a décidé à prendre pour guide dans cette nouvelle exposition les *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwartz et le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen. A côté de ces Ouvrages fondamentaux, nous devons citer comme nous ayant été particulièrement utiles les *Elliptische Functionen* de M. Weber

et les Mémoires sur la transformation, publiés par M. Kiepert dans les *Mathematische Annalen*.

Dans un dernier Chapitre, nous donnons un exposé sommaire de la théorie des intégrales abéliennes, emprunté principalement au Mémoire classique de Riemann, aux *Traités d'Analyse* de M. Picard et de M. Laurent et à la *Théorie des fonctions* de M. Forsyth.

C. JORDAN.

TABLE DES MATIÈRES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — *Intégrales des fonctions rationnelles.*

II. — *Intégration des différentielles algébriques.*

III. — *Intégration des fonctions transcendantes.*

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — *Intégrales définies généralisées.*

II. — *Intégrales multiples.*

III. — *Calcul des intégrales définies.*

IV. — *Applications géométriques.*

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — *Dérivation des intégrales definies.*

CHAPITRE IV.

SÉRIES DE FOURIER.

II. — *Séries trigonométriques.*

III. — *Fonctions de Laplace.*

CHAPITRE V.

INTÉGRALES COMPLEXES.

I. — *Intégrales des fonctions monodromes.*

II. — *Intégrale de Cauchy.*

CHAPITRE VI.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

VII. — *Dérivées par rapport aux paramètres.*

VIII. — *Division.*

IX. — *Transformation.*

X. — *Integration des différentielles abéliennes de genre* 1.

CHAPITRE VII.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — *Surfaces de Riemann.*

II. — *Intégrales abéliennes. — Périodicité.*

III. — *Réduction des intégrales abéliennes.*

IV. — *Inversion.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pages	Lignes	*au lieu de*	*lisez*
5	3	$\frac{q_1\pi}{2}$	$q_1\pi$
57	19	$\int_a^{x-}$	$\int_a^{x-\varepsilon}$
61	14	$\int_{+\infty}^{b}$	$\int_{+\infty}^{\frac{1}{b}}$
63	17	$\int_a^{A} f\,dy$	$\int_a^{A} f\,dx$
82	16	$S_{D'}^{1}$	$S_{\Delta'}^{1}$
93	4	e_{2R}	ε_{2R}
95	2	$\frac{1}{R^{\mu-3}}$	$\frac{1}{R^{m-3}}$
131	7	les deux ordonnées	la courbe
134	13	$S\frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dy$	$S\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$
148	20	$\frac{\sin\theta\,d\,d\varphi}{3}$	$\frac{\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{3}$
164	26	$0 > \theta > 1$	$0 < \theta < 1$
176	19	$1, 2, \ldots, k$	$1.2\ldots k$
177	9	$\int^{\infty}$	$\int_0^{\infty}$
»	23	croît	B croît
208	19	$z = \zeta$	$z = z$
218	17, 18, 26	$2\sin\frac{1}{2}\delta$	$2R\sin\frac{1}{2}\delta$
228	2	$\int^{\infty}$	$\int_A^{\infty}$
255	13	$]$	$]_{-1}^{+1}$
262	9	$\rho_0^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}$	$\rho_1^{1-\alpha} - \rho_0^{1-\alpha}$
280	7	A_{+1}	A_{-1}
291	25	réel	positif
297	26	$-m\varphi(\alpha)$	$-m\varphi(a)$
302	10	$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$	$A_{\alpha\beta\gamma}$

Pages	Lignes	*au lieu de*	*lisez*
340	20	$\dfrac{\pm S}{\vert 2\Omega_1\vert^2}$	$\dfrac{\pm S}{\vert 2\omega'_1\vert^2}$
349	4	$(1+d_1 u^4$	$u(1+d_1 u^4$
360	21	$\int_{e_2}^{e_5}\dfrac{dz}{\sqrt{Z}}$	$\int_{e_2}^{e_3}\dfrac{dz}{\sqrt{Z}}$
361	6	fermé	formé
388	17	$e^{-n(n-1)}\eta_3 u$	$e^{-n(n-1)\eta_3 u}$
389	17	$\wp' u - \wp' \dfrac{w}{n}$	$\wp' u + \wp' \dfrac{w}{n}$
402	17	$\sigma'^2_\beta u$	$\sigma'^2_{0\beta} u$
410	20	$(-1)^n \quad ^{n^2}$	$(-1)^n q^{n^2}$
412	22	θ_2	$\theta_2 v$
413	12	$q^{(n+\frac{1}{2})^2}$	$q^{(n+\frac{1}{2})^2}$
»	13	$q^{\frac{1}{4}} z$	$q^{-\frac{1}{4}} z$
431	19	e_β	$e'_{\beta'}$
469	11	$e_2 + e_2$	$e_2 + e_3$
469	24	$\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\omega_\alpha$	$\dfrac{2}{\sqrt{\mu}}\omega_\alpha$
509	2	ω''_2	ω'_2
510	16	$\gamma'\omega'_1 + \delta'\omega'_2$	$\gamma'\omega_1 + \delta'\omega_2$
512	2	$\log \sigma u =$	$\log \bar{\sigma} u =$
»	5	$\bar{\sigma}_1 u \bar{\sigma},\ {}_2 u$	$\bar{\sigma}_1 u,\ \bar{\sigma}_2 u$
517	4	$e^{2n\eta_1(u+\omega_1)}$	$e^{2n\bar{\eta}_1(u+\omega_1)}$
521	9	$t_{n-\mu}$	$t_{n+\mu}$
527	4	e	q
529	10	$n\pi$	$n\tau$
535	15	formant	forment

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — Intégration des fonctions rationnelles.

1. Soit $f(x)$ une fonction de la variable indépendante x, laquelle reste continue dans un certain intervalle AB si x est une variable réelle (ou synectique dans un certain domaine E si x est une variable complexe).

Nous avons vu (t. I, nos 82 et 200) qu'il existe dans cet intervalle (ou dans ce domaine) une infinité de fonctions admettant pour dérivée $f(x)$ ou, ce qui revient au même, pour différentielle $f(x)\,dx$. Ces fonctions diffèrent les unes des autres d'une quantité constante, qui peut être choisie arbitrairement. Nous les avons appelées les *intégrales indéfinies* de $f(x)\,dx$ et nous sommes convenu de les représenter par la notation $\int f(x)\,dx$.

L'objet du présent Chapitre est l'étude du problème suivant :

Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver ses intégrales.

2. Nous avons déterminé dans le Calcul différentiel les dérivées d'un certain nombre de fonctions simples. Nous sommes par là en mesure d'écrire immédiatement les intégrales de celles-ci ; on aura, par exemple,

$$\int (x-a)^m\,dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + \text{const.} \qquad \text{si} \qquad m \gtrless -1,$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\,x + \text{const.},$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + \text{const.},$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.},$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.},$$

. . . .

3. Pour intégrer les différentielles plus compliquées, on peut employer trois artifices principaux :

1° *Décomposition en éléments simples.* — On met la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots,$$

où $c_1, c_2, \ldots$ soient des constantes, et $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions que l'on sache intégrer. On aura alors

$$\int f(x)\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots.$$

2° *Intégration par parties.* — Elle est fondée sur la formule

$$\int \varphi(x)\psi'(x)\,dx = \varphi(x)\psi(x) - \int \varphi'(x)\psi(x)\,dx,$$

qui ramène le calcul de l'intégrale de $\varphi(x)\psi'(x)$ à celui de l'intégrale de $\varphi'(x)\psi(x)$, laquelle est parfois plus aisée à obtenir.

3° *Changement de variable.* — Si l'on pose

$$x = \varphi(t), \tag{1}$$

il viendra

$$f(x) = f[\varphi(t)], \qquad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

et la différentielle $f(x)\,dx$ se changera en $f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$. Si l'on peut trouver l'intégrale $F(t)$ de cette dernière, il suffira d'y substituer pour t sa valeur tirée de l'équation (1) pour obtenir l'intégrale de $f(x)\,dx$.

4. *Intégration des fonctions rationnelles.* — Soit à intégrer l'expression

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des polynômes entiers de degré m et n respectivement.

Soient a, b, ... les racines de l'équation $F(x) = 0$; α, β, ... leurs ordres de multiplicité respectifs; on pourra (t. I, n° 213) mettre la fraction donnée sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & M x^{m-n} + M_1 x^{m-n-1} + \ldots + M_{m-n} \\ & + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

la partie entière $Mx^{m-n} + \ldots$ se réduisant d'ailleurs à zéro si $m < n$.

Chacun des termes de l'expression ainsi décomposée est immédiatement intégrable; et l'on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{f(x)}{F(x)}dx = {} & \frac{M x^{m-n+1}}{m-n+1} + \frac{M_1 x^{m-n}}{m-n} + \ldots + M_{m-n}x + \text{const.} \\ & + A_1 \log(x-a) - \frac{A_2}{x-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} \\ & + B_1 \log(x-b) - \frac{B_2}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(1-\beta)(x-a)^{\beta-1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

5. Si les racines a, b, ... ne sont pas toutes réelles, l'expression précédente de l'intégrale sera compliquée d'imaginaires; mais il est aisé de les faire disparaître si les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$ sont réels.

En effet, soit par exemple $a = \mu + \nu i$ une des racines imaginaires. L'équation $F(x) = 0$ admettra la racine conjuguée $\mu - \nu i$ avec le même ordre de multiplicité. Soit b cette racine; on aura $\beta = \alpha$. Les coefficients A_1, A_2, ... seront des quantités complexes telles que $p_1 + q_1 i$, $p_2 + q_2 i$, ...; et les coefficients B_1, B_2, ... seront les quantités conjuguées $p_1 - q_1 i$, $p_2 - q_2 i$, ... Cela posé, on aura

$$A_1 \log(x-a) = (p_1 + q_1 i)\log(x - \mu - \nu i)$$

et, comme $x - \mu - \nu i$ a pour module $\sqrt{(x-\mu)^2 + \nu^2}$ et pour argument

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{-\nu}{x-\mu} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\mu}{\nu} - \frac{\pi}{2},$$

il viendra

$$\begin{aligned} & A_1 \log(x-a) \\ & \quad = (p_1 + q_1 i)\left[\operatorname{Log}\sqrt{(x-\mu)^2+\nu^2} + i \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\mu}{\nu} - i\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Effectuons les multiplications et ajoutons la quantité conjuguée $B_1 \log(x-b)$; les termes en i disparaîtront et les

termes réels seront doublés: il viendra donc

$$A_1 \log(x-a) + B_1 \log(x-b)$$
$$= p_1 \operatorname{Log}[(x-\mu)^2+\nu^2] - 2q_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\mu}{\nu} + \frac{q_1\pi}{2}.$$

La partie transcendante de l'intégrale peut donc se mettre sous forme réelle par l'addition des termes conjugués. On arrivera évidemment au même résultat pour la partie rationnelle en ajoutant chaque fraction à sa conjuguée.

6. Ajoutons ensemble les fractions simples rationnelles qui figurent dans l'expression (2); nous obtiendrons, en désignant par r le nombre des racines distinctes $a, b, \ldots$, un résultat de la forme $\frac{M}{P}$, où le dénominateur

$$P = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots$$

est de degré $\alpha-1+\beta-1+\ldots = n-r$, et le numérateur M de degré $n-r-1$ au plus.

D'autre part, la somme des termes logarithmiques

$$A_1 \log(x-a) + B_1 \log(x-b) + \ldots,$$

a pour dérivée

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots = \frac{N}{Q},$$

Q désignant le polynôme de degré r

$$Q = (x-a)(x-b)\ldots$$

et N un polynôme de degré $r-1$ au plus.

Si donc nous prenons la dérivée de l'équation (2), il viendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi + \frac{N}{Q} + \left(\frac{M}{P}\right)',$$

Π désignant un polynôme de degré $m-n$, qui existera seulement dans le cas où $m \overline{\geq} n$.

7. M. Hermite a fait cette remarque intéressante, que

pour effectuer le calcul des polynômes Π, M, N, P, Q il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation $F(x) = 0$.

En effet, Π est le quotient de la division de $f(x)$ par $F(x)$. D'autre part, on sait, par la théorie des racines égales, que P est le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de sa dérivée (divisé, s'il y a lieu, par le coefficient de son premier terme); il s'obtiendra donc par de simples divisions. Enfin, si λ est le coefficient du premier terme de $F(x)$, on aura

$$F(x) = \lambda(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots = \lambda PQ,$$

d'où

$$Q = \frac{F(x)}{\lambda P}.$$

Q s'obtient donc également par une division.

Reste à déterminer M et N de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi + \frac{N}{Q} + \left(\frac{M}{P}\right)' = \Pi + \frac{N}{Q} + \frac{M'P - MP'}{P^2}.$$

Multipliant les deux membres par $F(x) = \lambda PQ$, il viendra

$$f(x) - \Pi F(x) = \lambda PN + \lambda QM' - \lambda M \frac{QP'}{P}.$$

Or $f(x) - \Pi F(x)$, reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$, est un polynôme de degré $n-1$; il en est de même de chacun des termes du second membre; car le dernier terme, bien que se présentant sous une apparence fractionnaire, est entier; en effet, P' étant divisible par

$$(x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta-2}\ldots,$$

QP' est divisible par P.

En identifiant les deux membres de l'équation précédente, on obtiendra un système de n équations linéaires pour déterminer les coefficients des polynômes M, N; ceux-ci sont aussi au nombre de n; car M et N sont respectivement de degrés $n-r-1$ et $r-1$.

Nous pouvons ainsi, par des opérations toutes rationnelles,

décomposer la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux parties, l'une $\Pi + \left(\frac{M}{P}\right)'$ immédiatement intégrable, l'autre $\frac{N}{Q}$ dans laquelle le dénominateur n'a plus que des racines simples.

Si N est identiquement nul, cette seconde partie disparaît, et l'intégration est terminée. Dans le cas contraire, la fraction $\frac{N}{Q}$ ne peut être intégrée qu'en la décomposant en fractions simples, ce qui nécessite la résolution de l'équation $Q = 0$.

8. L'intégration des fractions rationnelles peut encore être présentée de la manière suivante.

Nous avons vu (t. I, nº 212) que toute fraction dont le dénominateur est un produit de facteurs premiers entre eux peut être décomposée en une somme de fractions partielles, ayant respectivement ces divers facteurs pour dénominateurs.

Cela posé, soit $\frac{f}{F}$ la fraction considérée, et soient $P_1, P_2, \ldots$ les produits des facteurs binômes $x - a$, $x - b$, ... qui correspondent aux racines simples, aux racines doubles, etc. de F, de telle sorte qu'on ait

$$F = P_1 P_2^2 P_3^3 \ldots.$$

On sait (t. I, nº 210) que les facteurs P_1, P_2, ... peuvent être obtenus par des opérations rationnelles. D'ailleurs chacun d'eux n'a que des racines simples; enfin ils sont premiers entre eux; on pourra donc mettre $\frac{f}{F}$ sous la forme d'une somme de fractions

$$\frac{M_1}{P_1} + \frac{M_2}{P_2^2} + \ldots,$$

qu'on aura à traiter isolément. Nous avons donc ramené la question de l'intégration au cas d'une fraction

$$\frac{M}{P^\mu},$$

où le dénominateur est une puissance d'un polynôme P n'ayant que des racines simples.

L'intégration par parties va nous permettre de ramener ce problème au cas où $\mu = 1$. Supposons en effet $\mu > 1$.

Le polynôme P étant premier à sa dérivée, on pourra déterminer deux polynômes A, B tels que l'on ait $AP + BP' = 1$. On aura donc

$$\frac{M}{P^\mu} = \frac{M(AP + BP')}{P^\mu} = \frac{AM}{P^{\mu-1}} + \frac{BMP'}{P^\mu}.$$

Or $\frac{P'}{P^\mu}$ est la dérivée de $\frac{1}{1-\mu}\,\frac{1}{P^{\mu-1}}$; on aura donc, d'après la formule de l'intégration par parties

$$BM\frac{P'}{P^\mu} = \left[\frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' - \frac{(BM)'}{(1-\mu)P^{\mu-1}},$$

et, par suite, en posant pour abréger

$$AM - \frac{(BM)'}{1-\mu} = M_1,$$

$$\frac{M}{P^\mu} = \left[\frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}},$$

et en intégrant

$$\int \frac{M}{P^\mu}\,dx = \frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}} + \int \frac{M_1}{P^{\mu-1}}\,dx.$$

On a ainsi ramené le calcul de l'intégrale cherchée à celui d'une intégrale analogue où l'exposant de P est réduit d'une unité. En changeant μ en $\mu - 1$ et M en M_1 dans cette formule, on trouvera de même, en posant

$$AM_1 - \frac{(BM_1)'}{2-\mu} = M_2,$$

$$\int \frac{M_1}{P^{\mu-1}}\,dx = \frac{BM_1}{(2-\mu)P^{\mu-2}} + \int \frac{M_2}{P^{\mu-2}}\,dx,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant de P soit réduit à l'unité, auquel cas on devra recourir à la décomposition en éléments simples, qui donnera la partie logarithmique de l'intégrale.

9. Proposons-nous, comme exemple, d'intégrer l'expression

$$\frac{f(x)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu}.$$

Il sera utile de commencer par un changement de variables, en posant

$$x=\alpha+\beta t, \qquad \text{d'où} \qquad dx=\beta\,dt.$$

On en déduit

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu}=\int \frac{\beta^{1-2\mu}\,f(\alpha+\beta t)}{(1+t^2)^\mu}\,dt.$$

Séparant dans le numérateur les termes de degré pair de ceux de degré impair, on pourra le mettre sous la forme

$$\varphi(t^2)+\varphi_1(t^2)\,t.$$

L'intégrale cherchée sera donc la somme des deux suivantes

$$\int \frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^\mu}\,dt, \qquad \int \frac{\varphi_1(t^2)\,t\,dt}{(1+t^2)^\mu}.$$

Pour intégrer cette dernière, posons

$$1+t^2=u, \qquad \text{d'où} \qquad 2t\,dt=du,$$

elle deviendra

$$\int \frac{\frac{1}{2}\varphi_1(u-1)\,du}{u^\mu}.$$

Cette expression se décompose en une somme de termes dont chacun, étant le produit d'une constante par une puissance de u, est immédiatement intégrable.

Passons à l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(t^2)\,dt}{(1+t^2)^\mu}.$$

Posant $1+t^2=h$, il viendra

$$\frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^\mu}=\frac{\varphi(-1+h)}{h^\mu}=\frac{a}{h^\mu}+\frac{a_1}{h^{\mu-1}}+\ldots+\Pi$$

$$=\frac{a}{(1+t^2)^\mu}+\frac{a_1}{(1+t^2)^{\mu-1}}+\ldots+\Pi,$$

Π étant un polynôme en t, qui s'intègre immédiatement.

L'intégrale des autres termes sera

$$a\mathrm{I}_{\mu} + a_1\mathrm{I}_{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1}\mathrm{I}_1,$$

si l'on pose pour abréger

$$\mathrm{I}_{\mu} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu}}.$$

Appliquons à cette intégrale la formule de réduction du numéro précédent. On a ici

$$\mathrm{M} = 1, \qquad \mathrm{P} = 1 + t^2.$$

Ce dernier polynôme est lié à sa dérivée $\mathrm{P}' = 2t$ par la relation $\mathrm{P} - \frac{1}{2}t\mathrm{P}' = 1$.

On aura donc

$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{B} = -\tfrac{1}{2}t$$

et, par suite,

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{AM} - \frac{(\mathrm{BM})'}{1-\mu} = 1 + \frac{1}{2(1-\mu)} = \frac{2\mu-3}{2\mu-2},$$

d'où

$$\mathrm{I}_{\mu} = \frac{t}{(2\mu-2)(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\mathrm{I}_{\mu-1}.$$

Par cette formule de réduction, on ramènera successivement le calcul de toutes ces intégrales à celui de la première

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t.$$

10. On peut souvent simplifier notablement l'intégration des fractions rationnelles par un changement de variable.

Supposons, par exemple, que la fonction $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ à intégrer puisse se mettre sous la forme

$$\varphi(x^m)x^{m-1},$$

m étant un entier quelconque.

Si nous posons $x^m = t$, d'où $mx^{m-1}\,dx = dt$, on aura

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \varphi(x^m)\,x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\int \varphi(t)\,dt.$$

L'intégrale cherchée se trouve donc ramenée à l'intégrale plus simple $\int \varphi(t)\,dt$.

Exemple. — Soit à intégrer l'expression $\frac{1}{a+bx^m}\,\frac{dx}{x}$. Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{x^m(a+bx^m)}\,x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\,\frac{1}{t(a+bt)}\,dt.$$

Son intégrale sera

$$\frac{1}{am}[\log t - \log(a+bt)] + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{am}[\log x^m - \log(a+bx^m)] + \text{const.}$$

Le cas qui se présente le plus souvent est celui où la fonction $\psi(x)$ à intégrer est une fonction impaire.

Lorsque cela aura lieu, il est clair que $\frac{\psi(x)}{x}$ sera une fonction paire, laquelle ne dépendra, par conséquent, que de x^2. On aura donc

$$\psi(x) = \varphi(x^2).x,$$

et l'on pourra appliquer la simplification précédente (m étant ici égal à 2).

11. Signalons encore le cas, assez fréquent dans les applications, où le numérateur $f(x)$ de la fonction à intégrer ne diffère de la dérivée du dénominateur que par un facteur constant a. On aura immédiatement

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{aF'(x)}{F(x)}\,dx = a\log F(x) + \text{const.}$$

II. — Intégration des différentielles algébriques.

12. Considérons l'*intégrale abélienne*

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où f désigne une fraction rationnelle de x et de y; cette dernière quantité étant elle-même une fonction algébrique, définie par une équation

$$F(x, y) = 0.$$

Si la courbe caractérisée par cette équation est unicursale, on pourra exprimer x et y rationnellement au moyen d'une nouvelle variable t. Soit

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

d'où

$$dx = \varphi'(t)\, dt.$$

Prenant t pour nouvelle variable, l'intégrale deviendra

$$\int f[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt,$$

et se déterminera sans difficulté, la fonction sous le signe $\int$ étant devenue rationnelle.

13. *Exemples.* — I. Supposons que y soit défini par l'équation

$$\begin{aligned} A y^m + B x y^{m-1} + \ldots + L x^m \\ + a y^{m-1} + b x y^{m-2} + \ldots + k x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Posons $y = tx$; l'équation, débarrassée du facteur commun x^{m-1}, donnera

$$x = -\frac{a t^{m-1} + b t^{m-2} + \ldots + k}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + L},$$

d'où

$$y = -\frac{a t^m + b t^{m-1} + \ldots + k t}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + L}.$$

On pourra donc intégrer toute expression de la forme

$$\int f(x, y)\, dx.$$

14. II. Considérons l'intégrale

$$\int f\left[\left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^a, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^b, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^c, \ldots, x\right] dx,$$

où m, n, m', n' sont des constantes, $a, b, c, \ldots$ des nombres commensurables, et f une fonction rationnelle. Soit μ le plus petit multiple des dénominateurs de $a, b, c, \ldots$. On posera

$$\frac{mx+n}{m'x+n'} = t^\mu,$$

d'où

$$x = -\frac{n't^\mu - n}{m't^\mu - m}, \qquad dx = \frac{mn' - nm'}{(m't^\mu - m)^2}\mu t^{\mu-1}\, dt.$$

Substituant, l'intégrale devient

$$\int f\left(t^{\mu a}, t^{\mu b}, t^{\mu c}, \ldots, -\frac{n't^\mu - n}{m't^\mu - m}\right)\frac{mn' - nm'}{(m't^\mu - m)^2}\mu t^{\mu-1}\, dt,$$

où tout est rationnel, μ, μa, μb, μc, ... étant des entiers.

15. III. *Différentielle binôme.* — On donne ce nom à l'expression

$$x^m(a + bx^n)^p\, dx,$$

où m, n, p sont des nombres commensurables et a, b des constantes différentes de zéro.

Posons

$$bx^n = at,$$

d'où

$$x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1}\, dt.$$

Substituant ces expressions, et posant pour abréger

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

la différentielle sera transformée, à un facteur constant près, dans la suivante

$$t^q(1+t)^p\,dt,$$

qui ne dépend plus que des deux paramètres p et q.

Cette nouvelle différentielle peut être rendue rationnelle, d'après le numéro précédent, dans les trois cas suivants :

1° Si p est entier;

2° Si q est entier;

3° Si $p+q$ est entier.

En effet, dans ces diverses hypothèses, $t^q(1+t)^p$ sera respectivement le produit d'une fonction rationnelle de t par une puissance fractionnaire de l'une des trois quantités t, $1+t$, $\frac{1+t}{t}$, toutes comprises dans la forme générale

$$\frac{mt+n}{m't+n'}.$$

En dehors de ces trois cas d'intégrabilité, la différentielle binôme ne peut être rendue rationnelle, et son intégrale

$$\mathrm{I}_{pq}=\int t^q(1+t)^p\,dt$$

représentera une transcendante nouvelle.

16. La décomposition en éléments simples et l'intégration par parties fournissent aisément des relations entre ces intégrales.

En effet, on a tout d'abord

$$(1)\qquad \mathrm{I}_{pq}=\int(t^q+t^{q+1})(1+t)^{p-1}\,dt=\mathrm{I}_{p-1,q}+\mathrm{I}_{p-1,q+1}.$$

Intégrant, d'autre part, l'identité

$$[t^{q+1}(1+t)^p]'=(q+1)t^q(1+t)^p+pt^{q+1}(1+t)^{p-1},$$

il vient

$$(2)\qquad (q+1)\mathrm{I}_{pq}+p\mathrm{I}_{p-1,q+1}=t^{q+1}(1+t)^p.$$

Éliminons $\mathrm{I}_{p-1,q+1}$ entre les équations (1) et (2), il vient

$$(3)\qquad (p+q+1)\mathrm{I}_{pq}-p\mathrm{I}_{p-1,q}=t^{q+1}(1+t)^p$$

et, en changeant p en $p+1$,

$$(4)\qquad (p+q+2)I_{p+1,q}-(p+1)I_{pq}=t^{q+1}(1+t)^{p+1}.$$

Éliminons, au contraire, I_{pq} et changeons p en $p+1$; il viendra

$$(5)\qquad (q+1)I_{pq}+(p+q+2)I_{p,q+1}=t^{q+1}(1+t)^{p+1}$$

et, en changeant q en $q-1$,

$$(6)\qquad qI_{p,q-1}+(p+q+1)I_{pq}=t^{q}(1+t)^{p+1}.$$

Ces formules permettent de ramener la recherche de l'intégrale I_{pq} à celle d'une intégrale de même forme $I_{p'q'}$, où p', q' soient $\overline{\overline{<}}\,0$, mais $\overline{\overline{>}}-1$.

En effet, si $p<-1$, la formule (4) ramènera le calcul de I_{pq} à celui de $I_{p+1,q}$; répétant cette réduction, on finira par arriver à une intégrale où le premier indice est $\overline{\overline{>}}-1$.

Si $q<-1$, la formule (5) ramènera de même $I_{p,q}$ à $I_{p,q+1}$; réitérant cette réduction, on arrivera à une intégrale où le second indice est $\overline{\overline{>}}-1$.

On est ainsi ramené aux intégrales I_{pq}, où $p\,\overline{\overline{>}}-1$, $q\,\overline{\overline{>}}-1$. Dans cette hypothèse, si l'un des indices p ou q est positif, $p+q+1$ ne sera pas nul, et l'on pourra, au moyen de la formule (3) ou de la formule (6), l'abaisser d'une unité, et répéter cette opération jusqu'à ce qu'il devienne nul ou négatif, mais >-1.

Supposons donc que p et q soient tous deux $\overline{\overline{<}}\,0$, mais $\overline{\overline{>}}-1$. Si $p=0$, mais $q>-1$, la formule (3), qui se réduit à

$$(q+1)I_{0q}=t^{q+1},$$

donnera l'intégrale cherchée. De même, si $p>-1$, $q=0$, l'intégrale sera donnée par la formule (6), qui se réduit à

$$(p+1)I_{p0}=(1+t)^{p+1}.$$

Enfin, si l'un des indices p et q, ou tous les deux, sont égaux à -1, on se trouvera dans un cas d'intégrabilité, mais les formules de réduction seront impuissantes et, pour

calculer l'intégrale, il faudra recourir à un changement de variable qui rende la différentielle rationnelle. La réduction opérée n'en aura pas moins été fort utile, en simplifiant l'expression de la différentielle sur laquelle on doit opérer.

17. IV. Soit proposée l'intégrale

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où f est une fonction rationnelle, et où y représente le radical

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}.$$

Considérons la conique

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

et soient μ et $\nu = \sqrt{A\mu^2 + 2B\mu + C}$ les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe. Par ce point, faisons passer un faisceau de droites définies par l'équation

$$y - \nu = t(x - \mu).$$

Chacune de ces droites rencontrera la conique en un seul autre point, dont les coordonnées seront exprimables en fonction rationnelle de la nouvelle variable t.

Pour déterminer ces coordonnées, nous aurons les équations

$$y - \nu = t(x - \mu),$$
$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C.$$

Éliminant y, il vient

$$[t(x - \mu) + \nu]^2 = Ax^2 + 2Bx + C.$$

En effectuant les calculs et remplaçant ν^2 par sa valeur $A\mu^2 + B\mu + C$, il viendra

$$t^2(x - \mu)^2 + 2\nu t(x - \mu) = Ax^2 + 2Bx - A\mu^2 - 2B\mu,$$

et, en supprimant le facteur commun $x - \mu$,

$$t^2(x - \mu) + 2\nu t = A(x + \mu) + 2B.$$

On en déduit

$$x = \frac{A\mu + 2B - 2\nu t + \mu t^2}{t^2 - A};$$

dx s'en déduira par différentiation et y par l'équation

$$y = t(x - \mu) + \nu.$$

Ces valeurs, substituées dans la différentielle proposée, la rendront rationnelle.

18. Le point (μ, ν) pouvant être pris arbitrairement sur la conique, la transformation peut être variée d'une infinité de manières.

1° Choisissons, par exemple, l'un des points où la courbe coupe l'axe des x. On aura $\nu = 0$, et la nouvelle variable t sera donnée par la formule

$$y = t(x - \mu),$$

où μ désigne l'une des racines de l'équation

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0.$$

2° Choisissons l'un des points où elle coupe l'axe des y. On aura $\mu = 0$, $\nu = \sqrt{C}$, le radical pouvant être pris avec le signe qu'on voudra, et la formule de transformation sera

$$y - \sqrt{C} = tx.$$

3° On pourrait encore couper la conique par un faisceau de droites

$$y = x\sqrt{A} + t,$$

parallèles à l'une de ses asymptotes. On aura, dans ce cas, pour déterminer l'abscisse du point d'intersection, l'équation

$$Ax^2 + 2Bx + C = y^2 = \left(x\sqrt{A} + t\right)^2,$$

d'où

$$2Bx + C = 2tx\sqrt{A} + t^2,$$

$$x = \frac{t^2 - C}{2B - 2t\sqrt{A}}.$$

Le signe de $\sqrt{A}$ peut être choisi à volonté dans cette formule.

19. Il est en général, avantageux, avant de rendre rationnelle la différentielle

$$f(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})\,dx,$$

de la simplifier par une substitution de la forme

$$x = m + nz.$$

On en déduit $dx = n\,dz$, et l'expression à intégrer devient

$$f\left[m + nz, \sqrt{An^2z^2 + (2Amn + 2Bn)z + Am^2 + 2Bm + C}\right]n\,dz.$$

Cette expression est analogue à l'expression primitive; mais elle contient les deux indéterminées m, n, qui pourront être choisies de manière à simplifier l'expression du polynôme sous le radical.

Nous ferons tout d'abord disparaître le terme en z, en posant

$$2Amn + 2Bn = 0,$$

d'où

$$m = -\frac{B}{A}.$$

Nous pourrons ensuite disposer de n de manière à donner au coefficient An^2 de z^2 une valeur arbitraire (sans toutefois pouvoir changer son signe, si nous voulons que n reste réel). Quant au dernier coefficient, il aura pour valeur

$$Am^2 + 2Bm + C = \frac{AC - B^2}{A}.$$

20. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Posant, comme il vient d'être dit,

$$x = -\frac{B}{A} + nz,$$

elle deviendra

$$\int \frac{n\,dz}{\sqrt{An^2z^2 + K}},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{AC - B^2}{A} = K.$$

Divers cas seront ici à distinguer :

1° Si A est positif, on posera

$$An^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

et l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + K}}.$$

Pour l'obtenir, nous poserons, suivant la méthode générale,

$$\sqrt{z^2 + K} = -z + t,$$

d'où

$$K = -2tz + t^2,$$

et, en différentiant,

$$0 = 2(-z + t)\,dt - 2t\,dz.$$

On en déduit

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + K}} = \frac{dz}{-z + t} = \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + K}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(\sqrt{z^2 + K} + z\right) + \text{const.}$$

2° Si, A étant négatif, K l'est également, le radical et, par suite, l'intégrale seront imaginaires, quel que soit x. On pourra donc appliquer le calcul précédent, bien qu'il conduise à un résultat imaginaire.

3° Soit enfin $A < 0$, mais $K > 0$. Pour éviter les imaginaires qui figureraient sans nécessité dans l'expression de l'intégrale, on posera

$$An^2 = -K, \qquad \text{d'où} \qquad n = \sqrt{-\frac{K}{A}}.$$

L'intégrale deviendra

$$\int \frac{\sqrt{-\frac{K}{A}}\,dz}{\sqrt{-Kz^2+K}} = \sqrt{-\frac{1}{A}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{A}}\arcsin z + \text{const.}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{A}}\arcsin\frac{x+\frac{B}{A}}{\sqrt{-\frac{K}{A}}} + \text{const.}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{A}}\arcsin\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{const.}$$

21. Soit encore à intégrer l'expression

$$\int\frac{dx}{(x-\mu)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Posons

$$\nu = \sqrt{A\mu^2+2B\mu+C}.$$

Le point (μ, ν) étant un point de la conique

$$y = \sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

on rendra rationnelle la fonction à intégrer en posant

$$y - \nu = t(x-\mu),$$

d'où

$$(7) \qquad t^2(x-\mu)+2\nu t = A(x+\mu)+2B.$$

Cette équation, différentiée, donnera

$$[2t(x-\mu)+2\nu]\,dt+(t^2-A)\,dx=0,$$

d'où

$$-\frac{2\,dt}{t^2-A}=\frac{dx}{t(x-\mu)+\nu}=\frac{dx}{y}$$

et

$$\frac{dx}{(x-\mu)y}=-\frac{2\,dt}{(t^2-A)(x-\mu)}.$$

Mais l'équation (7) peut s'écrire ainsi :

$$(t^2-A)(x-\mu)=2A\mu+2B-2\nu t.$$

L'intégrale cherchée $\int\frac{dx}{(x-\mu)y}$ sera donc égale à

$$\int\frac{-dt}{A\mu+B-\nu t}=\frac{1}{\nu}\log(\nu t-A\mu-B)+\text{const.}$$

22. *Remarque.* — L'intégrale

$$\int f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, se ramène à celles que nous venons de traiter.

Posons, en effet,

$$\sqrt{ax+b}=t,$$

d'où

$$x=\frac{t^2-b}{a}, \quad dx=\frac{2t\,dt}{a}.$$

L'intégrale deviendra

$$\int f\left[\frac{t^2-b}{a},\ t,\ \sqrt{\frac{c(t^2-b)}{a}+d}\right]\frac{2t\,dt}{a},$$

expression qui ne contient plus qu'un seul radical.

23. *Intégrales elliptiques et hyperelliptiques.* — Les intégrales

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx,$$

où f est une fonction rationnelle et X un polynôme en x de degré supérieur à 2, ne sont pas en général réductibles comme les précédentes aux fonctions élémentaires. Ce sont des transcendantes nouvelles auxquelles on donne le nom d'*intégrales elliptiques* si $n = 3$ ou 4, d'*intégrales hyperelliptiques* si $n > 4$.

Proposons-nous d'étudier ces transcendantes.

24. Lemme. — *Toute fonction rationnelle de x et $\sqrt{X}$ peut se mettre sous la forme $\frac{R}{\sqrt{X}} + S$, où R et S sont des fonctions rationnelles de x.*

En effet, $\sqrt{X}$ ayant pour carré X, qui est rationnel en x, toute fonction entière de x et $\sqrt{X}$ sera évidemment de la forme

$$P + Q\sqrt{X},$$

où P et Q sont entiers en x.

Une fonction rationnelle, étant le quotient de deux fonctions entières, sera de la forme

$$\frac{P + Q\sqrt{X}}{P_1 + Q_1\sqrt{X}},$$

ou, en multipliant au numérateur et au dénominateur par $P_1 - Q_1\sqrt{X}$,

$$\frac{(P_1 Q - P Q_1)\sqrt{X} + PP_1 - QQ_1 X}{P_1^2 - Q_1^2 X} = M\sqrt{X} + S,$$

M et S étant rationnels en x.

D'ailleurs,

$$M\sqrt{X} = \frac{MX}{\sqrt{X}} = \frac{R}{\sqrt{X}},$$

R étant rationnel en x. Le théorème est donc démontré.

Cette fonction aura pour intégrale

$$\int \frac{R}{\sqrt{X}} dx + \int S\, dx.$$

L'intégrale $\int S\, dx$ s'obtenant par les méthodes précédemment exposées, il ne reste à étudier que la première intégrale $\int \frac{R}{\sqrt{X}} dx$.

25. On peut évidemment supposer que X n'a que des racines simples; car, s'il contenait un facteur double, on pourrait le faire sortir du radical.

Cela posé, on sait que la fraction rationnelle R peut être décomposée : 1° en un polynôme entier Π; 2° en une somme de fractions de la forme $\frac{M}{P^\mu}$, où P est un polynôme entier n'ayant que des racines simples.

Soit D le plus grand commun diviseur de P et de X, et soit $P = DP_1$; P_1 sera premier à D et à X. La fraction

$$\frac{M}{P^\mu} = \frac{M}{D^\mu P_1^\mu}$$

pourra donc être décomposée en deux autres ayant respectivement pour dénominateur P_1^μ et D^μ.

Nous aurons donc à considérer trois sortes d'intégrales :

1° Des intégrales

$$\int \frac{M\, dx}{P^\mu \sqrt{X}},$$

où P est premier à X;

2° Des intégrales de même forme où P divise X;

3° Des intégrales

$$\int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{X}},$$

où Π est un polynôme entier.

26. Considérons les intégrales de la première sorte : P étant premier à P′ et à X, on pourra trouver deux polynômes A, B tels que l'on ait

$$AP + BP'X = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{M(AP + BP'X)}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{AM}{P^{\mu-1}\sqrt{X}} + BM\sqrt{X}\,\frac{P'}{P^\mu}.$$

Or, si $\mu > 1$, $\frac{P'}{P^\mu}$ est la dérivée de $\frac{1}{(1-\mu)P^{\mu-1}}$. On a donc

$$BM\sqrt{X}\,\frac{P'}{P^\mu} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' - \frac{(BM\sqrt{X})'}{(1-\mu)P^{\mu-1}}.$$

D'ailleurs

$$(BM\sqrt{X})' = (BM)'\sqrt{X} + \frac{BMX'}{2\sqrt{X}} = \frac{(BM)'X + \frac{1}{2}BMX'}{\sqrt{X}}.$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$AM - \frac{(BM)'X + \frac{1}{2}BMX'}{1-\mu} = M_1,$$

il viendra

$$\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

Intégrant cette équation, nous aurons la formule de réduction

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}} + \int \frac{M_1\,dx}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

Par l'application répétée de cette formule, nous aurons finalement

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^{\mu-1}} + \int \frac{N\,dx}{P\sqrt{X}},$$

L et N étant des polynômes entiers.

La division de N par P donne d'ailleurs

$$\frac{N}{P} = \Pi_1 + \frac{\rho}{P},$$

Π_1 étant un polynôme entier et ρ un reste de degré moindre que P; on aura donc

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^{\mu-1}} + \int \frac{\Pi_1\,dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{\rho\,dx}{P\sqrt{X}}.$$

27. Passons à la considération des intégrales de la seconde sorte

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}},$$

où P divise X. Soit $X = PX_1$; P étant premier à P′ et à X_1, on pourra déterminer deux polynômes A, B tels que l'on ait

$$AP + BP'X_1 = 1,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} &= \frac{M}{P^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}(AP + BP'X_1)\\ &= \frac{AM}{P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}} + BM\sqrt{X_1}\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Or on a, pour toute valeur entière de μ, et même pour $\mu = 1$,

$$\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}} = \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\mu)P^{\mu-\frac{1}{2}}}\right]',$$

et par suite

$$\begin{aligned}BM\sqrt{X_1}\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}} &= \left[\frac{BM\sqrt{X_1}}{(\frac{1}{2}-\mu)P^{\mu-\frac{1}{2}}}\right]' - \frac{(BM\sqrt{X_1})'}{(\frac{1}{2}-\mu)P^{\mu-\frac{1}{2}}}\\ &= \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(\frac{1}{2}-\mu)P^\mu}\right]' - \frac{(BM)'X_1 + \frac{1}{2}BMX_1'}{(\frac{1}{2}-\mu)P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}.\end{aligned}$$

Mais

$$P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1} = P^{\mu-1}\sqrt{X}.$$

Si donc l'on pose, pour abréger,

$$AM - \frac{(BM)'X_1 + \frac{1}{2}BMX'_1}{\frac{1}{2}-\mu} = M_1,$$

il viendra

$$\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(\frac{1}{2}-\mu)P^\mu}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}\sqrt{X}},$$

et, en intégrant, on aura la formule de réduction

$$\int\frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{BM\sqrt{X}}{(\frac{1}{2}-\mu)P^\mu} + \int\frac{M_1\,dx}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

En répétant cette réduction jusqu'à ce que l'exposant de P s'annule, on trouvera un résultat de la forme

$$\int\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^\mu} + \int\frac{\Pi_2\,dx}{\sqrt{X}},$$

L et Π_2 étant des polynômes entiers.

28. Il nous reste à étudier l'intégrale $\int\frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}}$, à laquelle on peut réunir les termes de même forme $\int\frac{\Pi_1\,dx}{\sqrt{X}}$, ... provenant de la réduction des intégrales déjà traitées.

Soit $\Pi = \alpha x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots$; on aura

$$\int\frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}} = \alpha I_m + \alpha_1 I_{m-1} + \ldots$$

en posant

$$I_k = \int\frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Il est aisé de trouver une formule de réduction pour les intégrales I_k. Soit, en effet,

$$X = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots.$$

On aura, λ désignant un entier quelconque $\gtreqless 0$,

$$(x^\lambda\sqrt{X})' = \frac{\lambda x^{\lambda-1}X + \frac{1}{2}x^\lambda X'}{\sqrt{X}}$$
$$= \frac{a(\lambda + \frac{1}{2}n)x^{\lambda+n-1} + bx^{\lambda+n-2} + \ldots}{\sqrt{X}}$$

et en intégrant

$$x^\lambda\sqrt{X} = a(\lambda + \tfrac{1}{2}n)I_{\lambda+n-1} + bI_{\lambda+n-2} + \ldots,$$

formule qui ramènera l'intégrale $I_{\lambda+n-1}$ aux intégrales I d'indice moindre.

Par l'application répétée de cette formule, il viendra

$$\int \frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}} = c_0 I_0 + \ldots + c_{n-2} I_{n-2} + \Psi\sqrt{X},$$

où Ψ est un polynôme entier.

On voit donc que l'intégrale $\int \frac{R\,dx}{\sqrt{X}}$, où R est une fraction rationnelle quelconque, se réduit : 1° à des termes algébriques ; 2° à une combinaison linéaire des intégrales $I_0, \ldots, I_{n-2}$; 3° à des intégrales de la forme

$$\int \frac{\rho\,dx}{P\sqrt{X}},$$

où ρ est de degré moindre que P, ce dernier polynôme étant d'ailleurs premier à X, et n'ayant que des racines simples.

29. Jusqu'ici nous n'avons employé pour la réduction que des opérations purement rationnelles ; mais si, maintenant, nous résolvons l'équation algébrique $P = 0$, nous pourrons décomposer $\frac{\rho}{P}$ en une somme de fractions simples

$$\frac{\rho}{P} = \frac{\alpha}{x-\mu} + \frac{\alpha_1}{x-\mu_1} + \ldots.$$

Si donc nous désignons par $J(\mu)$ l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-\mu)\sqrt{X}},$$

nous aurons

$$\int \frac{\rho\, dx}{P\sqrt{X}} = \alpha J(\mu) + \alpha_1 J(\mu_1) + \dots.$$

Les seules transcendantes nouvelles obtenues par l'intégration des fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{X}$ sont donc les $n-1$ intégrales $I_0, I_1, \dots, I_{n-2}$ et l'intégrale $J(\mu)$.

30. La méthode de réduction que nous venons d'exposer peut être appliquée avec avantage au cas où X est un polynôme du second degré $Ax^2 + 2Bx + C$. Elle ramène le problème de l'intégration à la recherche des deux intégrales particulières

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-\mu)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

que nous avons obtenues.

31. Si le degré de X est un nombre impair $2p+1$, les intégrales I sont en nombre $2p$. On les partage en deux classes : 1° les *intégrales de première espèce*

$$I_0, \quad I_1, \quad \dots, \quad I_{p-1}$$

et les *intégrales de seconde espèce*

$$I_p, \quad I_{p+1}, \quad \dots, \quad I_{2p-1}.$$

Les premières s'annulent et les autres deviennent infinies pour $x = \infty$.

Soit, en effet,

$$X = x^{2p+1} + a x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \dots.$$

On aura

$$\frac{x^k}{\sqrt{X}} = x^{k-p-\frac{1}{2}} + \lambda x^{k-p-\frac{3}{2}} + \dots$$

et, en intégrant,

$$I_k = \frac{x^{k-p+\frac{1}{2}}}{k-p+\frac{1}{2}} + \lambda \frac{x^{k-p-\frac{1}{2}}}{k-p-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

développement qui montre que, pour $x=\infty$, I_k est de l'ordre $k-p+\frac{1}{2}$. Il sera donc nul si $k<p$, infini si $k \overline{\gtrless} p$.

Les intégrales $J(\mu)$ se nomment *intégrales de troisième espèce*.

32. Le cas où X est un polynôme de degré pair peut se ramener au précédent, comme nous allons le faire voir.

Soit

$$X = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

un polynôme de degré $2p$. Posons

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = t,$$

d'où

$$x = \frac{\alpha-\beta t}{1-t}, \qquad dx = \frac{(\alpha-\beta)\,dt}{(1-t)^2}, \qquad x-\alpha = t\,\frac{\alpha-\beta}{1-t},$$

$$x-\beta = \frac{\alpha-\beta}{1-t}, \qquad x-\gamma = \frac{\alpha-\gamma+(\gamma-\beta)t}{1-t}, \qquad \ldots.$$

On aura

$$\sqrt{X} = \frac{\alpha-\beta}{(1-t)^p}\sqrt{At[\alpha-\gamma+(\gamma-\beta)t]\ldots},$$

$$R\,dx = T\,dt,$$

T étant une fonction rationnelle de t. On voit que la substitution a réduit d'une unité le degré du polynôme sous le radical.

33. Dans le cas particulier des intégrales elliptiques, le polynôme sous le radical pourrait ainsi être abaissé au troisième degré; mais on préfère, parfois, employer une transformation un peu différente, par laquelle ce polynôme sera le produit de deux facteurs réels du second degré, ne contenant que des puissances paires de la variable.

Supposons d'abord que X soit du troisième degré. Soit α l'une des racines de l'équation $X = 0$, on aura

$$\sqrt{X} = \sqrt{A(x-\alpha)(x^2+px+q)}.$$

Posons $x = \alpha + t^2$, il viendra

$$\sqrt{X} = t\sqrt{A[(\alpha+t^2)^2 + p(\alpha+t^2)+q]}.$$

On se trouve donc ramené au cas où le polynôme sous le radical est du quatrième degré, cas que nous allons traiter.

Si X a ses coefficients réels, l'équation $X = 0$ aura au moins une racine réelle. En la prenant pour α, la transformation qui vient d'être indiquée sera réelle.

34. Supposons maintenant X du quatrième degré. On pourra écrire

$$\sqrt{X} = \sqrt{A(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')},$$

p, q, p', q' étant réels, si X a ses coefficients réels.

Si $p = p'$, on fera disparaître les puissances impaires de la variable en posant $x = t - \frac{1}{2}p$.

On obtiendra le même résultat, si $p \gtrless p'$, par une substitution de la forme

$$x = \frac{\lambda + \mu t}{1+t}.$$

Cette substitution donnera, en effet,

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{A[(\lambda+\mu t)^2 + p(\lambda+\mu t)(1+t) + q(1+t)^2][(\lambda+\mu t)^2 + p'(\lambda+\mu t)(1+t)+\ldots]}.$$

Les termes du premier degré en t disparaîtront dans chacun des facteurs sous le radical, si l'on pose

$$2\lambda\mu + p(\lambda+\mu) + 2q = 0,$$
$$2\lambda\mu + p'(\lambda+\mu) + 2q' = 0.$$

On déduit de ces équations

$$\lambda + \mu = -2\frac{q - q'}{p - p'},$$

$$\lambda\mu = \frac{qp' - pq'}{p - p'}.$$

Donc λ et μ seront les racines de l'équation

$$\lambda^2 + 2\frac{q - q'}{p - p'}\lambda + \frac{qp' - pq'}{p - p'} = 0.$$

Ces racines seront réelles si l'on a

$$(q - q')^2 - (qp' - pq')(p - p') > 0.$$

Or, si l'on appelle α, β les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

γ, δ celles de l'équation

$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

on aura

$$p = -(\alpha + \beta), \qquad q = \alpha\beta,$$
$$p' = -(\gamma + \delta), \qquad q' = \gamma\delta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition précédente, elle devient

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 + [(\alpha + \beta)\gamma\delta - (\gamma + \delta)\alpha\beta](\alpha + \beta - \gamma - \delta) > 0,$$

ou

$$[\alpha^2 - (\gamma + \delta)\alpha + \gamma\delta][\beta^2 - (\gamma + \delta)\beta + \gamma\delta] > 0,$$

ou enfin

$$(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0.$$

Cette condition sera nécessairement satisfaite si les quatre quantités α, β, γ, δ, ou seulement deux d'entre elles, α et β par exemple, sont imaginaires; car les quatre facteurs du produit seront conjugués deux à deux, et le produit de deux imaginaires conjuguées est une somme de deux carrés.

Si α, β, γ, δ sont tous réels, on pourra supposer la décomposition de X en deux facteurs effectuée de telle sorte que

les racines α, β du premier facteur soient plus grandes que les deux autres γ et δ. Chacun des facteurs $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, $\beta-\gamma$, $\beta-\delta$ étant positif dans cette hypothèse, la condition sera satisfaite.

35. Les intégrales elliptiques peuvent donc dans tous les cas se ramener, par un changement de variables qui sera réel si X est lui-même réel, à la forme

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle, et X un polynôme de la forme $(ax^2+b)(a'x^2+b')$.

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\int \frac{F(x)+F(-x)}{\sqrt{X}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{F(x)-F(-x)}{\sqrt{X}}\,dx.$$

Mais $F(x)-F(-x)$, étant une fonction impaire, sera de la forme $\varphi(x^2)x$. Si donc on pose dans la seconde intégrale $x^2=t$, d'où $2x\,dx=dt$, elle deviendra

$$\frac{1}{4}\int \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{(at+b)(a't+b')}},$$

expression qui peut s'intégrer par les méthodes de la section précédente.

Il ne restera donc à étudier que la première intégrale, où le numérateur est une fonction paire,

$$\tfrac{1}{2}[F(x)+F(-x)]=\psi(x^2).$$

36. Nous aurons divers cas à distinguer dans cette étude, suivant les signes de a, b, a', b'.

Supposons d'abord que a et b soient de signes contraires. On pourra supposer $b>0$, $a<0$; car on ne change pas X en changeant simultanément les signes de a, b, a', b'.

Ce cas se subdivisera, d'après le signe des quantités a', b',

en quatre autres :

1er cas.... $a < 0, \quad b > 0, \quad a' < 0, \quad b' > 0.$

2e cas.... $a < 0, \quad b > 0, \quad a' < 0, \quad b' < 0.$

3e cas.... $a < 0, \quad b > 0, \quad a' > 0, \quad b' > 0.$

4e cas.... $a < 0, \quad b > 0, \quad a' > 0, \quad b' < 0.$

Si a et b sont de même signe, on devra supposer également que a' et b' sont de même signe ; sinon, en échangeant a et b avec a' et b', on retomberait sur les cas précédents. Comme on peut d'ailleurs supposer b positif, on n'aura que deux cas à distinguer :

5e cas.... $a > 0, \quad b > 0, \quad a' > 0, \quad b' > 0.$

6e cas.... $a > 0, \quad b > 0, \quad a' < 0, \quad b' < 0.$

Ce dernier cas, où le radical $\sqrt{X}$ sera imaginaire quel que soit x, se ramène immédiatement au cinquième en faisant sortir du radical le facteur $\sqrt{-1}$.

37. Reste à examiner les cas 1, 2, 3, 4, 5. Il est aisé de les ramener les uns aux autres.

Posons, en effet,

$$ax^2 + b = t^2,$$

d'où

$$x^2 = \frac{t^2 - b}{a}, \qquad dx = \frac{t\,dt}{ax} = \frac{t\,dt}{\sqrt{a}\sqrt{t^2 - b}},$$

$$\sqrt{X} = t\sqrt{a'\frac{t^2 - b}{a} + b'} = \frac{t}{\sqrt{a}}\sqrt{a't^2 + ab' - ba'},$$

et, par suite,

$$\frac{\psi(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\psi\left(\frac{t^2 - b}{a}\right)dt}{\sqrt{(-t^2 + b)(-a't^2 - ab' + ba')}}.$$

Si l'intégrale primitive rentrait dans l'un des cas 3, 4, 5, sa transformée rentrerait dans le premier ou le deuxième cas, les coefficients des termes en t^2 sous le nouveau radical étant tous deux négatifs.

En particulier, si l'intégrale primitive rentrait dans le troisième cas, la transformée rentrerait dans le premier; car on aurait

$$a < 0, \quad b > 0, \quad a' > 0, \quad b' > 0,$$

et, par suite,

$$-ab' + ba' > 0.$$

Le deuxième cas se réduit d'ailleurs au troisième en posant

$$x = \frac{1}{t},$$

d'où

$$dx = -\frac{dt}{t^2},$$

$$\sqrt{X} = \frac{1}{t^2}\sqrt{(a+bt^2)(a'+b't^2)} = \frac{1}{t^2}\sqrt{(-bt^2-a)(-b't^2-a')}$$

et

$$\frac{\psi(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\psi\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{(-bt^2-a)(-b't^2-a')}},$$

car, ayant

$$a < 0, \quad b > 0, \quad a' < 0, \quad b' < 0,$$

on aura

$$-b < 0, \quad -a > 0, \quad -b' > 0, \quad -a' > 0.$$

Le troisième cas pouvant à son tour se réduire au premier, ainsi qu'on l'a vu plus haut, les cinq cas se ramènent en dernière analyse à celui-ci.

38. Mettant en évidence les signes négatifs de a et a', nous aurons donc à considérer les intégrales de la forme

$$\int \frac{\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{(b-at^2)(b'-a't^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bb'}}\int \frac{\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{\left(1-\frac{a}{b}t^2\right)\left(1-\frac{a'}{b'}t^2\right)}}.$$

Si $\frac{a}{b}$ était égal à $\frac{a'}{b'}$, on pourrait extraire la racine carrée, et l'on n'aurait plus à intégrer qu'une fonction rationnelle. S'ils

sont inégaux, supposons, pour fixer les idées, $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ et soit $\frac{a'}{b'} = k^2 \frac{a}{b}$.

Posons

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\, t = x,$$

x désignant une nouvelle variable; l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{ab'}} \int \frac{\psi\left(\frac{bx^2}{a}\right) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{\varphi(x^2)\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

φ désignant une fonction rationnelle.

39. On voit donc qu'on peut, par une substitution réelle, transformer l'intégrale primitive en une autre intégrale analogue, mais où le polynôme X ait la forme *canonique*

$$(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

k étant une constante comprise entre 0 et 1.

Nous avons admis implicitement dans toute cette réduction que le polynôme existant sous le radical primitif avait ses coefficients réels. S'ils étaient imaginaires, on pourrait encore réduire ce polynôme à la forme

$$\left(1 - \frac{a}{b} t^2\right)\left(1 - \frac{a'}{b'} t^2\right),$$

avec d'autant plus de facilité que nous n'aurions plus à nous préoccuper, comme tout à l'heure, de conserver aux coefficients leur réalité.

Cela posé, admettons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\left|\frac{a}{b}\right| \geqq \left|\frac{a'}{b'}\right|;$$

on aura

$$\frac{a'}{b'} = k^2 \frac{a}{b},$$

k étant une constante réelle ou imaginaire, dont le module est au plus égal à 1; et si l'on pose

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,t = x,$$

l'intégrale prendra encore la forme

$$\int \frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

40. Appliquons à l'intégrale ainsi transformée les procédés de réduction exposés plus haut (n^{os} **25** à **29**). On pourra l'exprimer au moyen des quatre intégrales suivantes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Mais si l'on pose $x^2 = t$, on aura

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}},$$

intégrale exprimable par logarithmes, le radical ne portant plus que sur un polynôme du second degré.

On a d'autre part

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}(1-k^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{k^2}\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Enfin

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$+ \int \frac{a\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

La première de ces deux intégrales devient encore exprimable par logarithmes si l'on pose $x^2 = t$.

La seconde peut s'écrire

$$-\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

en posant $m = -\frac{1}{a^2}$.

Les intégrales elliptiques se ramèneront donc en fin de compte aux trois transcendantes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

auxquelles Legendre a donné le nom d'*intégrales elliptiques* de *première, deuxième* et *troisième espèce.*

La constante k, qui figure dans ces intégrales, se nomme le *module* des intégrales elliptiques considérées.

Si l'on change de variable en posant $x = \sin\varphi$, ces intégrales prendront les formes suivantes

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

III. — Intégration des fonctions transcendantes.

41. I. Soit à intégrer

$$\int f(e^{ax})\,dx,$$

f désignant une fonction rationnelle.

On rendra rationnelle la différentielle, en posant $e^{ax} = t$, d'où

$$x = \frac{1}{a}\log t, \qquad dx = \frac{dt}{at}.$$

42. II. Soit à intégrer

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

f étant une fonction rationnelle.

Cette expression est un cas particulier de la précédente, car $\sin x$ et $\cos x$ sont des fonctions rationnelles de e^{ix}.

Mais on peut rendre la différentielle rationnelle, sans introduire d'imaginaires, en posant

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = t,$$

d'où

$$x = 2\operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\tfrac{1}{2}x - \sin^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple. — Soit à intégrer

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}.$$

Posons

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

L'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)},$$

ou, en posant $x+\varphi=y$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dy}{\sin y}.$$

Posons maintenant, comme il a été expliqué,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y=t;$$

elle deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log t+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x+\varphi)+\text{const.}$$

43. On peut encore opérer comme il suit pour calculer l'intégrale $\int f(\sin x,\cos x)\,dx$.

Soit

$$f=\frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)},$$

P et Q étant des polynômes. Multipliant au numérateur et au dénominateur par les polynômes $Q(-\sin x,\cos x)$, $Q(\sin x,-\cos x)$, $Q(-\sin x,-\cos x)$, nous obtiendrons une nouvelle fraction, dont le dénominateur D sera un polynôme en $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ et dont le numérateur sera de la forme

$$N+N_1\sin x+N_2\cos x,$$

N désignant l'ensemble des termes dont le degré total en $\sin x$ et $\cos x$ est pair; quant à N_1, N_2, ce seront des polynômes en $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, comme le dénominateur.

Pour intégrer le premier terme

$$\int\frac{N}{D}dx,$$

posons

$$\operatorname{tang} x = t, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

N et P ne contenant que des termes de degré pair en $\sin x$ et $\cos x$, la différentielle sera rationnelle, et son intégrale se composera : 1° d'une partie rationnelle en

$$t = \operatorname{tang} x;$$

2° de termes logarithmiques, tels que

$$A \log(t - a) = A \log(\operatorname{tang} x - a).$$

Dans la seconde intégrale

$$\int \frac{N_1}{D} \sin x \, dx,$$

posons

$$\cos x = t, \qquad \text{d'où} \qquad \sin x \, dx = -dt;$$

$\frac{N_1}{D}$ deviendra une fonction de t^2, qui pourra être décomposée : 1° en un polynôme Π entier en t^2; 2° en une somme de fractions de la forme $\frac{A}{(t^2-a)^m}$.

L'intégration de Π donne un polynôme impair en t. Quant à la fraction $\frac{A}{(t^2-a)^m}$, si $a = 0$, son intégrale sera

$$\frac{A}{(1-2m)t^{2m-1}}.$$

Si $a \gtrless 0$ et $m > 1$, on aura en appliquant le procédé connu de réduction

$$I_m = \int \frac{A\,dt}{(t^2-a)^m} = \int \frac{-\frac{A}{a}(t^2 - a - t^2)}{(t^2-a)^m} dt$$

$$= -\frac{1}{a} I_{m-1} + \int \frac{A}{a} \tfrac{1}{2} t \frac{2t}{(t^2-a)^m} dt,$$

puis, en intégrant par parties le dernier facteur,

$$I_m = -\frac{1}{a} I_{m-1} + \frac{\frac{A}{a}\frac{1}{2}t}{1-m}\frac{1}{(t^2-a)^{m-1}} - \frac{1}{2a(1-m)} I_{m-1}.$$

L'intégrale I_m se réduira donc de proche en proche : 1° à une fraction impaire en t; 2° à un terme transcendant

$$\int \frac{B\,dt}{t^2-a} = \frac{B}{2\sqrt{a}} \log \frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}.$$

L'intégrale $\int \frac{N_1}{D} dx$ se réduit donc : 1° à une fonction rationnelle et impaire en $\cos x$; 2° à des termes de la forme

$$\frac{B}{2\sqrt{a}} \log \frac{\cos x - \sqrt{a}}{\cos x + \sqrt{a}}.$$

Enfin, dans l'intégrale

$$\int \frac{N_2}{D} \cos x \, dx,$$

nous poserons $\sin x = t$; nous aurons encore à intégrer une fonction rationnelle en t^2; et l'intégrale se composera : 1° d'une fonction rationnelle et impaire en $\sin x$; 2° de termes de la forme

$$\frac{C}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sin x - \sqrt{a}}{\sin x + \sqrt{a}}.$$

44. Si l'on voulait appliquer la substitution $\operatorname{tang} x = t$ à une fonction quelconque f rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, la nouvelle différentielle ne serait plus en général rationnelle en t, mais elle le serait en t et $\sqrt{1+t^2}$. La substitution $\sin x = t$ ou $\cos x = t$ donnerait de même une différentielle rationnelle en t et $\sqrt{1-t^2}$. On pourrait appliquer à ces expressions les méthodes de réduction ou d'intégration qui ont été exposées précédemment.

Réciproquement, toute différentielle rationnelle en t et $\sqrt{1+t^2}$ (ou en t et $\sqrt{1-t^2}$) se transformera en une diffé-

rentielle rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$ par la substitution $t = \tang x$ (ou $t = \sin x$).

45. Si la fonction $f(\sin x, \cos x)$ est entière, elle sera composée d'une somme de termes de la forme $A \sin^m x \cos^n x$. La recherche de son intégrale se ramènera donc à celle des intégrales

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

Pour calculer ces dernières, un changement de variable n'est pas nécessaire. On peut d'abord substituer à $\sin^m x$, $\cos^n x$ leurs expressions en sinus et cosinus des multiples de x. On obtiendra ainsi une somme de termes de l'une des formes

$$A \sin \lambda x \sin \mu x = \frac{A}{2} [\cos(\lambda - \mu) x - \cos(\lambda + \mu) x],$$

$$A \sin \lambda x \cos \mu x = \frac{A}{2} [\sin(\lambda + \mu) x + \sin(\lambda - \mu) x],$$

$$A \cos \lambda x \cos \mu x = \frac{A}{2} [\cos(\lambda - \mu) x + \cos(\lambda + \mu) x].$$

Chacun des termes ainsi obtenus est immédiatement intégrable.

46. Un autre procédé pour la détermination de ces intégrales consiste dans l'emploi des formules de réduction que nous allons établir. Nous supposerons m et n pairs, car, si l'un d'eux était impair, la substitution $\sin x = t$ ou $\cos x = t$ transformerait immédiatement la fonction à intégrer en un polynôme entier.

Cherchons donc à réduire les intégrales de la forme

$$I_{mn} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx.$$

On a

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m-1} x \cos^{2n} x \sin x \, dx$$

et, en intégrant par parties,

$$I_{m,n} = -\sin^{2m-1} x \frac{\cos^{2n+1} x}{2n+1} + \frac{2m-1}{2n+1} \int \sin^{2m-2} x \cos^{2n+2} x \, dx.$$

Mais, d'autre part,

$$\int \sin^{2m-2}x \cos^{2n+2}x\,dx = \int \sin^{2m-2}x \cos^{2n}x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= \mathrm{I}_{m-1,n} - \mathrm{I}_{m,n}.$$

Substituant dans l'équation précédente, on aura une formule de réduction ramenant l'intégrale $\mathrm{I}_{m,n}$ à l'intégrale $\mathrm{I}_{m-1,n}$. Celle-ci se ramènera de même à $\mathrm{I}_{m-2,n}$, et ainsi de suite.

Écrivons, d'autre part,

$$\mathrm{I}_{m,n} = \int \cos^{2n-1}x \sin^{2m}x \cos x\,dx,$$

et intégrons par parties; on trouvera d'une manière analogue une formule de réduction pour ramener $\mathrm{I}_{m,n}$ à $\mathrm{I}_{m,n-1}$, puis celle-ci à $\mathrm{I}_{m,n-2}$, ...

Par ces deux procédés de réduction, on sera finalement conduit à l'intégrale

$$\mathrm{I}_{0,0} = \int dx = x + \text{const.}$$

47. III. Soit à calculer

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, \sin\alpha x, \cos\alpha x, \sin\beta x, \cos\beta x, \ldots)\,dx,$$

f désignant une fonction entière.

Remplaçons les sinus et cosinus par leurs valeurs en exponentielles

$$\sin\alpha x = \frac{e^{\alpha i x} - e^{-\alpha i x}}{2i}, \qquad \cos\alpha x = \frac{e^{\alpha i x} + e^{-\alpha i x}}{2},$$

f deviendra une fonction entière de x, e^{ax}, ..., $e^{\alpha i x}$, $e^{-\alpha i x}$, ..., et sera composée d'une somme de termes de la forme

$$\mathrm{A}\,x^m e^{nx}.$$

Nous aurons donc à calculer l'intégrale

$$\int x^m e^{nx}\,dx,$$

que nous désignerons par I_m.

L'intégration par parties donne

$$I_m = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\int x^{m-1} e^{nx}\,dx = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n} I_{m-1}.$$

Répétant la réduction, on arrivera à l'intégrale

$$I_0 = \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n}.$$

L'intégration faite, il conviendra de remplacer les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus; les imaginaires disparaîtront alors de l'intégrale.

48. IV. Soit à calculer

$$\int f(x) e^{nx}\,dx,$$

$f(x)$ étant une fraction rationnelle.

Cette fraction pourra se décomposer en une partie entière E et en fractions simples de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^m}.$$

L'intégrale $\int E e^{nx}\,dx$ s'obtient par la méthode qui vient d'être exposée.

Restent les intégrales de la forme

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx.$$

Si $m > 1$, l'intégration par parties donnera

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx$$
$$= e^{nx}\frac{1}{(-m+1)(x-a)^{m-1}} - \frac{n}{-m+1}\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^{m-1}}\,dx.$$

Cette formule de réduction permet de ramener le calcul de l'intégrale cherchée à celui de l'intégrale

$$\int \frac{e^{nx}}{x-a}\,dx.$$

Posons

$$x = a + \frac{t}{n};$$

d'où

$$dx = \frac{dt}{n}.$$

Cette intégrale devient

$$\int \frac{e^{an+t}}{t}\,dt = e^{an}\int \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Toute la question est donc ramenée au calcul de la transcendante unique

$$\int \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Posant enfin $e^t = y$, cette intégrale se transformera en

$$\int \frac{dy}{\log y}.$$

Cette transcendante (où l'on déterminera la constante d'intégration de telle sorte qu'elle s'annule pour $y = 0$) se nomme le *logarithme intégral* de y.

49. V. Les intégrales

$$\int f(x, \log x)\,dx \quad \text{et} \quad \int f(x, \arcsin x)\,dx,$$

où f désigne une fonction entière, se ramènent à celles qui viennent d'être étudiées, en prenant respectivement $\log x$, $\arcsin x$ pour nouvelle variable.

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Intégrales définies généralisées.

50. Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, intégrable dans un intervalle AB. Soient a et b deux points quelconques de cet intervalle. Nous avons défini, au Tome I, l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cette intégrale satisfait à la relation

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Nous avons vu, en outre, que c'est une fonction continue de a et de b. On aura donc (en supposant, pour fixer les idées, $b > a$)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon} f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent de donner un sens au symbole

$\int_a^b f(x)\,dx$ dans certains cas où la définition ordinaire par une limite de sommes cesserait d'être applicable.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$, sans être intégrable entre a et b, le soit entre $a+\varepsilon$ et b, quelque petit que soit ε (ce qui arrivera notamment si elle est continue entre a et b, mais tend vers ∞ lorsque x tend vers la limite inférieure a). L'expression

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

aura pour chaque valeur de ε une valeur déterminée. Si, lorsque ε tend vers zéro, elle tend vers une limite fixe, nous prendrons cette limite pour définition de l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

De même, si la fonction $f(x)$ devient infinie (ou plus généralement cesse d'être intégrable) aux environs de la limite supérieure b, ou à la fois aux environs des deux limites, nous définirons $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'équation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

ou par celle-ci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

en supposant, bien entendu, que les seconds membres tendent effectivement vers des limites déterminées.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la différence

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} - \int_{a+\eta}^{b-\eta'} = \int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} + \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'}$$

tende vers zéro en même temps que les infiniment petits ε, η, ε', η', quels que soient les rapports de ces derniers.

51. Il existe un cas important où cette discussion sera facile. Supposons que, à la limite inférieure a, $f(x)$ devienne infinie d'ordre α. On pourra poser

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha},$$

$\varphi(x)$ tendant, lorsque x tend vers a, vers une limite L différente de zéro.

Le facteur $(x-a)^\alpha$ restant positif entre $a+\varepsilon$ et $a+\eta$, le théorème de la moyenne donnera

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} f(x)\,dx = \lambda \int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

λ étant une quantité intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\varphi(x)$ entre $a+\varepsilon$ et $a+\eta$. Si ε et η tendent vers zéro, λ se rapprochera de L qui n'est ni nul ni infini. Il suffira donc de discuter le second facteur, dont l'intégration s'effectue aisément. Si $\alpha \gtrless 1$, l'intégrale sera

$$\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^{a+\eta} = \frac{\eta^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

expression qui tendra vers zéro si $\alpha < 1$, et qui, au contraire, sera indéterminée si $\alpha > 1$; car les deux termes dont elle se compose sont infinis séparément, sans avoir entre eux aucune relation.

Si $\alpha = 1$, l'intégrale sera

$$[\operatorname{Log}(x-a)]_{a+\varepsilon}^{a+\eta} = \operatorname{Log}\eta - \operatorname{Log}\varepsilon$$

et sera indéterminée.

Donc, *pour que l'intégrale* $\int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} f(x)\,dx$ *tende vers zéro, il faut et il suffit que l'ordre d'infinitude* α *de la fonction* $f(x)$ *pour* $x = a$ *soit* < 1.

Supposons, d'autre part, que $f(x)$ devienne infini d'ordre β

pour l'autre limite $z = b$. On aura de même

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-b)^\beta},$$

$\psi(x)$ tendant vers une limite M finie et différente de zéro quand x tend vers b. Il viendra ensuite

$$\int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = (-1)^\beta \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{\psi(x)\,dx}{(b-x)^\beta}$$
$$= (-1)^\beta \mu \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{(b-x)^\beta},$$

μ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\psi(x)$ et, par suite, tendant vers M quand ε' et η' tendent vers zéro. Quant à l'intégrale

$$\int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{(b-x)^\beta},$$

elle est égale à

$$\frac{\eta'^{1-\beta} - \varepsilon'^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad \text{si} \quad \beta \gtrless 1,$$

à

$$\log \eta' - \log \varepsilon', \quad \text{si} \quad \beta = 1,$$

et pour qu'elle tende vers zéro, il faut et il suffit qu'on ait $\beta < 1$.

Ce résultat est le même que l'on a déjà trouvé pour la limite inférieure.

52. Supposons plus généralement que $f(x)$ reste intégrable dans tout le champ ab, sauf aux environs de certains points $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en nombre limité. Nous définirons $\int_a^b$ par l'équation

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_n}^b$$
$$= \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_a^{c_1 - \varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon'_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0} \int_{c_1 + \varepsilon'_1}^{c_2 - \varepsilon_2} + \ldots + \lim_{\varepsilon'_n = 0} \int_{c_n + \varepsilon'_n}^b.$$

Cette définition n'a de sens précis que si les limites en question existent, en considérant ε_1, ε'_1, ε_2, ε'_2, ... comme des infiniment petits indépendants.

Il peut arriver, lors même que ces limites n'existent pas en général, que le second membre ait cependant une limite déterminée dans l'hypothèse particulière où l'on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon'_2, \qquad \dots, \qquad \varepsilon_n = \varepsilon'_n.$$

Cette limite a été nommée par Cauchy la *valeur principale* de l'intégrale $\int_a^b$. On pourra, dans certains cas, avoir intérêt à introduire cette valeur principale dans les calculs, lorsque l'intégrale elle-même, ne représentant rien de déterminé, ne pourra y figurer.

53. Supposons enfin que les points c_1, c_2, ... soient en nombre infini. Ils formeront dans tous les cas un ensemble parfait. En effet, si la fonction f est intégrable aux environs d'un point x, c'est-à-dire dans l'intervalle de $x - h$ à $x + h$ (h étant convenablement choisi), elle le sera *a fortiori* dans toute portion de cet intervalle. Si donc ξ désigne un point quelconque compris entre $x - h$ et $x + h$, elle sera intégrable aux environs du point ξ. Donc, le point x ne peut être un point limite de l'ensemble c_1, c_2, ... Donc, tout point limite de cet ensemble lui appartient nécessairement.

Cela posé, décomposons le champ ab en intervalles partiels, de longueur moindre qu'une quantité infiniment petite δ. Considérons ceux de ces intervalles qui ne contiennent ni à leur intérieur, ni à leurs extrémités, aucun des points singuliers c_1, c_2, ... Ils forment par leur réunion un domaine jouissant des propriétés suivantes :

1° Il contient tous les points de l'intervalle ab dont l'écart à l'ensemble $(c_1, c_2, \dots)$ est égal ou supérieur à δ;

2° Il est formé d'un nombre fini de portions $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... d'un seul tenant, séparées les unes des autres par des points singuliers.

Soit D un domaine quelconque satisfaisant à ces deux conditions. On pourra déterminer les intégrales

$$\int_{a_1}^{b_1} f\,dx, \quad \int_{a_2}^{b_2} f\,dx, \quad \ldots$$

et leur somme représentera la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{D}} f\,dx = \sum \int_{a_i}^{b_i} f\,dx$$

prise dans le domaine D.

Supposons maintenant que δ décroisse indéfiniment. Le domaine variable D englobera progressivement tous les points de l'intervalle ab qui ne sont pas singuliers. Car l'écart de chacun d'eux à l'ensemble $(c_1, c_2, \ldots)$ est une quantité déterminée h différente de zéro. Il appartiendra donc nécessairement à D dès que δ sera devenu $< h$.

Si l'intégrale $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$ tend dans ces conditions vers une limite déterminée, nous la désignerons par $\int_a^b f\,dx$. Cette définition comprend évidemment celle que nous avons donnée ci-dessus pour des cas particuliers.

54. Pour que cette limite existe, il faut et il suffit évidemment qu'on puisse trouver pour chaque valeur de ε une quantité correspondante η, telle que, en appelant D et D_1 deux domaines quelconques correspondant à des valeurs de la variable δ moindres que η, on ait toujours

$$\left| \int_{\mathrm{D}_1} f\,dx - \int_{\mathrm{D}} f\,dx \right| < \varepsilon.$$

Soit donc Δ un domaine quelconque contenant D et formé comme lui de parties d'un seul tenant séparées par des points singuliers ; il satisfait aux mêmes conditions que D, pour la même valeur de δ ; on aura donc comme cas particu-

lier de l'inégalité précédente

$$\left|\int_{\Delta} f\,dx - \int_{D} f\,dx\right| < \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité suffit d'ailleurs pour l'existence de la limite cherchée; car, si elle est satisfaite, prenons pour Δ le domaine Δ_1 formé par les points de l'intervalle ab qui appartiennent à D ou à D_1 ou qui sont situés entre un point de D et un point de D_1 sans en être séparés par un point singulier; nous aurons

$$\left|\int_{\Delta_1} - \int_{D}\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{\Delta_1} - \int_{D_1}\right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\int_{D_1} - \int_{D}\right| < 2\varepsilon,$$

quantité infiniment petite.

55. Le domaine $\Delta - D$ est formé d'un certain nombre de portions d'un seul tenant $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ...; et l'on aura

$$\left|\int_{\Delta} - \int_{D}\right| = \left|\sum \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f\,dx\right| \leqq \sum \left|\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f\,dx\right| \leqq \sum \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f|\,dx.$$

Cette dernière somme pourra être rendue moindre que ε, si $|f|$ admet entre a et b une intégrale finie (et par suite déterminée; car $|f|$ étant positif, son intégrale ne peut que croître avec l'étendue du champ).

Donc $\int_a^b f\,dx$ *sera toujours déterminée* si $\int_a^b |f|\,dx$ *est finie*. De plus, on aura

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Car cette inégalité a lieu pour chacun des intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... qui constituent le domaine D. Ajoutant ces inéga-

lités, il vient

$$\left|\int_D f(x)\,dx\right| = \left|\sum\int_{a_i}^{b_i} f\,dx\right| \overline{\overline{<}} \sum\left|\int_{a_i}^{b_i} f\,dx\right|$$
$$\overline{\overline{<}} \sum\int_{a_i}^{b_i} |f|\,dx \overline{\overline{<}} \int_D |f|\,dx.$$

et, en passant à la limite, on obtiendra la relation cherchée.

Nous pourrons dire, par analogie avec une dénomination adoptée dans la théorie des séries, que l'intégrale

$$\int_a^b f\,dx$$

(supposée déterminée), est *absolument convergente,* si l'intégrale

$$\int_a^b |f|\,dx,$$

est finie; *semi-convergente* dans le cas contraire.

56. Par analogie avec ce qui précède, nous définirons les symboles

$$\int_a^\infty f\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f\,dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f\,dx,$$

par les équations

$$\int_a^\infty = \lim_{b=\infty}\int_a^b, \qquad \int_{-\infty}^b = \lim_{a=-\infty}\int_a^b, \qquad \int_{-\infty}^\infty = \lim_{\substack{a=-\infty\\ b=\infty}}\int_a^b,$$

à condition que les seconds membres aient des limites déterminées.

Pour cela, il faut et il suffit évidemment que la différence

$$\int_a^{b'} - \int_a^b = \int_b^{b'},$$

ou la différence analogue $\int_a^{a'}$, ou enfin toutes deux à la fois,

tendent vers zéro, lorsque b et b' tendent vers $+\infty$, et a, a' vers $-\infty$.

Comme on a

$$\left|\int_b^{b'} f\,dx\right| \overline{\overline{<}} \int_b^{b'} |f|\,dx, \qquad \left|\int_a^{a'} f\,dx\right| \overline{\overline{<}} \int_a^{a'} |f|\,dx,$$

on voit que l'intégrale de f dans un champ infini sera encore déterminée toutes les fois que l'intégrale de $|f|$ dans le même champ sera finie, et que son module ne pourra surpasser cette dernière intégrale.

On dira encore dans ce cas que l'intégrale est absolument convergente; elle sera semi-convergente, si elle reste déterminée, sans que l'intégrale de $|f|$ soit finie. Nous donnerons plus loin un exemple de ce genre.

Enfin nous appellerons *valeur principale* de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ l'expression

$$\lim_{b=\infty} \int_{-b}^{b},$$

laquelle se confond évidemment avec l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ si celle-ci a un sens précis, mais qui peut être déterminée sans que cette dernière le soit.

57. Il existe ici encore un cas très général où l'on peut reconnaître si l'intégrale est ou non déterminée.

Supposons que, pour $x=+\infty$, $f(x)$ soit un infiniment petit d'un ordre déterminé α, de telle sorte qu'on ait

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha},$$

$\varphi(x)$ tendant vers une limite fixe L, finie et différente de zéro quand x tend vers $+\infty$. On aura

$$\int_{b'}^{b} f(x)\,dx = \int_{b'}^{b} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha} = \lambda \int_{b'}^{b} \frac{dx}{x^\alpha},$$

λ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\varphi(x)$ dans le champ d'intégration, et tendant vers L lorsque b et b' croissent indéfiniment. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{b'}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} &= \frac{b^{1-\alpha} - b'^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \qquad \text{si } \alpha \gtrless 1,\\ &= \log b - \log b', \qquad \text{si } \alpha = 1;\end{aligned}$$

pour b et b' infinis, cette expression tendra vers zéro si $\alpha > 1$; elle sera indéterminée si $\alpha \leqq 1$. Donc, *pour qu'on puisse étendre le champ d'intégration jusqu'à l'infini positif sans que l'intégrale cesse d'être finie et déterminée, il faut et il suffit que, pour $x = +\infty$, $f(x)$ soit infiniment petit d'ordre > 1.*

On arriverait évidemment au même résultat pour l'infini négatif.

58. Nous avons établi au Tome I un certain nombre de propriétés des intégrales définies, fondées sur leur définition comme limites de sommes.

Il est essentiel de reconnaître jusqu'à quel point ces propositions subsistent pour les nouvelles intégrales que nous venons de définir.

1° Les relations (1) et (2) subsistent évidemment, puisqu'elles sont le point de départ de nos généralisations.

2° Il en est de même de la formule

$$(3) \qquad \int_a^b = -\int_b^a.$$

En effet, l'intervalle ab étant d'abord supposé fini, décomposons-le, comme il a été expliqué, en intervalles partiels infiniment petits; on aura, pour tout intervalle $a_k b_k$, qui ne contient aucun des points singuliers $c, c_1, \ldots,$

$$\int_{a_k}^{b_k} = -\int_{b_k}^{a_k}.$$

Sommant les équations ainsi obtenues et passant à la limite, il viendra

$$\int_a^b = -\int_b^a.$$

Cette formule, étant ainsi démontrée pour des valeurs finies quelconques de a et de b, subsistera encore à la limite, si l'on fait tendre vers l'infini a ou b, ou tous les deux à la fois.

Nous avons encore trouvé (t. I, n° 55) les résultats suivants.

3° Si l'on a

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots,$$

C_1, C_2, ... étant des constantes et $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... des fonctions intégrables, on en déduit

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots.$$

4° Si $f(x) \leqq f_1(x)$ les deux fonctions étant intégrables, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Soient, par suite, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions intégrables dont la première reste positive dans tout l'intervalle ab, tandis que la seconde reste comprise entre deux nombres fixes M et m. En supposant, pour fixer les idées, $M > m$ et $b > a$, on aura

$$(5) \qquad m \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq M \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

et, par suite,

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

μ étant intermédiaire entre M et m.

On voit, par un raisonnement identique au précédent, que ces relations subsistent encore pour nos intégrales généralisées.

59. Si $F(x)$ est une fonction primitive de la fonction $f(x)$, intégrable de a à b, on a (t. I, n° 82)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

L'extension de cette formule au cas actuel réclame plus d'attention.

Remarquons tout d'abord que, x désignant un point quelconque de l'intervalle ab, on a

$$\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b.$$

Les deux intégrales qui figurent au second membre de cette formule, pouvant être calculées indépendamment l'une de l'autre, doivent être finies et déterminées pour que $\int_a^b$ le soit. L'intégrale $\int_a^x$ représente donc une fonction de x, définie dans tout l'intervalle ab. Cette fonction est d'ailleurs continue, car, si ε est un infiniment petit positif, on a par définition

$$\lim \int_a^{x-} = \int_a^x,$$

et, d'autre part,

$$\lim \int_a^{x+\varepsilon} = \lim \left[\int_a^b - \int_{x+\varepsilon}^b\right] = \int_a^b - \int_x^b = \int_a^x.$$

Enfin on sait que, pour toute valeur de x pour laquelle $f(x)$ est continue, cette intégrale a pour dérivée $f(x)$ (t. I, n° 81).

Supposons maintenant que $f(x)$ soit continue dans tout le champ ab, sauf en certains points isolés $c_1, \ldots, c_n$. Soit

$F(x)$ une fonction primitive, qui jouisse de la même propriété que $\int_a^x$, à savoir d'avoir une dérivée égale à $f(x)$ dans tout le champ, sauf peut-être aux points $c_1, \ldots, c_n$. La différence

$$F(x) - \int_a^x,$$

ayant sa dérivée constamment nulle dans l'intérieur de chacun des intervalles $ac_1, c_1 c_2, \ldots, c_n b$ s'y réduira à une constante; mais cette constante pourra varier d'un intervalle à l'autre. Soient $k, k_1, \ldots, k_n$ ses diverses valeurs. On aura

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx + k = k,$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + k_n,$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - (k_n - k).$$

Le terme complémentaire $k_n - k$ n'est autre chose que la somme des discontinuités que la fonction $F(x)$ présente aux points $c_1, \ldots, c_n$. On a, en effet,

$$k_n - k = (k_n - k_{n-1}) + \ldots + (k_1 - k).$$

Or la discontinuité de $F(x)$ au point c_i est par définition l'expression

$$\lim[F(c_i + \varepsilon') - F(c_i - \varepsilon)] = \lim\left[\int_a^{c_i+\varepsilon'} + k_i - \int_a^{c_i-\varepsilon} - k_{i-1}\right],$$

et se réduit à $k_i - k_{i-1}$, puisque l'intégrale est une fonction continue.

D'ailleurs $F(x)$, ayant une dérivée en tout point autre que $c_1, \ldots, c_n$, y sera continue.

Nous aurons donc finalement

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Delta,$$

Δ désignant la discontinuité totale de la fonction $F(x)$ dans l'intervalle de a à b.

Un passage à la limite permettra d'étendre cette relation au cas où le champ est infini.

60. La règle pour l'intégration par parties est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Soient, en effet, $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions telles que $f(x)\varphi'(x)$ et $f'(x)\varphi(x)$ soient continues entre a et b, sauf en des points isolés. La somme

$$f(x)\varphi'(x)+f'(x)\varphi(x)$$

étant la dérivée de $f(x)\varphi(x)$, on aura, en appliquant la formule ci-dessus,

$$(7)\qquad \int_a^b [f(x)\varphi'(x)+f'(x)\varphi(x)]\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \Delta,$$

Δ désignant la somme des discontinuités de $f(x)\varphi(x)$.

Si donc l'une des intégrales

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx,\qquad \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx$$

a une valeur déterminée, et s'il en est de même du second membre de l'équation, l'autre intégrale sera également déterminée, et pourra se calculer par cette formule.

L'équation (7) subsistera d'ailleurs à la limite, si a ou b tendent vers ∞.

61. Nous avons vu que, si $\varphi(t)$ est une fonction quelconque, dont la dérivée reste continue et différente de zéro dans l'intervalle de t_0 à T, on a, en supposant

$$x=\varphi(t),$$

la relation

$$(8)\qquad \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Supposons maintenant que $\varphi'(t)$ devienne nulle ou discontinue, mais seulement à l'une des deux limites du champ, en T, par exemple. On pourra appliquer le théorème dans l'intervalle de t_0 à $T-\varepsilon$. Il viendra

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T-\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T-\varepsilon} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Faisons tendre ε vers séro. Si la fonction $\varphi(t)$ reste continue au point T, $\varphi(T-\varepsilon)$ tendra vers $\varphi(T)$ et l'on obtiendra la formule (8).

Si $\varphi(T-\varepsilon)$ tendait vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, cette formule subsisterait encore, en y remplaçant $\varphi(T)$ par $+\infty$ ou par $-\infty$.

Si nous admettons enfin que la fonction $\varphi'(t)$ reste continue et de même signe dans tout l'intervalle de T à $+\infty$, par exemple, on pourra, sans que la formule cesse de subsister, y faire croître indéfiniment la quantité T; $\varphi(T)$, variant toujours dans le même sens, tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie; en la désignant par $\varphi(\infty)$, on voit que la formule subsiste encore pour $T=\infty$.

Supposons, en dernier lieu, que la dérivée $\varphi'(t)$ soit nulle ou discontinue en des points isolés c_1, c_2, ... situés dans le champ d'intégration. On devra, pour opérer en toute sécurité, décomposer le champ ab en intervalles partiels ac_1, c_1c_2, ..., dans chacun desquels on pourra appliquer la formule précédente, car $f'(t)$ n'y devient nulle ou discontinue qu'aux limites du champ.

62. Soit, comme exemple, à transformer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

par le changement de variable

$$x=\frac{1}{t}.$$

Si a et b sont de même signe, lorsque x varie de a à b, t varie de $\frac{1}{a}$ à $\frac{1}{b}$; et la dérivée $\frac{dx}{dt}$ restera continue et différente de zéro. On aura donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{-f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t^2}.$$

Mais cette formule serait inexacte si a et b étaient de signe contraire; car x passe par la valeur zéro, pour laquelle $\frac{dx}{dt}$ s'annule. On devra donc décomposer l'intégrale $\int_a^b$ dans les deux suivantes

$$\int_a^0 + \int_0^b,$$

qu'on transformera séparément.

Soit, par exemple, $a < 0$, $b > 0$. Lorsque x varie de a à 0, t varie de $\frac{1}{a}$ à $-\infty$; quand x varie de 0 à b, t varie de $+\infty$ à $\frac{1}{b}$. La véritable formule de transformation sera donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int_{\frac{1}{a}}^{-\infty} + \int_{+\infty}^{b}\right] \frac{-f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t^2}.$$

63. Soit encore à transformer l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin^m x\,dx$$

par la substitution

$$x = \text{arc}\sin t.$$

La dérivée de arc sin t est égale à

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Elle devient infinie pour $x = \frac{\pi}{2}$. On devra donc décomposer l'intégrale dans les deux suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}.$$

Dans la première, t varie de 0 à 1, $\cos x$ est positif; l'intégrale transformée sera donc

$$\int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

le radical étant pris positivement.

Dans la seconde, t varie de 1 à 0, et $\cos x$ est négatif; elle a donc pour transformée

$$\int_1^0 \frac{t^m\,dt}{-\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ajoutant les résultats trouvés, il viendra

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\,dx = 2\int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

64. Le théorème établi (t. I, n° 329) pour l'intégration des séries peut être généralisé comme il suit.

Soit

$$S = u_1 + u_2 + \dots$$

une série dont les termes sont des fonctions de x, admettant des intégrales déterminées dans l'intervalle de a à b (ces limites pouvant être infinies). Si le reste R_n, négligé en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme de la série, peut se mettre sous la forme

$$R_n = \varepsilon_n \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction positive de x, dont l'intégrale entre a et b soit finie, et ε_n un facteur qui tend uniformément

vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on aura

$$(9)\qquad \int_a^b \mathrm{S}\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots.$$

On a, en effet,

$$\int_a^b \mathrm{S}\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b \mathrm{R}_n\,dx.$$

Il suffit donc de montrer que le terme complémentaire

$$\int_a^b \mathrm{R}_n\,dx = \int_a^b \varepsilon_n\,\varphi(x)\,dx$$

tend vers zéro quand n tend vers ∞. Or on peut prendre n assez grand pour que dans tout le champ $|\varepsilon_n|$ soit constamment moindre qu'une quantité ε d'une petitesse arbitraire, et le théorème de la moyenne donnera

$$\left|\int_a^b \varepsilon_n\,\varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro.

65. Soient a, A, b, B des constantes finies; $f(x,y)$ une fonction des deux variables x, y, continue dans le rectangle R formé par les droites $x=a$, $x=\mathrm{A}$, $y=b$, $y=\mathrm{B}$. On aura (t. I, n° 58) l'égalité

$$(10)\qquad \int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f\,dy = \int_a^{\mathrm{A}} dx \int_b^{\mathrm{B}} f\,dy.$$

Car les deux membres de cette égalité ne sont que deux expressions différentes de l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy.$$

Mais si l'une des limites a, A, b, B devenait infinie, ou si $f(x,y)$ cessait d'être continue dans tout le champ d'in-

tégration, la démonstration précédente n'étant plus applicable, l'égalité (10) pourrait cesser d'être exacte, ainsi que le montrent les exemples suivants.

66. Posons

$$V = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}, \qquad \frac{d^2V}{\partial x\,\partial y} = f(x, y),$$

$$a = b = 0, \qquad A = B = 1.$$

On aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = [\text{Arc tang}\,y]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x\,dy}\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{-dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

67. Considérons en second lieu la fonction

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L,$$

A, B, ..., K, L étant des constantes, que nous supposerons réelles pour plus de simplicité.

Posons

$$x = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

La fonction prendra la forme

$$P + Qi,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = A\rho^m \cos m\varphi + B\rho^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + K\rho\cos\varphi + L,$$
$$Q = A\rho^m \sin m\varphi + B\rho^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + K\rho\sin\varphi.$$

Posons

$$V = \text{arc tang}\,\frac{P}{Q}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial \rho} - P\frac{\partial Q}{\partial \rho}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial \varphi} - P\frac{\partial Q}{\partial \varphi}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi} = \frac{M}{(P^2 + Q^2)^2},$$

M désignant une fonction entière de ρ et des sinus et cosinus des multiples de φ.

Nous allons démontrer que, en désignant par R une quantité suffisamment grande, les deux intégrales

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}\, d\varphi$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}\, d\rho$$

n'auront pas la même valeur.

La première intégrale est égale à

$$\int_0^R d\rho \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_0^{2\pi} = 0,$$

car, $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ reprenant, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, la même valeur, la quantité à intégrer est nulle.

La seconde intégrale a pour valeur

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0^R.$$

Or, pour $\rho = 0$, on a $Q = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$, d'où $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$.

Pour $\rho = R$, on aura, en n'écrivant que les termes du degré

le plus élevé en R,

$$P = AR^m \cos m\varphi + \ldots,$$
$$Q = AR^m \sin m\varphi + \ldots;$$
$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -\, mAR^m \sin m\varphi + \ldots,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \quad mAR^m \cos m\varphi + \ldots;$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{-\, mA^2R^{2m} + \ldots}{A^2R^{2m} + \ldots} = -\, m + \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite, quand R est très grand.

La seconde intégrale aura donc pour valeur

$$\int_0^{2\pi} d\varphi(-\, m + \varepsilon)$$

ou sensiblement

$$\int_0^{2\pi} -\, m\, d\varphi = -\, 2m\pi,$$

quantité différente de zéro.

Les deux intégrales que nous venons de calculer ayant une valeur différente, il faut nécessairement que la fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}$ soit discontinue dans le champ de l'intégration. Mais elle est égale à $\frac{M}{(P^2+Q^2)^2}$, où M, P, Q sont des fonctions évidemment continues. Elle ne peut donc devenir discontinue que si son dénominateur s'annule. Il existe donc un système de valeurs de ρ et de φ qui annule à la fois P et Q. Donc il existe une valeur $\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ de la variable x qui annule le polynôme $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L$.

Nous avons ainsi démontré à nouveau cette proposition fondamentale de la théorie des équations, que *toute équation algébrique a une racine*.

68. Il est utile d'assigner un ensemble de conditions suf-

fisantes pour qu'on puisse opérer avec sûreté le renversement de l'ordre de deux intégrations successives.

Supposons d'abord a, A, b, B finis et admettons :

1° Que les points c du champ pour lesquels la fonction f cesse d'être continue soient tous situés sur un nombre limité d'arcs de courbe continus $P_1 Q_1, \ldots, P_n Q_n$ sur chacun desquels x d'une part, et y de l'autre, aillent constamment en croissant ou constamment en décroissant;

2° Que l'intégrale $\int_x^{x+\lambda} f\,dx$, prise suivant un segment d'une parallèle aux x, situé d'une manière quelconque dans le champ, et dont la longueur λ ne surpasse pas un nombre fixe l, ait toujours une valeur déterminée, dont le module soit constamment inférieur à une quantité ε_l, ne dépendant que de l et tendant vers zéro avec lui;

3° Que l'intégrale analogue $\int_y^{y+\lambda} f\,dy$, prise suivant une parallèle aux y, ait de même une valeur déterminée, de module moindre qu'une quantité ε'_l analogue à ε_l.

Dans ces conditions, nous allons montrer : 1° que les intégrales

$$\int_b^{\text{B}} dy \int_a^{\text{A}} f\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^{\text{A}} dx \int_b^{\text{B}} f\,dy$$

ont des valeurs finies et déterminées; 2° qu'elles sont égales.

Remarquons d'abord que, sur chacun des arcs PQ, x est une fonction continue de y, toujours croissante ou toujours décroissante, et réciproquement. Les points de cet arc compris dans la bande limitée par deux parallèles y et $y+dy$ à l'axe des x infiniment voisines l'une de l'autre auront donc des abscisses infiniment peu différentes; et si nous supposons $dy < \delta$, δ désignant un infiniment petit, ils seront tous contenus à l'intérieur d'un rectangle r de hauteur dy et de longueur moindre que l, l étant une quantité que nous pourrons faire décroître à volonté en même temps que δ.

Chacun des n arcs $P_1 Q_1, \ldots, P_n Q_n$ donnera lieu à un semblable rectangle (si toutefois il rencontre la bande de hauteur dy que nous considérons). Si deux des rectangles ainsi formés empiètent l'un sur l'autre, ou sont contigus, nous les réunirons en un rectangle unique dont la longueur sera moindre que $2l$. Continuant ainsi, on voit que tous les points des arcs $P_1 Q_1, \ldots, P_n Q_n$ contenus dans la bande seront intérieurs à des rectangles $r_1, r_2, \ldots$ dont le nombre m est au plus égal à n, et tels que la somme de leurs longueurs soit moindre que nl.

On en conclut que l'intégrale

$$\int_a^A f(x, y)\, dx$$

est une fonction continue de y. En effet, elle se compose :

1° De m intégrales prises suivant les segments de la droite d'intégration renfermés dans les rectangles $r_1, \ldots, r_m$. Le module de chacune d'elles sera $< \varepsilon_{nl}$, et il en sera de même pour les modules des portions correspondantes de l'intégrale

$$\int_a^A f(x, y + dy)\, dx.$$

2° Des $m + 1$ intégrales prises suivant les segments de la droite d'intégration extérieurs aux rectangles. Celles-ci seront des fonctions continues de y puisque $f(x, y)$ est continue en dehors des rectangles. Le module de l'accroissement de chacune d'elles, lorsque y sera changé en $y + dy$, sera donc moindre qu'une quantité arbitraire ε, si dy est assez petit.

On aura donc

$$\left| \int_a^A f(x, y + dy)\, dx - \int_a^A f(x, y)\, dx \right| < 2m\varepsilon_{nl} + (m + 1)\varepsilon.$$

Or, si l'on fait décroître indéfiniment dy, on pourra faire décroître en même temps ε, δ et, par suite, l, ε_{nl}; notre proposition est donc établie.

L'expression

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx,$$

intégrale d'une fonction continue de y, sera finie et déterminée.

La même démonstration s'appliquerait évidemment à l'intégrale

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy.$$

Il reste à prouver que ces intégrales sont égales.

69. Pour cela, décomposons le champ d'intégration par des parallèles aux axes coordonnés en rectangles élémentaires de côté moindre que δ. Désignons généralement par e ceux de ces rectangles qui n'ont aucun point commun avec les arcs PQ; par e' les autres, qui rencontrent au moins l'un de ces arcs.

L'intégrale

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx$$

est évidemment une somme d'intégrales analogues ayant respectivement pour champ les divers éléments e et e'. D'ailleurs dans les éléments e, où la fonction f reste continue, l'intégrale double $\mathrm{S} f\,dx\,dy$ existe et représente la valeur de $\int dy \int f\,dx$; on aura donc

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx = \sum_e \mathrm{S} f\,dx\,dy + \sum_{e'} \int dy \int f\,dx.$$

Nous allons montrer que le dernier terme de cette égalité tend vers zéro en même temps que δ.

Soient en effet e'_k ceux des éléments e' qui sont compris entre deux parallèles aux x consécutives, y_k et $y_k + dy_k$. Ceux de ces éléments e'_k qui rencontrent un même arc PQ

seront contigus, et leur réunion fournira un rectangle ρ entièrement contenu, si les parallèles aux y sont suffisamment rapprochées, dans le rectangle r de longueur λ moindre que l qui, d'après le numéro précédent, contient à son intérieur tous les points communs à PQ et à la bande considérée. A chacun des arcs $P_1Q_1, \ldots, P_nQ_n$ qui rencontrent la bande correspond ainsi un rectangle ρ. Réunissant encore en un seul ceux de ces rectangles qui seraient contigus ou empiéteraient les uns sur les autres, on voit que les éléments e'_k se groupent en rectangles $\rho_1, \rho_2, \ldots$ en nombre au plus égal à n et tels que la somme de leurs longueurs soit moindre que nl.

La somme des intégrales $\int dy \int f\,dx$ relative aux éléments e'_k est évidemment égale à la somme des mêmes intégrales relatives aux divers rectangles $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Or, pour chacun de ceux-ci, l'intégrale $\int f\,dx$ ayant son module moindre que ε_{nl}, celui de l'intégrale $\int dy \int f\,dx$ sera moindre que

$$\int_{y_k}^{y_k+dy_k} \varepsilon_{nl}\,dy = \varepsilon_{nl}\,dy_k.$$

On a donc

$$\left|\sum_{e'_k} \int dy \int f\,dx\right| < n\varepsilon_{nl}\,dy_k,$$

et par suite

$$\left|\sum_{e'} \int dy \int f\,dx\right| \overline{\overline{<}} \sum_k \left|\sum_{e'_k} \int dy \int f\,dx\right| < n\varepsilon_{nl} \sum_k dy_k$$
$$< n\varepsilon_{nl}(B - b),$$

expression dont la limite est bien égale à zéro.

Il résulte de ce que nous venons d'établir qu'on a

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx = \lim_{\delta=0} \sum_e \int f\,dx\,dy.$$

On obtiendrait, par un raisonnement identique, le même

résultat pour l'intégrale $\int_a^A dx \int_b^B f\,dy$. Ces deux intégrales sont donc égales.

70. Le théorème qui vient d'être établi subsistera encore si l'on suppose : 1° que les conditions (1) et (2), sans être nécessairement satisfaites dans le rectangle (a, A, b, B) le sont dans tout rectangle $(a, A, b+\eta, B-\eta')$ quelque petites que soient les quantités positives η, η'; 2° que la condition (3) soit satisfaite dans le rectangle (a, A, b, B).

En effet, les deux derniers termes de l'expression

$$\int_b^B f\,dy = \int_{b+\eta}^{B-\eta'} f\,dy + \int_b^{b+\eta} f\,dy + \int_{B-\eta'}^B f\,dy$$

ont, par hypothèse, un module $< \varepsilon_l$ si η et η' sont moindres que l, quel que soit d'ailleurs x; la somme de leurs variations, lorsqu'on y change x en $x+dx$, est donc moindre en valeur absolue que $4\varepsilon_l$.

En outre, le premier terme est une fonction continue de x. Donc $\int_b^B f\,dy$ sera également continue, car, en prenant d'abord l, puis dx suffisamment petits, on pourra faire décroître autant qu'on voudra chacun des termes de sa variation.

L'intégrale

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy$$

aura donc une valeur déterminée, qui sera la limite de l'intégrale

$$\int_a^A dx \int_{b+\eta}^{B-\eta'} f\,dy,$$

car la différence entre ces deux intégrales sera égale à

$$\int_a^A dx \left(\int_b^{b+\eta} f\,dy + \int_{B-\eta'}^B f\,dy \right),$$

expression dont le module est moindre que

$$\int_a^A 2\varepsilon_l\,dx = 2\varepsilon_l(A - a)$$

et, par suite, tend vers zéro avec l.

Mais on a

$$\int_a^A dx \int_{b+\eta}^{B-\eta'} f\,dy = \int_{b+\eta}^{B-\eta'} dy \int_a^A f\,dx;$$

la limite dont nous venons d'établir l'existence n'est donc, par définition, autre chose que l'intégrale

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx.$$

Il est d'ailleurs évident que le théorème subsistera encore pour tout champ décomposable en un nombre limité de rectangles dont chacun, considéré séparément, satisfasse aux conditions précédentes.

71. Passons enfin au cas où le champ est infini. Supposons, à cet effet, que a, A, b restant fixes, on puisse faire croître indéfiniment B sans que le théorème cesse d'avoir lieu.

Admettons, en outre, que, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et A, l'intégrale

$$\int_B^\infty f\,dy$$

ait une valeur déterminée, dont le module soit moindre que $\varepsilon_B\varphi(x)$, le premier facteur ε_B restant borné et tendant uniformément vers zéro pour $B = \infty$ dans tout l'intervalle de $x = a$ à $x = A$ (ou tout au moins dans toute portion de cet intervalle qui ne contient pas certains points isolés c, c', ...); $\varphi(x)$ désignant d'autre part une fonction de x, positive, également bornée entre a et A et admettant dans cet intervalle une intégrale finie.

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_b^\infty f\,dy$ représentera entre a et A une fonction de x, continue (sauf peut-être aux points exceptionnels c, c', ...). En effet, soit x un point quelconque différent de ceux-là ; on aura

$$\int_b^\infty f\,dy = \int_b^{\mathrm{B}} f\,dy + \int_{\mathrm{B}}^\infty f\,dy. \tag{11}$$

Pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de celle que nous considérons, $\varphi(x)$ sera inférieur à une quantité fixe M, et ε_{B} pourra, en prenant B assez grand, être rendu moindre qu'un nombre arbitraire ε. La variation du terme $\int_{\mathrm{B}}^\infty f\,dy$ en passant du point x à un point infiniment voisin $x + dx$ aura donc son module moindre que $2\mathrm{M}\varepsilon$. D'autre part, $\int_b^{\mathrm{B}} f\,dy$ étant continue, le module de sa variation sera $< \varepsilon$ si dx est assez petit.

Le module de la variation de $\int_b^\infty f\,dy$ sera donc moindre que $(2\mathrm{M}+1)\varepsilon$ et décroîtra ainsi autant qu'on voudra, en faisant d'abord croître suffisamment la quantité auxiliaire B, puis prenant dx assez petit.

Si donc il n'existe dans le champ $a\mathrm{A}$ aucun des points exceptionnels c, c', ... que nous avons supposés, $\int_b^\infty f\,dy$ sera continue dans tout le champ, et l'intégrale

$$\int_a^{\mathrm{A}} dx \int_b^\infty f\,dy$$

aura une valeur déterminée.

Dans tous les cas, d'ailleurs, où cette intégrale, ou celle-ci

$$\int_b^\infty dy \int_a^{\mathrm{A}} f\,dx = \lim_{\mathrm{B}=\infty} \int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f\,dx = \lim_{\mathrm{B}=\infty} \int_a^{\mathrm{A}} dx \int_b^{\mathrm{B}} f\,dy,$$

sera déterminée, elles le seront toutes deux, et elles seront égales. Intégrant, en effet, l'égalité (11) de $x = a$ à $x = A$ et faisant tendre B vers ∞, il viendra

$$\int_a^A dx \int_b^\infty f\,dy = \lim_{B=\infty} \int_a^A dx \int_b^B f\,dy + \lim_{B=\infty} \int_a^A dx \int_B^\infty f\,dy.$$

Il suffira donc, pour établir notre proposition, de montrer que l'expression

$$\int_a^A dx \int_B^\infty f\,dy$$

a pour limite zéro pour $B = \infty$.

Pour cela, isolons dans le champ aA des intervalles partiels de longueur $< \delta$ contenant respectivement dans leur intérieur les divers points $c, c', \ldots$.

Considérons l'un de ces intervalles $\alpha\alpha'$ contenant le point c, par exemple.

Le module de l'intégrale

$$\int_B^\infty f\,dy$$

y sera moindre que $\varepsilon_B\,\varphi(x)$ et *a fortiori* moindre que $\mu\,\varphi(x)$, μ désignant le maximum de la fonction ε_B, qui est supposée bornée. L'intégrale $\int_\alpha^{\alpha'} dx \int_B^\infty f\,dy$ prise dans cet intervalle aura donc un module moindre que $\mu \int_\alpha^{\alpha'} \varphi(x)\,dx$, qui tend vers zéro avec δ, puisque $\varphi(x)$ est supposée intégrable.

Donc, en prenant δ assez petit, on pourra faire décroître, autant qu'on voudra, la somme des intégrales relatives aux petits intervalles que nous avons isolés. Désignons par D le reste du champ; ε_B y tend uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞; donc, en prenant B assez grand, on pourra rendre ε_B constamment moindre qu'une quantité arbitraire ε;

on aura, par suite,

$$\left|\int_D dx \int_b^\infty f\,dy\right| < \varepsilon \int_D \varphi(x)\,dx < \varepsilon \int_a^A \varphi(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro avec ε.

72. L'égalité

$$\int_a^A dx \int_b^\infty f\,dy = \int_b^\infty dy \int_a^A f\,dx$$

étant établie, sous les conditions précédentes, faisons tendre A à son tour vers ∞. Admettons : 1° que pour les valeurs de y comprises entre b et ∞, l'intégrale $\int_A^\infty f\,dx$ ait une valeur déterminée, de module inférieur à $\varepsilon_A\,\psi(y)$, ε_A restant toujours borné et tendant uniformément vers zéro, lorsque A tend vers ∞, dans tout l'intervalle de b à ∞ (sauf peut-être aux environs de certains points exceptionnels, en nombre fini), et $\psi(y)$ étant une fonction positive de y, dont l'intégrale de b à ∞ soit finie. Un raisonnement tout semblable au précédent montrera que, si l'une des intégrales

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f\,dx, \quad \int_a^\infty dx \int_b^\infty f\,dy$$

est déterminée (ce qui arrivera toujours s'il n'y a pas de points exceptionnels), elles seront égales.

II. — Intégrales multiples.

73. La définition des intégrales multiples peut être aisément généralisée comme celle des intégrales simples l'a été dans la Section précédente. Pour fixer les idées, nous considérerons les intégrales doubles.

Soit $f(x, y)$ une fonction de x, y, laquelle reste bornée aux environs de chaque point d'un domaine borné E, sauf aux environs de certains points c, c', ... en nombre fini ou

infini. Nous pouvons supposer ces points d'exception situés sur la frontière de E; car, s'ils lui étaient intérieurs, en les excluant de ce domaine nous constituerions un nouveau domaine pour lequel ils seraient des points frontières, et c'est sur celui-ci que nous raisonnerions.

Soit D un domaine quelconque, mesurable et parfait, intérieur à E. La fonction $f(x, y)$ y sera bornée; car autour de chaque point x, y de D on peut tracer un cercle dans lequel f est bornée; elle le sera *a fortiori* dans tout domaine contenu dans ce cercle. Si donc cette propriété a lieu pour tout cercle ayant son centre en un point x, y, quelque grand que soit son rayon, elle aura lieu pour D; sinon on pourra déterminer un nombre r tel que f soit bornée dans les cercles de rayon $< r$, mais ne le soit plus dans les cercles de rayon $> r$.

Un raisonnement identique à celui du n° 220 (t. I) montre que r est une fonction continue de x, y et admet dans D un minimum ρ différent de zéro. Or on peut décomposer D en un nombre fini d'éléments de diamètre $< \rho$; la fonction f, étant bornée dans chacun d'eux, le sera dans D.

La fonction f admettra donc dans D une intégrale par excès et une intégrale par défaut; nous les représenterons respectivement par $S_D^1 f\,de$ et $S_D^2 f\,de$, ou, plus simplement, par S_D^1, S_D^2. Lorsque nous n'aurons à considérer qu'une seule d'entre elles et que le raisonnement pourra s'appliquer indifféremment à l'une ou à l'autre, il deviendra inutile de les distinguer; on pourra donc les désigner par la notation commune S_D, en supprimant l'indice supérieur.

74. Soit donc S_D l'une ou l'autre de nos deux intégrales. Si nous faisons varier le domaine D d'une manière quelconque, de telle sorte que son aire ait pour limite l'aire intérieure de E, il pourra arriver que l'intégrale S_D tende vers une limite déterminée. Nous dirons dans ce cas que cette limite est l'intégrale dans le domaine E, et nous la représenterons par S_E.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette limite existe est que l'intégrale S_D tende vers zéro lorsque D varie d'une manière quelconque, de telle sorte que son aire tende vers zéro : autrement dit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ tel, que pour tout domaine D (mesurable, parfait et intérieur à E) d'aire moindre que δ, on ait

$$|S_D| < \varepsilon.$$

En effet, supposons cette dernière condition satisfaite et considérons deux domaines quelconques D et D′ (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que leurs aires D et D′ diffèrent de l'aire intérieure de E d'une quantité moindre que δ. Soit d l'ensemble des points de D qui n'appartiennent pas à D′; d' celui des points de D′ qui n'appartiennent pas à D ; on aura évidemment

$$d < E - D' < \delta, \quad d' < E - D < \delta,$$
$$D - D' = d - d'$$

et, par suite,

$$S_D - S_{D'} = S_d - S_{d'},$$
$$|S_D - S_{D'}| \leqq |S_d| + |S_{d'}| < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'existence de la limite S_E.

Réciproquement, supposons la condition non satisfaite. Il existera une quantité ε pour laquelle on pourra déterminer un domaine d, d'aire inférieure à une quantité quelconque δ et tel que l'intégrale S_d ait son module $\geqq \varepsilon$.

Soit D un domaine mesurable et parfait contenant d, intérieur à E et tel que E — D soit moindre que δ. Si nous enlevons du domaine D les points intérieurs à d, nous obtiendrons un nouveau domaine $D' = D - d$ dont l'aire D′ sera $> E - 2\delta$. Les deux aires D et D′ tendront toutes deux vers E si l'on fait décroître δ; mais la différence des intégrales correspondantes

$$S_D - S_{D'} = S_d$$

aura son module au moins égal à ε. Donc la limite S_E n'existera pas.

75. Les deux intégrales

$$S_D^1 f\,de, \quad S_D^2 f\,de$$

sont, par définition, les limites des sommes

$$\sum_D M_k\,de_k, \quad \sum_D m_k\,de_k,$$

où M_k, m_k sont le maximum et le minimum de f dans l'élément infiniment petit de_k. Le maximum L_k du module de f dans cet élément sera la plus grande des deux quantités $|M_k|$, $|m_k|$; on aura donc

$$|\Sigma M_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$
$$|\Sigma m_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$

et en passant à la limite

$$|S_D^1| \leqq S_D^1 |f|\,de, \qquad |S_D^2| \leqq S_D^1 |f|\,de.$$

Si donc, lorsque D tend vers zéro, on a

(1) $$\lim S_D^1 |f|\,de = 0,$$

on aura *a fortiori*

(2) $$\lim S_D^1 = 0, \qquad \lim S_D^2 = 0,$$

et les deux limites S_E^1, S_E^2 seront déterminées.

76. Nous allons voir que, réciproquement, les conditions (2) entraînent comme conséquence nécessaire la relation (1).

Soit en effet f_1 une fonction égale à f quand f est positif, et à zéro quand f est nul ou négatif; on aura par hypothèse, pour tout champ D d'aire inférieure à un certain nombre δ,

$$|S_D^1 f\,de| < \varepsilon,$$

et cette relation devra subsister pour tout champ contenu

dans D. On en conclut aisément que l'intégrale

$$S^1_D f_1\, de$$

ne peut surpasser ε.

Décomposons en effet le champ D en éléments de_k infiniment petits; soient M_k le maximum de f, M_{1k} celui de f_1 dans l'élément de_k.

On peut prendre les éléments assez petits pour que la différence entre les sommes

$$\Sigma M_k\, de_k, \quad \Sigma M_{1k}\, de_k$$

et leurs minima

$$S^1_{D'} f\, de, \quad S^1_{D'} f_1\, de$$

soit moindre qu'un nombre arbitraire η.

Il en sera ainsi *a fortiori* si les sommes et les intégrales ci-dessus sont restreintes à une portion des éléments de_k.

Or M_{1k} est égal à M_k dans tout élément où f prend des valeurs positives, égal à zéro dans les autres; on aura donc, en désignant par D_1 l'ensemble des éléments de la première sorte,

$$S^1_D f_1\, de \overline{\underset{<}{}} \sum_D M_{1k}\, de_k \overline{\underset{<}{}} \sum_{D_1} M_k\, de_k \overline{\underset{<}{}} S^1_{D_1} f\, de + \eta \overline{\underset{<}{}} \varepsilon + \eta$$

et, en faisant tendre η vers zéro,

$$S^1_D f_1\, de \overline{\underset{<}{}} \varepsilon.$$

Remarquons en second lieu que, le maximum de $-f$ dans un ensemble quelconque étant égal et de signe contraire au minimum de f, on a

$$S^2_D f\, de = - S^1_D(-f)\, de.$$

Par hypothèse, le premier membre tend vers zéro en même temps que l'aire de D : il en est donc de même du second; et si f_2 désigne une fonction égale à $-f$ lorsque $-f$ est positif, à zéro dans le cas contraire, on aura, d'après ce qui précède,

$$S^1_D f_2\, de \overline{\underset{<}{}} \varepsilon.$$

Cela posé, on a évidemment

$$|f| = f_1 + f_2.$$

Le maximum de $|f|$ dans un ensemble quelconque est donc au plus égal à la somme des maxima de f_1 et de f_2; on a, par suite,

$$S_D^1 |f| de \leqq S_D^1 f_1 de + S_D^1 f_2 de \leqq 2\varepsilon.$$

Donc, si D tend vers zéro, on aura

$$\lim S_D^1 |f| = 0.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Pour que les intégrales, par excès et par défaut, de la fonction f dans le domaine E *soient déterminées toutes deux, il faut et il suffit que l'intégrale par excès de* $|f|$ *dans ce même domaine soit déterminée.*

On remarquera que, dans ce cas, l'intégrale par défaut de $|f|$ dans E est également déterminée. En effet, l'intégrale par défaut

$$S_D^2 |f| de$$

a tous ses éléments positifs ou nuls et au plus égaux à ceux de l'intégrale par excès $S_D^1 |f| de$; elle tendra donc vers zéro en même temps que cette dernière, si D tend vers zéro.

77. Soit $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ une série déterminée, mais susceptible d'être choisie à volonté, de domaines successifs (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que chacun d'eux contienne le précédent et que l'écart maximum des points de la frontière de D_n à la frontière de E tende vers zéro, quand n tend vers ∞; l'intégrale

$$S_{D_n}^1 |f| de$$

sera positive et croîtra avec n. Si elle tend vers ∞ en même temps que n, l'intégrale $S_E^1 |f| de$ ne pourra être finie et déterminée. Dans le cas contraire, elle tendra vers une limite finie A, qui sera la valeur de l'intégrale $S_E^1 |f| de$.

En effet, soit D un domaine quelconque (mesurable, parfait et intérieur à E), dont l'aire soit $> E - \delta$. Il existe dans la suite $D_1, \ldots, D_n, \ldots$ un domaine D_m contenant en entier D, et l'on aura

$$S_D^1 |f| \, de \leqq S_{D_m}^1 |f| \, de \leqq A.$$

Posons, d'autre part,

$$S_{D_n}^1 |f| \, de = A - \varepsilon_n$$

et désignons par μ_n le maximum de $|f|$ dans D_n.

Désignons par d l'ensemble des points de D_n qui n'appartiennent pas à D ; l'aire de cet ensemble sera moindre que $E - D$ et *a fortiori* moindre que δ. Cela posé, on aura

$$S_D^1 |f| \, de \geqq S_{D_n}^1 |f| \, de - S_d^1 |f| \, de > A - \varepsilon_n - \mu_n \delta.$$

En prenant n suffisamment grand, puis δ suffisamment petit, nous pourrons rendre plus petits que toute quantité donnée, d'abord ε_n, puis $\mu_n \delta$. On aura donc

$$\lim_{\delta = 0} S_D^1 |f| \, de = A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

78. Soient enfin E un domaine qui ne soit pas borné; $f(x, y)$ une fonction définie dans ce domaine, laquelle admette, dans tout domaine Δ borné et intérieur à E, une intégrale par excès S_Δ^1, ou une intégrale par défaut S_Δ^2.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait

$$\lim_{D=0} S_D^1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{D=0} S_D^2 = 0$$

pour tout domaine infiniment petit D intérieur à Δ. Et si ces deux conditions sont satisfaites à la fois, elles équivaudront à celle-ci :

$$\lim_{D=0} S_D^1 |f| \, de = 0.$$

Soit R l'écart minimum des points de E non contenus dans

Δ à un point fixe, l'origine des coordonnées si l'on veut. Faisons varier Δ, de telle sorte que R tende vers ∞; si l'intégrale $S^1_\Delta f\,de$, par exemple, tend vers une limite fixe, cette limite se nommera l'*intégrale par excès* de f dans le domaine E, et se représentera par $S^1_E f\,de$.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S^1_\Delta f\,de$$

tende vers zéro, si l'on fait varier Δ de telle sorte que son écart à l'origine tende vers ∞.

En effet, supposons cette condition remplie. Soient Δ et Δ' deux domaines quelconques contenant tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R; soient d l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à Δ'; d' celui des points de Δ' qui n'appartiennent pas à Δ; on aura évidemment

$$S^1_\Delta - S^1_{D'} = S^1_d - S^1_{d'},$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro pour $R = \infty$.

Supposons, au contraire, que cette condition ne soit pas remplie. On pourra déterminer un nombre ε tel qu'il existe un domaine d, borné et intérieur à E dont l'écart à l'origine soit plus grand que toute quantité donnée, et pour lequel l'iutégrale $S^1_d f\,de$ ait son module $> \varepsilon$.

Cela posé, soient

Δ un domaine quelconque;

R l'écart minimum des points de E qui n'appartiennent pas à Δ à l'origine;

ρ l'écart maximum des points de Δ à cette même origine.

On peut, quels que soient R et ρ, déterminer d de telle sorte que son écart à l'origine surpasse ρ. Cela posé, les intégrales prises dans les deux domaines Δ et $\Delta + d$ différeront de plus de ε, bien que chacun d'eux contienne tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R. L'intégrale S^1_Δ ne peut donc tendre vers une limite déterminée pour $R = \infty$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent aux intégrales par défaut.

On peut enfin s'assurer, par des considérations toutes semblables à celles des nos 75 à 77, que, pour que les intégrales par excès et par défaut soient toutes les deux déterminées, il faut et il suffit que l'intégrale par excès du module de f soit finie.

79. Les propriétés fondamentales des intégrales définies par excès ou par défaut subsistent pour nos intégrales généralisées.

Supposons, par exemple, qu'on divise le champ E, supposé infini, pour plus de généralité, en plusieurs régions $E_1, E_2, \ldots$.

Soient respectivement $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ l'ensemble des points communs à $E_1, E_2, \ldots$, et au domaine Δ formé par tous les points de E dont l'écart à l'origine ne surpasse pas un nombre fixe R. Supposons que l'ensemble des frontières communes à $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ ait une aire nulle. Soient D un domaine mesurable et parfait contenu dans Δ; $D_1, D_2, \ldots$ les domaines partiels formés par les points de D qui sont respectivement à l'intérieur ou sur la frontière des ensembles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$. On aura, en considérant indifféremment les intégrales par défaut ou par excès,

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} + \ldots.$$

Faisons tendre D vers Δ; $D_1, D_2, \ldots$ tendant respectivement vers $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, on aura à la limite

$$S_\Delta = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots.$$

Faisons croître R indéfiniment; ce second passage à la limite donnera

$$S_E = S_{E_1} + S_{E_2} + \ldots.$$

On démontre de la même manière, par un ou deux passages à la limite, que, si l'on a

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots,$$

on aura

$$S_E f\,de = c_1 S_E f_1\,de + e_2 S_E f_2\,de + \ldots$$

(en supposant que les intégrales du second membre aient des valeurs déterminées).

Le théorème de la moyenne s'établit par le même procédé.

80. Considérons enfin la formule pour les changements de variable.

Les anciennes variables x, y étant liées aux nouvelles u, v par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v),$$

on a

$$S_{E'} f(x, y)\,dx\,dy = S_E f(\varphi, \varphi_1)|J|\,du\,dv.$$

Cette formule a été établie en supposant :

1° Que, dans le domaine E, les dérivées de φ, φ_1 restent continues, et leur jacobien J différent de zéro ;

2° Que le domaine E est borné, et que chacun de ses points (u, v) correspond à un seul point (x, y) de E';

3° Que la fonction $f(x, y) = f(\varphi, \varphi_1)$ reste bornée dans ces domaines.

Nous allons montrer qu'on peut, sans qu'elle cesse de subsister, se débarrasser de la plus grande partie de ces restrictions.

81. Supposons en effet que, en certains points de E, les dérivées de φ, φ_1 cessent d'exister ou soient discontinues, ou que le jacobien J soit nul, ou, enfin, que f cesse d'être bornée aux environs de ces points. On peut supposer ces points exclus du domaine E, de telle sorte qu'ils appartiennent à sa frontière. Nous exclurons de même du domaine E' les points correspondants.

Nous pouvons ainsi admettre que, dans tout l'intérieur de E, les conditions précédentes soient satisfaites, les exceptions ne pouvant se présenter que sur sa frontière. Dans ces conditions, à tout domaine D, borné, mesurable et parfait

contenu dans E, correspond un domaine D′ de même nature contenu dans E′, et réciproquement.

Cela posé, nous allons montrer que, si l'une des intégrales

$$S_{E'} f\,dx\,dy, \quad S_E f|J|\,du\,dv,$$

la première, par exemple, est déterminée, l'autre le sera aussi et lui sera égale.

82. Soit, en effet, Δ′ un domaine borné quelconque contenu dans E′, mais renfermant tous ceux de ses points dont les coordonnées ne surpassent pas en valeur absolue un nombre donné R′.

On aura, à la seule condition de prendre R′ assez grand,

$$|S_{E'} f\,dx\,dy - S_{\Delta'} f\,dx\,dy| < \varepsilon.$$

Soient, d'ailleurs, D′ un domaine mesurable quelconque contenu dans Δ′; d' l'ensemble des points de Δ′ qui n'appartiennent pas à D′; on aura de même, à la seule condition de prendre d' assez petit,

$$|S_{\Delta'} f\,dx\,dy - S_{D'} f\,dx\,dy| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|S_{E'} f\,dx\,dy - S_{D'} f\,dx\,dy| < 2\varepsilon.$$

Cette inégalité subsistera évidemment encore si l'on y remplace le domaine D′ par un autre domaine D″ (également borné, mesurable, parfait et intérieur à E′) qui contienne D′.

Soient, en effet, Δ″ le domaine formé par la réunion de D″ et de Δ′; d'' l'ensemble des points de Δ″ qui n'appartiennent pas à D″; Δ′ étant contenu dans Δ″, et d'' dans d', on aura

$$|S_{E'} - S_{\Delta''}| < \varepsilon, \qquad |S_{\Delta''} - S_{D''}| < \varepsilon,$$

d'où

$$|S_{E'} - S_{D''}| < 2\varepsilon.$$

Au domaine D′, défini comme ci-dessus, correspond dans le champ de la seconde intégrale un domaine borné et mesurable D.

Désignons par R le maximum que ne surpassent pas les modules des coordonnées des divers points de D.

83. Soient maintenant

Δ un domaine borné quelconque contenu dans E et renfermant tous ceux de ses points dont les coordonnées ne surpassent pas en valeur absolue un nombre donné R_1;

D_1 un domaine borné et parfait contenu dans Δ;

d_1 l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à D_1.

Il nous faut montrer que, en prenant R_1 assez grand, puis d_1 assez petit, on pourra rendre aussi petite qu'on voudra la différence

$$S_{E'} f\, dx\, dy - S_{D_1} f |J|\, du\, dv.$$

Or, si $R_1 > R$, Δ contiendra D; le domaine δ, formé par les points de D qui n'appartiennent pas à D_1, sera donc $\leqq d_1$. Soit, d'autre part, $\mathfrak{D}$ le domaine formé par la réunion de D et de D_1; on aura

$$D_1 = \mathfrak{D} - \delta$$

et, par suite,

$$S_{D_1} f |J|\, du\, dv = S_{\mathfrak{D}} f |J|\, du\, dv - S_\delta f |J|\, du\, dv.$$

Soit $\mathfrak{D}'$ la portion du champ E' qui correspond à $\mathfrak{D}$; on aura

$$S_{\mathfrak{D}} f |J|\, du\, dv = S_{\mathfrak{D}'} f\, dx\, dy,$$

et, comme $\mathfrak{D}'$ contient D', cette quantité différera de $S_{E'} f\, dx\, dy$ de moins de 2ε. D'autre part, $\big| f |J| \big|$ est borné dans le domaine D; en désignant par M son maximum, on aura

$$\left| S_\delta f |J|\, du\, dv \right| \leqq M\delta \leqq M d_1$$

et, par suite,

$$\left| S_{E'} f\, dx\, dy - S_{D_1} f |J|\, du\, dv \right| \leqq 2\varepsilon + M d_1.$$

Or, on peut choisir ε aussi petit qu'on veut; cela fait, R et M prendront des valeurs déterminées; on pourra ensuite choisir R_1 à volonté, pourvu qu'il soit $> R$; enfin, prendre d_1 assez petit pour que $M d_1$ devienne aussi petit qu'on voudra.

Le théorème est donc démontré.

84. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit non seulement bornée, mais intégrable, dans tout domaine D mesurable et parfait contenu dans E. Les deux intégrales par excès et par défaut S_D^1 et S_D^2 se confondront en une seule, qui sera l'intégrale proprement dite S_D, à laquelle les raisonnements précédents seront applicables. La valeur limite de cette intégrale, si elle est finie et déterminée, servira de définition à l'intégrale S_E. Pour qu'il en soit ainsi, il sera nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S_E |f| \, dx \, dy$$

ait une valeur finie.

85. Dans le cas des intégrales simples, précédemment étudié, cette condition était suffisante, mais non nécessaire. Cette différence s'explique en remarquant que les définitions ne sont pas identiques dans les deux cas.

En effet, considérons, pour fixer les idées, l'intégrale simple

$$\int_a^b f \, dx,$$

la fonction f cessant d'être intégrable aux environs d'un point c situé dans le champ. Cette intégrale sera, par définition, la limite de l'expression

$$\int_a^{c-\varepsilon} f \, dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f \, dx,$$

lorsque ε, ε' tendent vers zéro. Ici le domaine E est l'intervalle de a à b, et D est formé par la somme des intervalles de a à $c - \varepsilon$ et de $c + \varepsilon'$ à b. Mais ce dernier domaine est assujetti à une condition que ne lui imposait pas la théorie générale, à savoir que, s'il contient deux points p et q qui ne soient pas séparés par le point c, il contient tous les points intermédiaires. On conçoit que l'intégrale prise dans un domaine D ainsi particularisé puisse tendre vers une limite déterminée, sans qu'il en soit de

même pour les domaines qui ne sont pas astreints à cette condition. Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^b f\,dx$, définie comme nous l'avons fait, pourra donc être déterminée, sans qu'on ait le droit d'en conclure que l'intégrale $\int_a^b |f|\,dx$ le soit.

Cette différence entre les intégrales simples et les intégrales multiples est analogue à ce que nous avons signalé dans la théorie des séries. En effet, les séries simples peuvent être absolument convergentes, ou seulement semi-convergentes; pour les séries multiples, cette différence n'existe pas, l'absolue convergence étant un des éléments de leur définition.

86. Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable dans un domaine E, borné et mesurable.

Désignons par F l'ensemble des valeurs de y auxquelles correspondent des points de E; par G_y l'ensemble des valeurs de x pour les divers points de E qui correspondent à une même valeur donnée de y.

On aura (t. I, 56)

$$S_E f\,dx\,dy = S_F\,dy\,[S_{G_y} f\,dx],$$

de sorte que le calcul de l'intégrale double se ramène à celui de deux intégrales simples successives, qui peuvent être prises indifféremment par défaut ou par excès.

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante. Supposons :

1° Que la fonction f soit intégrable dans tout domaine mesurable D contenu dans un domaine E (sans l'être nécessairement dans E) et que l'intégrale

$$S_E f\,dx\,dy$$

ait une valeur déterminée;

2° Que le domaine Δ_R formé par ceux des points de E

dont les coordonnées ont des modules qui ne surpassent pas un nombre donné R soit mesurable, quel que soit R;

3° Que l'intégrale simple $S|f|\,dx$, prise dans un domaine quelconque d contenu dans l'un des domaines G_y et dont l'étendue ne surpasse pas l, soit constamment moindre que ε_l, la quantité ε_l ne dépendant que de l et tendant vers zéro avec l;

4° Enfin, que si le domaine d est en entier extérieur à Δ_R, la même intégrale soit constamment moindre, en valeur absolue, que $\varepsilon'_R\,\varphi(y)$, ε'_R ne dépendant que de R et tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$, et $\varphi(y)$ désignant d'autre part une fonction bornée, positive et dont l'intégrale par excès dans F soit finie.

Nous allons démontrer que, dans ces hypothèses, l'intégrale

$$S_F\,dy\,S_{G_y}f\,dx,$$

prise soit par défaut, soit par excès, est égale à

$$S_E\,f\,dx\,dy.$$

87. Tout d'abord, l'intégrale $S_{G_y}|f|\,dx$ aura une valeur bornée. Soit, en effet, ρ une quantité fixe quelconque.

Si $|y|>\rho$, l'intégrale sera, par hypothèse, moindre que $\varepsilon'_\rho\,\varphi(y)$.

Si $|y|\overline{\gtrless}\rho$, on pourra décomposer le champ G_y en deux autres, formés respectivement par ceux de ses points où $|x|>\rho$ et par ceux où $|x|\overline{\gtrless}\rho$. Dans la première partie du champ, l'intégrale sera encore moindre que $\varepsilon'_\rho\,\varphi(y)$. L'étendue de l'autre partie du champ ne surpassant pas 2ρ, l'intégrale correspondante sera moindre que $\varepsilon_{2\rho}$; on aura donc dans tous les cas

$$S_{G_y}|f|\,dx<\varepsilon'_\rho\,\varphi(y)+\theta\varepsilon_{2\rho},$$

θ étant égal à zéro si $|y|>\rho$, à 1 dans le cas contraire.

Les intégrales par excès ou par défaut de la fonction f dans le domaine G_y sont donc déterminées, et pour chaque

valeur de y leur module ne surpassera pas la limite ci-dessus.

Les intégrales

$$S_F\, dy\, S_{G_y} f\, dx$$

(calculées par excès ou par défaut) sont également déterminées. Il suffit, en effet, de montrer que l'intégrale

$$S_F\, dy \,|\, S_{G_y} f\, dx \,|$$

est finie. Or cette intégrale est au plus égale à

$$S_F\, dy [\varepsilon'_\rho\, \varphi(y) + \theta\varepsilon_{2\rho}],$$

dont la première partie,

$$\varepsilon'_\rho\, S_F\, \varphi(y)\, dy,$$

est finie, par hypothèse. La seconde partie l'est également, car elle est évidemment égale à

$$\varepsilon_{2\rho} F_1,$$

F_1 désignant la longueur de l'ensemble formé par les points de F pour lesquels $|y| \overline{\overline{<}} \rho$, longueur au plus égale à 2ρ.

88. Soit maintenant Δ_R l'ensemble des points de E pour lesquels $|x|$ et $|y|$ ne surpassent pas un nombre donné R. Décomposons le plan par des parallèles aux axes coordonnés en carrés de côté $\frac{R}{n}$, l'origine étant d'ailleurs un des sommets du réseau. Ces carrés seront de trois sortes :

1° Des carrés e intérieurs à Δ_R ;

2° Des carrés e' extérieurs à Δ_R ;

3° Des carrés e'' qui rencontrent sa frontière.

Soit D le domaine formé par l'ensemble des carrés e; si $\frac{R}{n}$ décroît indéfiniment, son aire tendra vers l'aire de Δ_R, et si, en même temps que $\frac{R}{n}$ décroît, on fait croître R, l'intégrale double

$$S_D\, f\, dx\, dy$$

tendra vers

$$S_E\, f\, dx\, dy.$$

D'ailleurs, f étant intégrable dans le domaine D qui est mesurable, cette intégrale double est égale à

$$S_\varphi\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx,$$

en désignant par φ l'ensemble des valeurs de y qui correspondent aux divers points de D, et par γ_y l'ensemble des valeurs de x qui correspondent à l'une de ces valeurs y. Comme D est contenu dans E, φ le sera dans F, et γ_y dans G_y. Enfin, si l'on remarque que, dans tout le domaine $F-\varphi$, γ_y est nul, on aura

$$S_{F-\varphi}\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx = 0.$$

L'intégrale précédente sera donc égale à

$$S_F\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx.$$

Il nous faut montrer que cette expression tend vers $S_F\, dy\, S_{G_y} f\, dx$ ou, ce qui est équivalent, que l'intégrale

$$S_F\, dy\, S_{H_y} f\, dx,$$

où $H_y = G_y - \gamma_y$, tend vers zéro.

89. Cette intégrale est la somme des deux suivantes

$$S_F\, dy\, S_{A_y} f\, dx + S_F\, dy\, S_{B_y} f\, dx,$$

A_y et B_y représentant respectivement l'ensemble des points de H_y qui appartiennent aux carrés e' ou aux carrés e''.

1° En tout point de A_y, l'une au moins des coordonnées x, y a un module $> R$; on aura donc

$$|S_{A_y} f\, dx| \overline{\gtrless} S_{A_y} |f|\, dx < \varepsilon'_R\, \varphi(y)$$

et, par suite,

$$|S_F\, dy\, S_{A_y} f\, dx| < \varepsilon'_R\, S_F\, \varphi(y)\, dy,$$

quantité qui tend vers zéro si R tend vers ∞.

2° Passons à la seconde intégrale. Si $|y| > R$, H_y n'ayant aucun point commun avec les carrés e'', le champ B_y s'annulera; et $S_{B_y} f\, dx$ sera nulle. Au lieu d'intégrer cette fonc-

tion dans tout le champ F, il suffira donc de l'intégrer de $y = -R$ à $y = +R$.

Soient, d'ailleurs, $y_0, \ldots, y_k, y_{k+1} = y_k + dy_k, \ldots$ les parallèles aux x qui ont été tracées pour former notre décomposition en carrés. L'intégrale

$$S_{-R}^{+R} dy\, S_{B_y} f\, dx,$$

que nous avons à calculer, sera la somme des intégrales

$$S_{y_k}^{y_k+dy_k} dy\, S_{B_y} f\, dx,$$

la sommation s'étendant à tous les intervalles dy_k dont la réunion forme l'intervalle de $-R$ à $+R$.

Soient l_k la somme des longueurs des carrés de l'espèce e'' qui sont contenus dans la bande comprise entre les droites y_k et $y_k + dy_k$; α_k une quantité au moins égale à l_k. Si y est compris entre y_k et $y_k + dy_k$, l'ensemble B_y formé par les points communs à H_y et à ces rectangles aura une étendue au plus égale à α_k. On aura par suite

$$|S_{B_y} f\, dx| < \varepsilon_{\alpha_k},$$

$$|S_{y_k}^{y_k+dy_k} dy\, S_{B_y} f\, dx| < \varepsilon_{\alpha_k} dy_k,$$

et enfin

$$|S_{-R}^{+R} dy\, S_{B_y} f\, dx| < \Sigma \varepsilon_{\alpha_k} dy_k.$$

Les carrés e'' étant tous compris entre les droites $x = -R$ et $x = +R$, aucune des quantités l_k ne pourra surpasser $2R$. Soit σ la somme des longueurs des éléments dy_k pour lesquels l_k est supérieur à un nombre donné δ. Pour ces éléments, on pourra prendre $\alpha_k = 2R$, et pour les autres, dont l'étendue totale est $2R - \sigma$, on pourra prendre $\alpha_k = \delta$; on aura, par suite,

$$\Sigma \varepsilon_{\alpha_k} dy_k = \varepsilon_\delta (2R - \sigma) + \varepsilon_{2R}\sigma \overline{\overline{<}}\, 2R\varepsilon_\delta + \sigma\varepsilon_{2R}.$$

D'ailleurs, l'aire totale des éléments e'' est évidemment égale à

$$\Sigma\, l_k\, dy_k,$$

et, par suite, plus grande que $\delta\sigma$. On a donc

$$\sigma < \frac{\Sigma e''}{\delta}$$

et, par suite,

$$\Sigma \varepsilon_{\alpha_k} dy_k < 2 R \varepsilon_\delta + \frac{\Sigma e''}{\delta} e_{2R}.$$

Or, ε_δ tend vers zéro avec δ, et d'autre part, Δ_R étant mesurable, $\Sigma e''$ tend vers zéro quand n tend vers ∞. On peut donc, quel que soit R, choisir δ assez petit, et ensuite n assez grand pour que chacun des deux termes ci-dessus devienne aussi petit qu'on voudra.

90. Les changements de variables sont un des meilleurs moyens de reconnaître si une intégrale définie a une valeur déterminée.

Considérons, par exemple, l'intégrale triple

$$S_E f\, dx\, dy\, dz,$$

le champ E étant supposé borné, et la fonction f intégrable dans tout le champ, sauf aux environs d'un point (a, b, c) intérieur à E.

Traçons du point (a, b, c) comme centre une sphère d d'un rayon ρ arbitraire. L'intégrale de $|f|$, prise dans le champ $E - d$, sera finie; il reste à savoir si elle est également finie dans la sphère d.

Prenons pour nouvelles variables des coordonnées polaires r, θ, φ ayant leur centre au point (a, b, c). L'intégrale

$$S_d |f|\, dx\, dy\, dz$$

sera changée en

$$S |f|\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

r variant de o à ρ, θ de o à π, et φ de o à 2π.

Supposons que, aux environs du point (a, b, c), on ait constamment

$$|f| < \frac{M}{r^\mu},$$

M désignant une constante et μ un exposant < 3. Cette iné-

galité ayant lieu dans toute l'étendue de la sphère d si ρ est assez petit, l'intégrale à évaluer sera moindre que la suivante

$$\int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{\mu-2}} \sin\theta \, d\varphi$$
$$= \int_0^\rho dr \int_0^\pi \frac{2\pi M}{r^{\mu-2}} \sin\theta \, d\theta = 4\pi M \int_0^\rho \frac{dr}{r^{\mu-2}} = \frac{4\pi M}{3-\mu} \rho^{3-\mu}.$$

Elle sera donc finie.

Au contraire, si l'on avait aux environs du point (a, b, c)

$$|f| > \frac{M}{r^\mu}, \qquad \mu \geqq 3,$$

l'intégrale serait plus grande que la suivante

$$4\pi M \int_0^\rho \frac{dr}{r^{\mu-2}},$$

laquelle est infinie.

91. Supposons maintenant que l'intégrale $S f \, dx \, dy \, dz$ soit déterminée dans un champ borné quelconque, et cherchons dans quelles conditions on pourra l'étendre à tout le plan sans qu'elle cesse d'être déterminée.

Considérons une sphère d'un rayon R ayant son centre au point (a, b, c), par exemple. L'intégrale de $|f|$ sera finie dans cette sphère; il s'agit de reconnaître si elle l'est également dans la région extérieure du plan.

Prenons les mêmes coordonnées que tout à l'heure; dans la région en question, r variera de R à ∞, θ de o à π, et φ de o à 2π.

Supposons que, pour tous les points (x, y, z) suffisamment éloignés du point fixe (a, b, c), on ait

$$|f| < \frac{M}{r^m}, \qquad m > 3.$$

L'inégalité précédente ayant lieu dans tout le champ, si R

est assez grand, l'intégrale à évaluer sera moindre que

$$\int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{m-2}} \sin\theta\, d\theta \overline{\overline{<}} \frac{4\pi M}{m-3} \frac{1}{R^{\mu-3}}.$$

Elle sera donc finie.

Elle serait infinie, au contraire, si l'on avait pour tous les points suffisamment éloignés de (a, b, c)

$$|f| > \frac{M}{r^m}, \qquad m \overline{\overline{<}} 3.$$

III. — Calcul des intégrales définies.

92. Soit à calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b \frac{dx}{x - \alpha - \beta i}.$$

Supposons d'abord $\beta \gtrless 0$. L'intégrale indéfinie sera

$$\log(x - \alpha - \beta i) + \text{const.} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \operatorname{Arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

Or, lorsque x varie de a à b, les diverses parties de cette expression restent continues : la valeur cherchée sera donc

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}[(b-\alpha)^2 + \beta^2] + \operatorname{Arc\,tang}\frac{b-\alpha}{\beta},$$

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}[(a-\alpha)^2 + \beta^2] - \operatorname{Arc\,tang}\frac{a-\alpha}{\beta}.$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha < a < b$, l'intégrale indéfinie sera

$$\operatorname{Log}(x-\alpha) + \text{const.};$$

et comme $\operatorname{Log}(x-\alpha)$ reste continu entre a et b, l'intégrale définie sera

$$\operatorname{Log}(b-\alpha) - \operatorname{Log}(a-\alpha) = \operatorname{Log}\frac{b-\alpha}{a-\alpha}.$$

Si $\beta = 0$ et $a < b < \alpha$, l'intégrale indéfinie sera

$$\operatorname{Log}(\alpha - x) + \text{const.},$$

et l'intégrale définie sera

$$\operatorname{Log}\frac{\alpha - b}{\alpha - a},$$

résultat qui concorde avec le précédent.

Enfin, si $\beta = 0$ et $a < \alpha < b$, la fonction à intégrer devenant infinie du premier ordre au point α, qui est contenu dans le champ, l'intégrale sera indéterminée.

93. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx,$$

la fonction $f(x)$ admettant une dérivée déterminée en chaque point du champ, sauf en un nombre limité de points où elle devient infinie.

La fonction à intégrer est la dérivée de $\operatorname{Arc\,tang} f(x)$. Or cette dernière fonction reste continue tant que $f(x)$ reste fini ; elle diminue brusquement de π chaque fois que $f(x)$ passe du positif au négatif en traversant l'infini ; elle augmente au contraire de π, si $f(x)$ passe du négatif au positif. On aura donc (59), en désignant par m et n les nombres de passages respectifs du positif au négatif et du négatif au positif,

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx = \operatorname{Arc\,tang} f(b) - \operatorname{Arc\,tang} f(a) + (m - n)\pi.$$

Soit, en particulier, $f(x) = x$; m et n seront nuls ; il viendra

$$\int_a^b \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{Arc\,tang} b - \operatorname{Arc\,tang} a$$

et, si l'on pose $a = 0$, $b = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

94. Passons à la détermination de l'intégrale

$$\mathrm{I}_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx,$$

m étant un entier positif.

Pour $m = 0$, on aura

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $m = 1$,

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = (-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On a, d'autre part, quel que soit m,

$$\mathrm{I}_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x \, dx$$

et, en intégrant par parties,

$$\mathrm{I}_m = (-\cos x \sin^{m-1} x)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(m-1)\sin^{m-2} x \cos x \, dx.$$

Le terme tout intégré s'annule aux deux limites 0 et $\frac{\pi}{2}$. Quant à l'intégrale du second membre, elle est égale à

$$(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (m-1)(\mathrm{I}_{m-2} - \mathrm{I}_m).$$

On aura donc

$$\mathrm{I}_m = (m-1)(\mathrm{I}_{m-2} - \mathrm{I}_m),$$

d'où

$$\mathrm{I}_m = \frac{m-1}{m} \mathrm{I}_{m-2}.$$

Supposons, d'abord, que m soit un nombre pair $2n$. Cette formule donnera successivement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots1}{2n(2n-2)\ldots2} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots1}{2n(2n-2)\ldots2}\,\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right.$$

Si $m = 2n+1$, on trouvera de même

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \\ &= \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} I_{2n-3} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{2n(2n-2)\ldots2}{(2n+1)(2n-1)\ldots3} I_1 \\ &= \frac{2n(2n-2)\ldots2}{(2n+1)(2n-1)\ldots3}. \end{aligned}\right.$$

On déduit des formules (1) et (2) la relation suivante :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{[2n(2n-2)\ldots2]^2}{(2n-1)(2n-3)\ldots1.(2n+1)(2n-1)\ldots3}\,\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

Il est d'ailleurs aisé de trouver deux limites supérieure et inférieure du rapport $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$. En effet, on a, en général,

$$I_m - I_{m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x(1-\sin x)\,dx.$$

Cette intégrale est positive; car, de o à $\frac{\pi}{2}$, les facteurs $\sin x$, $1-\sin x$ et dx sont tous positifs. Chacun des éléments dont la somme constitue l'intégrale est donc positif.

Posant successivement $m = 2n - 1$ et $m = 2n$ dans cette relation, il viendra

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1},$$

d'où

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}},$$

et par suite, d'après la formule (2),

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{2n+1}{2n}.$$

Si n tend vers ∞, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ converge donc vers l'unité, de telle sorte qu'on aura

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{(2.4\ldots 2n)^2}{1.3\ldots(2n-1).3.5\ldots(2n+1)}.$$

C'est la formule de Wallis, déjà trouvée dans le Calcul différentiel.

95. M. Hermite a établi que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique. Nous allons exposer une démonstration nouvelle de ce beau théorème, donnée récemment par M. Hurwitz.

L'intégration par parties nous donne

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = [-e^{-x} f(x)]_0^x + \int_0^x e^{-x} f'(x)\,dx.$$

Si $f(x)$ est un polynôme entier, l'application répétée de cette formule nous donnera

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x} F(x) + F(0),$$

en posant, pour abréger,

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots.$$

Nous aurons donc

$$F(0)e^x = F(x) + e^x \int_0^x e^{-x} f(x)\,dx.$$

Supposons que e satisfasse à une équation algébrique

$$c_0 + c_1 e + \ldots + c_n e^n = 0.$$

En posant dans la formule précédente $x = 0, 1, \ldots, n$ et ajoutant les équations obtenues, respectivement multipliées par $c_0, c_1, \ldots, c_n$, il viendra

$$0 = \sum_0^n c_k F(k) + \sum_0^n c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\,dx,$$

et cette égalité devrait être satisfaite quel que fût le polynôme $f(x)$. Or nous arriverons à une contradiction, par un choix convenable de ce polynôme.

Posons en effet

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p,$$

p étant un nombre premier infiniment grand.

Développons ce polynôme suivant les puissances croissantes de x; nous aurons

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}(A x^{p-1} + B x^p + \ldots),$$

A, B étant des entiers, dont le premier n'est pas divisible par p, si $p > n$. On aura donc

$$f(0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{p-2}(0) = 0, \quad f^{p-1}(0) = A, \quad f^p(0) = Bp, \quad \ldots.$$

Donc

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots = A + Bp + C(p+1)p + \ldots$$

sera un entier, non divisible par p.

Développant $f(x)$ suivant les puissances de $x - k$, nous

aurons de même, pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}[B_k(x-k)^p + C_k(x-k)^{p+1} + \ldots],$$

B_k, C_k étant des entiers; et

$$F(k) = f(k) + f'(k) + \ldots = B_k p + C_k(p+1)p + \ldots$$

sera un entier divisible par p.

La somme

$$\sum_0^n c_k F(k)$$

sera donc un entier, non divisible par p, si $p > |c_0|$, et, par suite, différent de zéro.

On a, d'autre part, dans tout l'intervalle de 0 à n,

$$|e^{-x} f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} n^{p-1}.n^p.n^p \ldots < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}$$

et, par suite,

$$\left| \sum_0^n c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx \right| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} \sum_1^n |c_k| e^k k,$$

quantité qui tend vers zéro pour $p = \infty$.

Or il est évident que la somme d'un entier et d'une fraction très petite ne peut être égale à zéro.

96. Le nombre π est également transcendant, mais nous nous bornerons à établir qu'il est incommensurable.

Prenons pour point de départ l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos zx\, dx,$$

n désignant un entier.

Posons, pour abréger,

$$(1-x^2)^n = F(x),$$

et opérons une suite d'intégrations par parties portant sur le facteur transcendant. Il viendra

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n \cos zx\,dx$$
$$=\left[\frac{F(x)\sin zx}{z}\right]_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{+1}\frac{F'(x)\sin zx}{z}dx$$
$$=\left[\frac{F(x)\sin zx}{z}\right]_{-1}^{+1}+\left[\frac{F'(x)\cos zx}{z^2}\right]_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{+1}\frac{F''(x)\cos zx}{z^2}dx$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\sin zx\left[\dfrac{F(x)}{z}-\dfrac{F''(x)}{z^3}+\ldots+(-1)^n\dfrac{F^{2n}(x)}{z^{2n+1}}\right]\\ +\cos zx\left[\dfrac{F'(x)}{z^2}-\dfrac{F'''(x)}{z^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{F^{2n-1}(x)}{z^{2n}}\right]\end{array}\right\}_{-1}^{+1}$$
$$+(-1)^{n+1}\int_{-1}^{+1}\frac{F^{2n+1}(x)\sin zx}{z^{2n+1}}dx.$$

Or F est un polynôme de degré $2n$; on aura donc $F^{2n+1}(x)=0$, et l'intégrale du second membre se réduira à zéro.

D'autre part, $F(x)$ étant une fonction paire, il en sera de même de ses dérivées d'ordre pair $F''(x)$, ..., $F^{2n}(x)$; au contraire, $F'(x)$, ..., $F^{2n-1}(x)$ seront des fonctions impaires. Les termes tout intégrés prendront donc pour $x=+1$ et pour $x=-1$ des valeurs égales et contraires. On aura, par suite, en substituant ces deux limites et faisant la différence des résultats,

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\cos zx\,dx=2(M\sin z+N\cos z),$$

en posant, pour abréger,

$$M=\frac{F(1)}{z}-\frac{F''(1)}{z^3}+\ldots+(-1)^n\frac{F^{2n}(1)}{z^{2n+1}},$$
$$N=\frac{F'(1)}{z^2}-\frac{F'''(1)}{z^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{F^{2n-1}(1)}{z^{2n}}.$$

Pour calculer les constantes $F(1)$, $F'(1)$, ..., $F^{2n}(1)$, on remarquera que la série de Taylor donne

$$F(1+h) = F(1) + \frac{F'(1)}{1} h + \ldots + F^k(1) \frac{h^k}{1.2\ldots k} + \ldots.$$

Mais on a, d'autre part,

$$F(1+h) = [1-(1+h)^2]^n = (-1)^n (2h+h^2)^n$$
$$= A_n h^n + A_{n+1} h^{n+1} + \ldots + A_{2n} h^{2n},$$

A_n, A_{n+1}, ..., A_{2n} étant des entiers. On aura donc, en comparant ces deux expressions,

$$F(1) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{n-1}(1) = 0,$$
$$F^n(1) = 1.2\ldots n A_n, \qquad \ldots, \qquad F^{2n}(1) = 1.2\ldots 2n A_{2n}.$$

Substituons ces valeurs dans la formule (3), et mettons $\frac{1.2\ldots n}{z^{2n+1}}$ en facteur commun; il viendra

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos zx \, dx = \frac{1.2\ldots n}{z^{2n+1}} (P \sin z + Q \cos z),$$

P et Q étant des polynômes en z, de degré inférieur à $2n+1$ et à coefficients entiers.

97. Cela posé, admettons que $\frac{\pi}{2}$ fût égal à une fraction rationnelle $\frac{b}{a}$. Posons $z = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (4). On aura $\cos z = 0$, $\sin z = 1$, $\frac{P}{z^{2n+1}} = \frac{E_n}{b^{2n+1}}$, E_n désignant un entier: et, par suite,

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx = \frac{1.2\ldots n}{b^{2n+1}} E_n,$$

d'où

$$(5) \qquad E_n = \frac{b^{2n+1}}{1.2\ldots n} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx.$$

On devrait avoir une égalité de ce genre pour toute valeur de n. Mais cela est absurde, si n est suffisamment grand.

En effet, $1-x^2$ et $\cos\frac{\pi}{2}x$ étant positifs, mais moindres que 1 dans toute l'étendue du champ d'intégration, l'intégrale $\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ sera positive, mais ses éléments seront moindres que ceux de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}dx$, qui est égale à 2. On aura donc

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\theta,$$

θ étant positif, mais <2.

D'autre part, le facteur $\frac{b^{2n+1}}{1.2\ldots n}$ décroît rapidement quand n augmente : car, en changeant n en $n+1$, on le multiplie par le facteur $\frac{b^2}{n+1}$, qui est très petit pour de grandes valeurs de n. Si donc on prend n assez grand, le second membre de l'équation (5) sera une quantité positive et moindre que l'unité, tandis que le premier membre est un entier. L'hypothèse de π commensurable conduit donc à une contradiction.

98. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{b=\infty}\int_0^b\frac{\sin x}{x}dx.$$

Posons $b=2n\pi+r$, r étant $<2\pi$, et l'entier n tendant vers ∞; on pourra écrire

$$\int_0^b=\int_0^\pi+\int_\pi^{2\pi}+\ldots+\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}+\int_{2n\pi}^{2n\pi+r}.$$

La dernière intégrale tend vers zéro; car le module de la

fonction à intégrer y est moindre que $\frac{1}{2n\pi}$, et l'étendue du champ est $< 2\pi$; son module est donc $< \frac{1}{n}$.

Les autres intégrales peuvent se ramener aux mêmes limites par des changements de variable. En effet, posons

$$x = (2k - 1)\pi + y$$

dans l'intégrale $\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}$; elle deviendra

$$\int_0^{\pi} \frac{-\sin y}{(2k-1)\pi + y}\, dy.$$

Posons, d'autre part,

$$x = (2k - 1)\pi - y$$

dans l'intégrale précédente $\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}$; elle deviendra

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{(2k-1)\pi - y}\, dy.$$

Réunissant toutes les intégrales ainsi transformées, on aura l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin y \left(\frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{3\pi - y} - \frac{1}{3\pi + y} + \ldots - \frac{1}{(2n-1)\pi + y}\right) dy$$

dont il faudra trouver la limite.

Cette limite ne sera pas altérée si l'on ajoute à la suite entre parenthèses la série infinie

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)\pi - y} - \frac{1}{(2n+1)\pi + y} + \ldots,$$

car, pour toute valeur de y comprise dans le champ d'intégration, les termes de cette suite sont alternativement positifs et négatifs et vont en décroissant. La série a donc une

valeur déterminée, positive et moindre que $\dfrac{1}{(2n+1)\pi - y}$ et *a fortiori* moindre que $\dfrac{1}{2n\pi}$.

L'intégrale

$$\int_0^\pi R_n \sin y \, dy$$

aura donc son module moindre que la quantité infiniment petite

$$\int_0^\pi \frac{dy}{2n\pi} = \frac{1}{2n}.$$

La limite cherchée sera donc l'intégrale

$$\int_0^\pi S \sin y \, dy,$$

S désignant la série infinie

$$\frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{3\pi - y} - \frac{1}{3\pi + y} + \ldots.$$

Or, si nous posons $y = \pi(1 - 2z)$, il viendra

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \ldots\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\cot \pi z \qquad (\text{T. I, n}^\text{o}\ \mathbf{377}) \\ &= \tfrac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi - y}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^\pi \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y \sin y \, dy \\ &= \int_0^\pi \sin^2 \tfrac{1}{2} y \, dy = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

99. Cette intégrale est d'ailleurs semi-convergente; on a, en effet,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \sin y \left[\frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{\pi + y} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\pi + y}\right] dy.$$

Or le facteur entre parenthèses est plus grand que la quantité

$$m = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\pi}.$$

L'intégrale sera donc plus grande que

$$m \int_0^\pi \sin y \, dy = 2m.$$

Or la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ étant divergente, m tend vers l'infini en même temps que n.

100. Lorsque l'on n'est pas en mesure de trouver la valeur exacte d'une intégrale définie, on a recours à des procédés d'approximation que nous allons exposer.

Il faut tout d'abord s'assurer que l'intégrale cherchée a une valeur finie et déterminée, et assigner des limites entre lesquelles elle se trouve contenue. Le théorème de la moyenne permettra le plus souvent d'arriver à ce premier résultat.

101. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k^2 est supposé < 1.

La fonction à intégrer devient infinie pour $x = 1$. Mais l'ordre d'infinitude est $\frac{1}{2}$: l'intégrale est donc finie. Pour assigner des limites à sa valeur, mettons-la sous la forme

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}.$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ restant positif dans toute l'étendue de l'intégration, on aura, en désignant par M et m des limites supérieure et inférieure à la valeur de l'autre facteur,

$$M\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} > K > m\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

D'ailleurs

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)_0^1 = 2.$$

D'autre part, x étant compris entre 0 et 1, $1+x$ sera compris entre 1 et 2, et $1-k^2x^2$ entre 1 et $1-k^2$; on aura donc

$$2 > (1+x)(1-k^2x^2) > 1-k^2.$$

On pourra donc poser

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

et l'on aura, en fin de compte,

$$\frac{2}{\sqrt{1-k^2}} > K > \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

102. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^1 \log\sin x\,dx.$$

La fonction $\log\sin x$ étant constamment négative, l'intégrale a tous ses éléments négatifs ; sa valeur aura donc zéro pour limite supérieure.

Pour obtenir une limite inférieure, mettons-la sous la forme suivante :

$$\int_0^1 \log\left(x\,\frac{\sin x}{x}\right)dx = \int_0^1 \log x\,dx + \int_0^1 \log\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^1 \log x\,dx = [x\log x]_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x} = -1.$$

D'autre part, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ étant évidemment décroissante de o à 1, la plus petite valeur de $\log\frac{\sin x}{x}$ correspondra à cette dernière limite, et l'on aura

$$\int_0^1 \log\frac{\sin x}{x}\,dx \gtrless \int_0^1 \log\sin(1)\,dx \gtrless \log\sin(1).$$

On aura donc finalement

$$\int_0^1 \log\sin x\,dx \gtrless -1 + \log\sin(1).$$

103. Considérons en dernier lieu l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

dont tous les éléments sont positifs. Pour lui assigner une limite supérieure, décomposons-la dans les deux suivantes :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Dans la première intégrale, e^{-x^2} est toujours < 1. Elle sera donc moindre que la suivante

$$\int_0^1 dx = 1.$$

Dans la seconde, $e^{-x^2} < e^{-x}$. Elle sera donc inférieure à celle-ci

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_1^\infty = e^{-1}.$$

On aura donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < 1 + e^{-1}.$$

104. Pour calculer la valeur approchée d'une intégrale définie, on peut avoir recours à l'une des trois méthodes suivantes.

Première méthode : *Développement en série.* — On développe la fonction $f(x)$ à intégrer en une série

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont chaque terme soit une fonction dont on sache calculer l'intégrale. Si d'ailleurs cette série satisfait aux conditions du n° 64, l'intégrale $\int_a^b f(x)$ sera donnée par la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

105. Considérons, comme application, l'intégrale elliptique de première espèce

$$F(\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}};$$

on aura, k étant < 1,

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \ldots.$$

Intégrant de o à Φ, et posant, pour abréger,

$$\int_0^\Phi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = I_{2n},$$

il viendra

$$(6)\quad F(\Phi) = \Phi + \tfrac{1}{2}I_2 k^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} I_{2n} k^{2n} + \ldots.$$

L'*amplitude* Φ du champ d'intégration une fois donnée, il restera à déterminer les intégrales I. Le procédé le plus avantageux consistera à les calculer de proche en proche au moyen des formules récurrentes qui lient deux intégrales successives (46).

106. Le cas le plus intéressant est celui où $\Phi = \frac{\pi}{2}$. On a, dans ce cas (**94**),

$$I_{2n} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}.$$

107. Si k est voisin de l'unité, la série (6) sera peu convergente. Posons, dans ce cas,

$$k^2 = 1 - k'^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} &= (\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\Big[1 - \tfrac{1}{2}k'^2\,\mathrm{tang}^2\varphi + \ldots\\ &\qquad + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k'^{2n}\,\mathrm{tang}^{2n}\varphi + \ldots\Big],\end{aligned}$$

et intégrons de o à Φ; il viendra

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}F(\Phi) &= J_0 - \tfrac{1}{2}J_2 k'^2 + \ldots\\ &\quad + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}J_{2n}k'^{2n} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

en désignant par J_{2n} l'intégrale

$$\int_0^\Phi \mathrm{tang}^{2n}\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^\Phi \sin^{2n}\varphi\cos^{-2n-1}\varphi\,d\varphi.$$

On a d'ailleurs, en posant $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$,

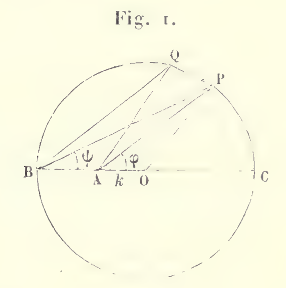
$$\begin{aligned}J_0 = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi}\frac{d\psi}{\sin\psi}\\ &= -\left(\log\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\psi\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi} = -\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right).\end{aligned}$$

Quant aux autres intégrales, elles pourront se calculer de proche en proche par les formules de réduction du n° **46**.

108. Si k n'est ni très petit, ni très voisin de l'unité, les séries (6) et (7) seront toutes deux peu convergentes. On peut, dans ce cas, par un changement de variables dû à Landen, transformer l'intégrale elliptique donnée en une autre dont le module soit plus avantageux.

Considérons, à cet effet, un cercle de rayon 1 et un point A situé sur le diamètre BC, à une distance $AO = k$ du centre (*fig.* 1). Soit P un point quelconque du cercle. Joignons

Fig. 1.



PO, PA, PB. Soient φ et ψ les deux angles PAO, PBO. On aura $POC = 2\psi$, $APO = 2\psi - \varphi$.

Cela posé, le triangle APO donnera

$$AP^2 = 1 + k^2 + 2k\cos 2\psi = (1+k)^2 - 4k\sin^2\psi$$

et

$$\sin(2\psi - \varphi) = k\sin\varphi,$$

d'où

$$\cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Soit maintenant Q un point du cercle infiniment voisin de P. Joignons QP, QA, QB, et posons $PAQ = d\varphi$, $PBQ = d\psi$.

Le triangle infiniment petit APQ donnera

$$\frac{\sin d\varphi}{PQ} = \frac{\sin APQ}{AQ}.$$

Mais on a sensiblement

$$\sin d\varphi = d\varphi,$$
$$PQ = \text{arc}\, PQ = 2\, d\psi,$$
$$\sin APQ = \cos APO = \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$
$$AQ = AP = \sqrt{(1+k)^2 - 4k\sin^2\psi}$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{2\, d\psi} = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{(1+k)^2 - 4k\sin^2\psi}}$$

ou

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}},$$

en posant, pour abréger,

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Intégrons cette équation de $\varphi = 0$ à $\varphi = \Phi$, il viendra

$$\int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\int_0^\Psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}},$$

la limite supérieure Ψ de la nouvelle intégrale étant déterminée par l'équation

$$\sin(2\Psi - \Phi) = k\sin\Phi.$$

109. Le calcul de l'intégrale proposée se trouve ramené par cette formule à celui de l'intégrale analogue

(8) $$\int_0^\Psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Le nouveau module k_1 est encore inférieur à l'unité, car on a

$$1 - k_1 = \frac{1 + k - 2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{1+k} > 0;$$

mais il est $> \sqrt{k}$, car on a $\frac{2}{1+k} > 1$.

Une transformation semblable à la précédente ramènera le

calcul de l'intégrale (8) à celui d'une nouvelle intégrale dont le module k_2 sera $> \sqrt{k_1}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale dont le module soit assez voisin de l'unité pour que la formule (7) puisse lui être appliquée commodément.

110. Il est clair qu'on pourrait opérer en sens inverse et ramener le calcul d'une intégrale elliptique d'un module quelconque k_1 à celui d'une intégrale d'un module moindre k, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale où le module soit assez petit pour qu'on puisse employer la série (6).

111. Deuxième méthode : *Formule d'Euler*. — Cette formule a pour objet de donner la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ en fonction des valeurs que prennent la fonction $f(x)$ et ses dérivées d'ordre impair aux deux limites de l'intégration.

Pour l'établir, nous partirons de l'identité

$$\int_a^{a+h} \varphi'(z)\,dz = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Posant $z = a + h - u$, elle deviendra

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_0^h \varphi'(a+h-u)\,du.$$

En intégrant par parties $2p$ fois de suite, il viendra successivement

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(a+h) - \varphi(a) \\ &\quad = h\varphi'(a) + \int_0^h \varphi''(a+h-u)u\,du \\ &\quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad = h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots + \frac{h^{2p}}{1.2\ldots 2p}\varphi^{2p}(a) \\ &\qquad + \int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)\frac{u^{2p}\,du}{1.2\ldots 2p}. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule de Taylor, où le reste est exprimé par une intégrale définie.

Remplaçons successivement, dans cette formule, la fonction φ par ses dérivées φ', φ'', ..., φ^{2p-1}, en remplaçant en même temps $2p$ par $2p-1$, $2p-2$, ..., il viendra

$$\begin{aligned}
&\varphi'(a+h)-\varphi'(a)\\
&\quad=h\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)}\varphi^{2p}(a)\\
&\qquad+\int_0^h \varphi^{(2p+1)}(a+h-u)\frac{u^{2p-1}\,du}{1.2\ldots(2p-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi^{2p-1}(a+h)-\varphi^{2p-1}(a)\\
&\quad=h\varphi^{2p}(a)+\int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)u\,du.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces équations à l'équation (9), après les avoir respectivement multipliées par des coefficients $A_1 h$, ..., $A_{2p-1}h^{2p-1}$, choisis de telle sorte que les termes en $\varphi''(a)$, ..., $\varphi^{2p}(a)$ disparaissent du second membre. Il viendra

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varphi(a+h)-\varphi(a)+A_1h[\varphi'(a+h)-\varphi'(a)]+\ldots\\
&\quad+A_{2p-1}h^{2p-1}[\varphi^{2p-1}(a+h)-\varphi^{2p-1}(a)]\\
&\quad=h\varphi'(a)+\int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)F(u)\,du,
\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$F(u)=\frac{u^{2p}}{1.2\ldots2p}+A_1\frac{hu^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)}+\ldots+A_{2p-1}h^{2p-1}u.$$

Les coefficients A_1, ..., A_{2p-1} seront déterminés par les équations de condition suivantes :

$$\frac{1}{1.2}+A_1=0,$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+A_2=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1.2\ldots2p}+\frac{A_1}{1.2\ldots(2p-1)}+\ldots+A_{2p-1}=0,$$

auxquelles on satisfera en posant

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad A_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{2p-1} = 0,$$
$$A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \qquad \ldots, \qquad A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} B_k}{1.2\ldots 2k}, \qquad \ldots,$$

$B_1, \ldots, B_k, \ldots$ désignant les nombres de Bernoulli. En effet, les équations qui résultent de la substitution de ces valeurs de A_1, A_2 coïncident avec celles qui déterminent ces nombres (*Calcul différentiel*, n° 269).

112. Prenons maintenant pour $\varphi(x)$ l'une quelconque des fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. On aura

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx,$$

et la formule (10) donnera, en y substituant, pour A_1, A_2, ..., leurs valeurs

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} & f(x)\,dx \\ &= h\frac{f(a+h)+f(a)}{2} - \tfrac{1}{2}B_1 h^2[f'(a+h) - f'(a)] + \ldots \\ &\quad + \frac{(-1)^{p-1} B_{p-1} h^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)}[f^{2p-3}(a+h) - f^{2p-3}(a)] + R,\end{aligned}$$

en désignant, pour abréger, par R l'intégrale définie

$$\begin{aligned}\int_0^h f^{2p}(a+h-u)\,du \Bigg[& \frac{u^{2p}}{1.2\ldots 2p} - \frac{1}{2}\,\frac{hu^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)} \\ & + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{h^2 u^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)} - \ldots\Bigg].\end{aligned}$$

En négligeant ce reste, on obtiendra la formule d'Euler.

113. Pour apprécier l'erreur commise, on remarquera que le polynôme entre parenthèses, dans la formule précédente, n'est autre chose que $h^{2p}\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)$, si l'on désigne par $\varphi_\alpha(n)$

le coefficient de x^α dans le développement de $\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$, suivant les puissances de x (*Calcul différentiel*, n° 270). Or, de l'équation

$$(11)\qquad \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = n + \varphi_1(n)x + \ldots + \varphi_\alpha(n)x^\alpha + \ldots,$$

qui sert de définition aux polynômes $\varphi_1, \ldots, \varphi_\alpha, \ldots$, on déduit aisément plusieurs propriétés essentielles de ces polynômes :

1° Ils s'annulent pour $n = 0$ et pour $n = 1$; car, dans l'un comme dans l'autre cas, on a $\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = n$.

2° Prenons la dérivée de l'équation précédente par rapport à n, il viendra

$$\frac{xe^{nx}}{e^x-1} = 1 + \varphi_1'(n)x + \ldots + \varphi_\alpha'(n)x^\alpha + \ldots.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{xe^{nx}}{e^x-1} &= x\left(\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\right) + \frac{x}{e^x-1}\\ &= x[n + \varphi_1(n)x + \ldots + \varphi_\alpha(n)x^\alpha + \ldots]\\ &\quad + \left(-\frac{x}{2} + 1 + \frac{B_1x^2}{1.2} - \frac{B_2x^4}{1.2.3.4} + \frac{B_3x^6}{1.2\ldots6} - \ldots\right).\end{aligned}$$

On aura donc, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x,

$$\begin{aligned}\varphi_{2k}'(n) &= \varphi_{2k-1}(n) + (-1)^{k+1}\frac{B_k}{1.2\ldots2k},\\ \varphi_{2k+1}'(n) &= \varphi_{2k}(n).\end{aligned}$$

On en conclut aisément que $\varphi_{2k+1}(n)$ ne peut reprendre plus de deux fois la même valeur dans l'intervalle de 0 à 1. En effet, s'il prenait trois fois la même valeur, sa dérivée $\varphi_{2k+1}'(n) = \varphi_{2k}(n)$ s'annulerait pour deux valeurs au moins comprises entre 0 et 1. Elle s'annule d'ailleurs à ces deux limites. Donc elle s'annulerait au moins quatre fois, et sa

dérivée $\varphi'_{2k}(n)$ au moins trois fois. Donc $\varphi_{2k-1}(n)$ reprendrait trois fois au moins la même valeur. Il en serait évidemment de même de $\varphi_{2k-3}(n)$, ... et enfin de $\varphi_1(n)$, ce qui est absurde, $\varphi_1(n)$ étant un polynôme du second degré.

D'ailleurs φ_{2k+1} s'annule aux deux limites 0 et 1; donc il ne pourra s'annuler entre ces deux limites, et conservera toujours le même signe.

Cela posé, dans l'intégrale

$$R = \int_0^h f^{2p}(a+h-u)h^{2p}\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

$\frac{u}{h}$ varie de 0 à 1 dans les limites de l'intégration. Le facteur $\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)$ ne change donc pas de signe, et l'on pourra poser

$$R = \mu h^{2p}\int_0^h \varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

μ étant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum du facteur $f^{2p}(a+h-u)$. L'argument $a+h-u$ variant de $a+h$ à a dans le cours de l'intégration, on aura évidemment

$$\mu = f^{2p}(a+\theta h),$$

θ étant compris entre 0 et 1.

On a, d'autre part, en posant $\frac{u}{h} = t$,

$$\begin{aligned}\int_0^h \varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du &= h\int_0^1 \varphi_{2p-1}(t)\,dt \\ &= h\int_0^1\left[\varphi'_{2p}(t) + \frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}\right]dt \\ &= h\left[\varphi_{2p}(t) + \frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}t\right]_0^1,\end{aligned}$$

et comme $\varphi_{2p}(t)$ s'annule aux deux limites, on aura enfin

$$R = f^{2p}(a+\theta h)\frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}h^{2p+1}.$$

114. Les nombres B_1, B_2, ... croissant avec une rapidité extrême, la formule d'Euler deviendra le plus souvent divergente si l'on fait croître p indéfiniment. Toutefois, en donnant à ce nombre une valeur convenable, ni trop petite ni trop grande, on obtiendra généralement une approximation largement suffisante. L'expression du reste, donnée ci-dessus, permettra d'ailleurs d'agir en sûreté.

115. Pour appliquer cette formule au calcul de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

il suffira évidemment de poser $h = b - a$.

Lorsque le champ de l'intégrale est un peu étendu, il conviendra, pour obtenir plus d'exactitude, de le subdiviser en plusieurs portions égales, en posant

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \dots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx.$$

Appliquant la formule d'Euler à chacune de ces intégrales partielles et ajoutant les résultats, il viendra

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = h\left\{\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \dots + f[a+(n-1)h] + \tfrac{1}{2}f(b)\right\} \\ - \tfrac{1}{2}B_1 h^2[f'(b) - f'(a)] + \dots \\ + \frac{(-1)^{p-1}B_{p-1}h^{2p-2}}{1.2\dots(2p-2)}[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)],\end{aligned}$$

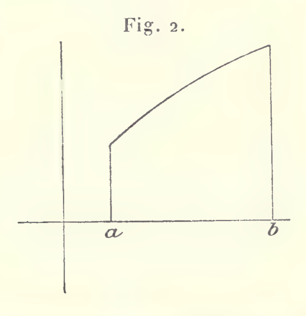
et le reste R sera donné par la formule

$$n\mu\frac{(-1)^p B_p}{1.2\dots 2p}h^{2p+1},$$

μ étant compris entre le minimum et le maximum de $f^{2p}(x)$ dans l'intervalle de a à b.

116. Troisième méthode : *Interpolation.* — L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est représentée géométriquement par l'aire du trapèze curviligne T compris entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$ (*fig.* 2).

Fig. 2.

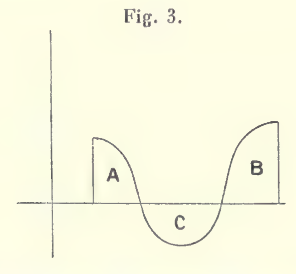


Cette aire est représentée, en effet, par l'intégrale double $\mathrm{S}\,dx\,dy$ étendue au trapèze T. Dans ce champ, x varie de a à b. A chaque valeur de x correspondent d'ailleurs des points du champ dont l'ordonnée varie de o à $f(x)$. On aura donc

$$\mathrm{S}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque. — L'aire ainsi calculée sera affectée du signe + ou du signe — suivant que $f(x)$ est positif ou négatif ; et

Fig. 3.



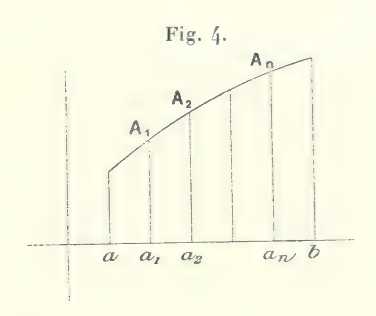
si la courbe traverse l'axe des x, comme dans la *fig.* 3, l'in-

tégrale représentera la différence entre la somme des aires partielles A, B, situées au-dessus de cet axe, et l'aire C située au-dessous.

Le calcul de l'intégrale revient donc à la mesure de l'aire de T. Celle-ci peut se faire approximativement de la manière suivante :

Marquons sur la ligne ab (*fig.* 4) n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et mesurons les ordonnées correspondantes $y_1 = a_1 A_1, \ldots,$

Fig. 4.



$y_n = a_n A_n$. Par les points $A_1, \ldots, A_n$ faisons passer une autre courbe $y = \varphi(x)$. Cette courbe, ayant une série de points communs avec la proposée dans l'intervalle ab, s'en éloignera vraisemblablement assez peu, et pourra lui être substituée dans le calcul de l'aire. Ce calcul pourra dès lors s'effectuer sans difficulté, si l'on a eu soin de choisir pour $\varphi(x)$ une fonction dont on connaisse l'intégrale indéfinie.

Le plus habituellement, on prend pour $\varphi(x)$ un polynôme de degré $n - 1$. On voit immédiatement que ce polynôme aura l'expression suivante :

$$\varphi(x) = y_1 \frac{(x - a_2)\ldots(x - a_n)}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n)} + \ldots + y_n \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})}{(a_n - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1})}.$$

En effet, pour $x = a_1$, tous les termes de cette expression s'annulent, sauf le premier, qui se réduit à y_1 ; pour $x - a_2$, tous s'annulent, sauf le second, qui se réduit à y_2, etc.

Intégrant ce polynôme de a à b, on aura, pour l'aire cherchée,

$$y_1 I_1 + \ldots + y_n I_n,$$

en désignant, pour abréger, par $I_1, \ldots, I_n$ les intégrales

$$\int_a^b \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}dx,$$

lesquelles sont indépendantes de la nature de la courbe $y=f(x)$.

117. Le calcul de ces intégrales n'offre aucune difficulté. On le simplifiera un peu en changeant de variable, de telle sorte que les limites deviennent 0 et 1. A cet effet, on posera

$$x = a + (b-a)t.$$

Soit, en outre,

$$a_1 = a + (b-a)\theta_1, \quad \ldots, \quad a_n = a + (b-a)\theta_n;$$

il viendra

$$I_1 = (b-a)J_1, \quad \ldots, \quad I_n = (b-a)J_n,$$

en posant, pour abréger,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{(t-\theta_2)\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_1-\theta_2)\ldots(\theta_1-\theta_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$J_n = \int_0^1 \frac{(t-\theta_1)\ldots(t-\theta_{n-1})}{(\theta_n-\theta_1)\ldots(\theta_n-\theta_{n-1})}.$$

Ces nouvelles intégrales ne dépendent plus de l'amplitude du champ d'intégration, mais seulement des rapports $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des intervalles $a_1-a, \ldots, a_n-a$ à l'intervalle total $b-a$. Si l'on détermine ces rapports toujours de la même manière, on pourra calculer, une fois pour toutes, les constantes $J_1, \ldots, J_n$; cela fait, quelle que soit la courbe $f(x)$, on n'aura plus, pour trouver une valeur approchée de son aire, qu'à mesurer ou calculer les ordonnées $y_1, \ldots, y_n$, et à les substituer dans la formule

$$(b-a)(y_1J_1 + \ldots + y_nJ_n).$$

118. Cotes, qui a indiqué cette méthode, suppose les ordonnées équidistantes, et pose, en conséquence, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{1}{n-1}$, $\theta_3 = \frac{2}{n-1}$, ..., $\theta_n = 1$.

Nous allons effectuer le calcul en supposant $n = 3$. On aura, dans ce cas,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{(t-\frac{1}{2})(t-1)}{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\, dt = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t\right)_0^1 = \tfrac{1}{6}.$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} = \int_0^1 (-4t^2 + 4t)\, dt = (-\tfrac{4}{3}t^3 + \tfrac{4}{2}t^2)_0^1 = \tfrac{4}{6},$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{t(t-\frac{1}{2})}{1(1-\frac{1}{2})} dt = \int_0^1 (2t^2 - t)\, dt = (\tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2)_0^1 = \tfrac{1}{6}.$$

L'aire cherchée $\mathcal{A}$ sera donc donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

On trouverait de même, pour $n = 4$,

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{8}(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4);$$

pour $n = 5$,

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{90}(7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5),$$

. . . .

119. Gauss choisit autrement les quantités $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Il se propose de les déterminer de manière à atténuer autant que possible les chances d'erreur résultant de l'application de la méthode.

Pour évaluer cette erreur, concevons qu'on ait développé $f(x)$ en une série de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m + \ldots;$$

on aura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma\alpha_m \int_a^b x^m\,dx.$$

D'autre part, $\varphi(x)$ étant une fonction linéaire des ordonnées $y_1, \ldots, y_n$, on aura évidemment

$$\varphi(x) = \Sigma\alpha_m \varphi_m(x),$$

$\varphi_m(x)$ étant ce que deviendrait $\varphi(x)$ si $f(x)$ se réduisait à x^m.

L'erreur commise en substituant $\varphi(x)$ à $f(x)$ sera

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \Sigma\alpha_m k_m,$$

en posant, pour abréger,

$$\int_a^b [x^m - \varphi_m(x)]\,dx = k_m.$$

120. On peut donner une autre forme à cette intégrale. Effectuons, en effet, la division de x^m par le polynôme de degré n

$$(x - a_1)\ldots(x - a_n) = \mathrm{P}(x);$$

il viendra

$$x^m = \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}_m(x) + \mathrm{R}_m(x),$$

$\mathrm{Q}_m(x)$ étant égal à zéro si $m < n$, à un polynôme de degré $m - n$ dans le cas contraire, et $\mathrm{R}_m(x)$ étant un polynôme de degré $< n$. D'ailleurs $\mathrm{R}_m(x)$, devenant égal à x^m pour les valeurs $a_1, \ldots, a_n$ qui annulent $\mathrm{P}(x)$, ne sera autre chose que $\varphi_m(x)$.

On aura donc

$$x^m - \varphi_m(x) = \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}_m(x),$$

d'où

$$k_m = \int_a^b \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}_m(x)\,dx;$$

$Q_0(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$ étant nuls, on aura

$$k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0;$$

mais k_n, k_{n+1}, ... différeront en général de zéro.

Néanmoins, si l'on peut déterminer les n quantités $a_1, \ldots, a_n$ qui figurent dans l'expression de $P(x)$, de manière à satisfaire aux n relations

$$(12) \qquad k_n = 0, \qquad \ldots, \qquad k_{2n-1} = 0,$$

on fera ainsi disparaître de l'expression de l'erreur les termes en $\alpha_n, \ldots, \alpha_{2n-1}$ lesquels sont vraisemblablement les plus importants, pour peu que la convergence de la série $\Sigma \alpha_m x^m$ soit rapide.

121. Pour satisfaire aux équations (12), il suffira, ainsi qu'on va le voir, de poser

$$P(x) = \frac{d^n [(x-a)(x-b)]^n}{dx^n}.$$

Tout d'abord, les racines $a_1, \ldots, a_n$ du polynôme d'ordre n ainsi défini seront réelles et comprises entre a et b, ainsi que cela est nécessaire.

En effet, le polynôme $[(x-a)(x-b)]^n = X$ ayant n racines égales à a et n racines égales à b, sa dérivée X' aura $n-1$ racines égales à a, $n-1$ égales à b et une racine réelle ξ comprise entre a et b : cela résulte du théorème de Rolle; X'', dérivée de X', aura de même $n-2$ racines égales à a, $n-2$ racines égales à b et deux racines η_1, η_2 respectivement comprises entre a et ξ, et entre ξ et b; et ainsi de suite jusqu'à $X^{(n)}$, qui n'est autre que $P(x)$.

En second lieu, chacune des quantités $k_n, \ldots, k_{2n-1}$ est de la forme

$$\int_a^b QX^{(n)}\, dx,$$

Q étant un polynôme d'ordre $< n$. Or cette intégrale est

nulle. En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_a^b QX^{(n)}\,dx = (QX^{(n-1)} - Q'X^{(n-2)} + \ldots \pm Q^{(n-1)}X)_a^b$$
$$\mp \int_a^b Q^{(n)}X\,dx.$$

Or la partie tout intégrée s'annule pour $x = a$ et $x = b$, chacune des quantités $X^{(n-1)}$, $X^{(n-2)}$, ..., X s'annulant pour ces limites. D'autre part, l'intégrale s'annule, car, Q étant d'ordre $< n$, sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est nulle.

122. Il conviendra, ainsi que nous l'avons expliqué, de transformer l'intégrale de telle sorte qu'elle ait pour limites o et 1; $P(x) = \dfrac{d^n[x(x-1)]^n}{dx^n}$ sera alors un polynôme parfaitement défini, et l'on pourra calculer une fois pour toutes ses racines, ainsi que les valeurs correspondantes des intégrales J_1, J_2, ...

Si les limites de l'intégrale, au lieu d'être o et 1, étaient -1 et $+1$, le polynôme $P(x) = \dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ se confondrait, à un facteur constant près, avec le polynôme X_n de Legendre, que nous avons précédemment étudié (*Calcul différentiel*, **273** à **275**).

123. La méthode de Gauss, étant en général celle qui donne le résultat le plus précis pour un nombre déterminé d'ordonnées, devra être employée de préférence lorsque ces ordonnées seront difficiles à calculer. Mais, s'il s'agit de trouver l'aire d'une courbe graphique, sur laquelle les ordonnées peuvent être mesurées immédiatement, on obtiendra de bons résultats par les méthodes plus simples que nous allons indiquer.

124. *Méthode des trapèzes.* — On divise l'aire à évaluer en n parties par des ordonnées équidistantes. A chacun des

trapèzes curvilignes ainsi obtenus, on substitue le trapèze rectiligne ayant les mêmes sommets. En désignant par y_0, ..., y_n les ordonnées, ces nouveaux trapèzes auront pour aires respectives

$$\frac{y_0+y_1}{2}\,\frac{b-a}{n},\quad \frac{y_1+y_2}{2}\,\frac{b-a}{n},\quad \ldots,\quad \frac{y_n+y_{n-1}}{2}\,\frac{b-a}{n},$$

et l'aire totale sera

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

125. *Méthode de Simpson.* — Simpson divise encore l'aire en n parties, mais dans chacun des trapèzes curvilignes il mesure l'ordonnée médiane, pour substituer à la courbe une parabole, suivant la méthode de Cotes. Il trouve ainsi, pour les aires des trapèzes successifs, en désignant par $y_0, \ldots, y_{2n}$ les ordonnées,

$$(y_0+4y_1+y_2)\frac{b-a}{6n},\quad (y_2+4y_3+y_4)\frac{b-a}{6n},\quad \ldots,$$

et pour l'aire totale

$$[y_0+y_{2n}+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})]\frac{b-a}{6n}.$$

IV. — Applications géométriques.

126. Rectification des courbes. — Une courbe plane étant définie par deux équations

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),$$

on a vu que la différentielle de l'arc est donnée par la formule

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

La longueur de l'arc s_1-s_0, compris entre les points t_0

et t_1, sera donc donnée par l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

1° Appliquons cette formule à la cycloïde. On aura (t. I, n° 457)

$$ds = a\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a \sin \tfrac{1}{2} t\, dt,$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} 2a \sin \tfrac{1}{2} t\, dt = \left[-4a\cos\tfrac{1}{2} t\right]_{t_0}^{t_1}.$$

On aura, en particulier, la longueur de l'arc correspondant à une révolution entière du cercle générateur en prenant $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$. La longueur cherchée sera $8a$.

2° Pour la parabole

$$y^2 = 2px,$$

on aura, en prenant y pour variable indépendante,

$$ds = \sqrt{y^2 + p^2}\, \frac{dy}{p},$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \frac{1}{p}\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

L'intégration par parties donne

$$\int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = y\sqrt{y^2 + p^2} - \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2 + p^2}};$$

mais on a

$$\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

et, en substituant dans l'équation précédente,

$$2\int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = y\sqrt{y^2 + p^2} + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$
$$= y\sqrt{y^2 + p^2} + p^2 \log\left(\sqrt{y^2 + p^2} + y\right) + c.$$

La longueur $s_1 - s_0$ de l'arc compris entre les points y_0,

y_1, sera donc

$$\left[y\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\log\left(\sqrt{y^2+p^2}+y\right)\right]_{y_0}^{y_1}.$$

3° Considérons enfin l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

On a

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

ou, en posant $b^2 = a^2(1-e^2)$,

$$ds = a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt.$$

En posant

$$t = \frac{\pi}{2} + u,$$

on voit que l'arc sera représenté par une intégrale elliptique de seconde espèce

$$\int_{u_0}^{u_1} a\sqrt{1-e^2\sin^2 u}\,du.$$

On peut prendre, pour variable indépendante, au lieu de t ou de u, la *latitude* λ, c'est-à-dire l'angle de la normale avec le grand axe. On a

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{tang} t,$$

d'où

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}^2\lambda}} = \frac{a\cos\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}} = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}},$$

$$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = b\cos t\sqrt{\operatorname{tang}^2\lambda + 1} = \frac{b\cos t}{\cos\lambda}$$

et enfin

$$\frac{a}{b}\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{d\lambda}{\cos^2\lambda}, \qquad dt = \frac{b}{a}\frac{\cos^2 t}{\cos^2\lambda}\,d\lambda,$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{b^2}{a}\frac{\cos^3 t}{\cos^3\lambda}\,d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'excentricité e est faible, on obtiendra aisément une valeur approchée de cette intégrale en développant la fonction à intégrer suivant les puissances entières de e^2; dans les coefficients figureront les intégrales

$$I_m = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sin^{2m}\lambda\, d\lambda,$$

que nous savons calculer.

127. Si la courbe proposée est définie par une équation

$$r = f(\omega),$$

entre les coordonnées polaires ρ et ω, on aurait, comme on sait,

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\omega$$

et, par suite,

$$s_1 - s_0 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\omega.$$

128. Enfin, une courbe gauche étant définie par trois équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

on aura

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

et l'arc $s_1 - s_0$ sera donné par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

129. Aires planes. — Considérons un domaine plan D, borné par une ou plusieurs courbes. Supposons, pour plus de simplicité, que pour chacune de ces courbes

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

les fonctions f et φ admettent des dérivées continues, sauf pour un nombre limité de valeurs de t. L'aire de D sera

donnée par l'intégrale double

$$\mathbf{S}\, dx\, dy,$$

étendue à tout l'intérieur de ce domaine.

Mais cette intégrale double se ramène aisément à une intégrale simple.

130. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer l'aire comprise entre les deux ordonnées $y = f(x)$, l'axe des x et les deux ordonnées $x = x_0$, $x = x_1$.

Elle est donnée (**116**) par l'intégrale simple

$$\int_{x_0}^{x_1} y\, dx.$$

Si la courbe est définie par deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

on pourra prendre t pour variable indépendante, et l'intégrale se transformera en la suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) f'(t)\, dt.$$

131. 1° Admettons, par exemple, que la courbe C soit l'hyperbole équilatère

$$xy = a,$$

on aura pour l'aire cherchée

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{a\, dx}{x} = a \log \frac{x_1}{x_0}.$$

2° Si C est la parabole

$$y^2 = 2px,$$

cette aire sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2px}\, dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p}\left(x_1^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

3° Si C représente la moitié supérieure de l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

on aura

$$y\,dx = -ab\sin^2 t\,dt = -ab\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt,$$

et l'aire cherchée sera

$$\int_{t_0}^{t_1} -ab\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \left[-ab\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_{t_0}^{t_1}.$$

En posant $t_0 = \pi$, $t_1 = 0$, nous voyons que l'aire de la demi-ellipse sera $\frac{\pi ab}{2}$; celle de l'ellipse entière sera donc égale à πab.

4° Enfin, si C est la cycloïde,

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1-\cos t),$$

on aura

$$y\,dx = a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

et

$$\int y\,dx = a^2\left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)_{t_0}^{t_1}.$$

Faisons en particulier $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$; nous voyons que l'aire comprise entre l'axe des x et la cycloïde pour une révolution complète du cercle générateur est égale à $3\pi a^2$.

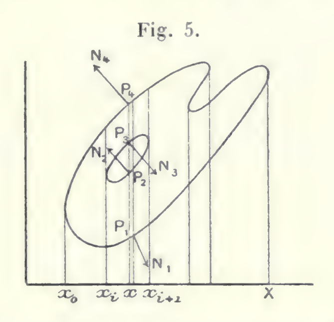
132. Supposons plus généralement que le domaine D, dont on demande l'aire, soit borné par une ou plusieurs lignes rectifiables dont chacune soit décomposable en un nombre fini d'arcs partiels A, A_1, ..., tels que sur chacun d'eux x varie constamment dans le même sens (ou reste constant). Soient x_0, X le maximum et le minimum de x dans le domaine D.

Par les extrémités des arcs A, A_1, ..., menons des parallèles x_0, x_1, x_2, ..., X à l'axe des y.

Considérons la portion du champ comprise dans la bande

qui sépare deux parallèles consécutives x_i, x_{i+1} (*fig.* 5). Une parallèle x à l'axe des y menée dans cette bande rencontrera la frontière de D en $2n$ points P_1, P_2, P_3, P_4, ...,

Fig. 5.



le nombre n étant constant dans une même bande, mais pouvant varier d'une bande à la suivante (il est égal à 2 dans la figure ci-jointe).

Soient $y_1, y_2, \ldots$ les ordonnées des points P_1, P_2, ... L'aire de la portion du champ comprise entre x_i et x_{i+1} sera évidemment égale à

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\,(-y_1+y_2-y_3+y_4-\ldots).$$

Plus généralement, si, au lieu de l'intégrale $\mathbf{S}\, dx\, dy$, on voulait déterminer l'intégrale $\mathbf{S}\, \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy$, où F désigne une fonction de x, y, on aurait, pour la partie du champ comprise dans la bande $x_i x_{i+1}$, en désignant par F_1, F_2, ... les valeurs de cette fonction aux points (x, y_1), (x, y_2), ...,

$$\mathbf{S}\, \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\,(-F_1+F_2-F_3+F_4-\ldots).$$

L'intégrale totale s'obtiendra en faisant la somme des intégrales partielles ci-dessus, relatives aux diverses bandes.

133. Si nous supposons que le long de chacun des arcs A, A_1, ... il existe une tangente, dont la direction varie d'une

façon continue avec l'arc s, on pourra donner une forme élégante au résultat précédent. Soient, en effet, ds_1, ds_2, ... les éléments d'arc voisins de P_1, P_2, ... qui se projettent sur l'élément dx; N_1, N_2, ... les normales à ces éléments, menées dans le sens extérieur au champ; N_1Y, N_2Y, ... les angles qu'elles forment avec l'axe des y positifs; on aura évidemment

$$dx = -ds_1 \cos N_1Y = +ds_2 \cos N_2Y = -ds_3 \cos N_3Y = \ldots,$$

d'où

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx(-F_1 + F_2 - F_3 + \ldots) = \int F \cos NY\, ds,$$

la sommation étant étendue à toute la longueur des arcs contenus dans la bande $x_i x_{i+1}$. Sommant les résultats relatifs aux diverses bandes, on voit que l'intégrale double $\mathbf{S} \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy$ est égale à l'intégrale simple

$$\int F \cos NY\, ds,$$

étendue à toute la frontière du champ.

Si la frontière était constituée en partie par des parallèles aux y, il semble tout d'abord que ces lignes devraient être exclues de la sommation ci-dessus; mais, comme $\cos NY$ est nul tout le long de ces lignes, on peut leur étendre la sommation sans rien changer au résultat.

Si nous posons en particulier $F = y$, nous aurons, pour l'expression de l'aire $\mathbf{S}\, dx\, dy$, l'intégrale simple

$$\int y \cos NY\, ds.$$

134. Lorsqu'une courbe fermée C présente des points multiples, la distinction entre les normales intérieure et extérieure ne peut être maintenue. On peut toutefois distinguer encore deux sens dans la normale, en appelant, par exemple, normale positive celle qui reste en chaque point à gauche d'un observateur décrivant la ligne C dans un sens déterminé.

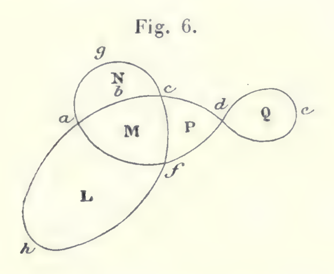
Il est aisé de déterminer dans ce cas la signification de l'intégrale

$$\int y \cos \mathrm{NY}\, ds,$$

prise sur cette ligne, N désignant, pour fixer les idées, la normale positive.

Considérons, par exemple, le contour à quatre points multiples *habcdedfagcfh* représenté par la *fig.* 6. Il partage le plan en six régions, dont cinq, L, M, N, P, Q sont bornées, la dernière s'étendant jusqu'à l'infini.

Fig. 6.



Soit a l'un des points multiples, choisi à volonté. Le contour proposé sera formé de la succession des deux suivants *abcdedfa* et *agcfha*. Ce dernier n'a plus de point multiple et, comme la normale positive lui est extérieure, l'intégrale $\int y \cos \mathrm{NY}\, ds$ prise suivant ce contour sera égale à l'aire qu'il enveloppe, soit $\mathrm{L} + \mathrm{M} + \mathrm{N}$. L'autre contour *abcdedfa*, qui a encore un point multiple d, est la somme des deux contours partiels *ded* et *abcdfa* qui n'ont plus de point multiple. Sur le premier, *ded*, la normale positive est intérieure à l'aire Q ; cos NY sera égal et contraire à ce qu'il aurait été si l'on eût pris la normale extérieure ; l'intégrale obtenue sera donc $-\mathrm{Q}$. Sur le second, la normale positive étant extérieure, l'intégrale sera $\mathrm{M} + \mathrm{P}$.

Ajoutant les résultats qui précèdent, on voit que l'intégrale $\int y \cos \mathrm{NY}\, ds$ étendue à tout le contour sera égale à

$$\mathrm{L} + 2\mathrm{M} + \mathrm{N} + \mathrm{P} - \mathrm{Q}.$$

On pourrait opérer de même pour un contour quelconque, et l'on obtiendrait dans tous les cas un résultat de la forme

$$\lambda L + \mu M + \nu N + \ldots,$$

L, M, N, ... désignant les aires des diverses régions du plan bornées par le contour, et λ, μ, ν, ... des entiers positifs ou négatifs.

135. Si nous remplaçons les coordonnées rectangles x, y par des coordonnées polaires r, ω, l'aire sera donnée par l'intégrale double

$$\mathbf{S}\, r\, dr\, d\omega.$$

Celle-ci peut, comme la précédente, se ramener à une intégrale simple.

En effet, soit en premier lieu à déterminer l'aire du triangle curviligne compris entre les deux rayons vecteurs ω_0 et ω_1 et la courbe

$$r = f(\omega),$$

la fonction $f(\omega)$ ayant une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de ω comprise entre ω_0 et ω_1. L'aire cherchée sera évidemment

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_0^r r\, dr = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{r^2}{2}\, d\omega.$$

L'aire d'une courbe fermée, enveloppant l'origine, sera donnée par la même formule, en y posant $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 2\pi$. Si l'origine est sur la courbe, il faudra poser $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \pi$.

136. Considérons plus généralement un champ D borné par une ou plusieurs lignes, décomposables en un nombre finis d'arcs partiels A, A_1, ... tels : 1° que sur chacun d'eux ω varie constamment dans le même sens (ou reste constant); 2° que le long de chacun d'eux existe une tangente, dont la direction varie d'une manière continue.

Joignons les extrémités des arcs A, A_1, ... à l'origine; et, si l'un de ces arcs est une ligne fermée, menons en outre par l'origine deux autres droites arbitraires. Ces droites décomposeront le plan en secteurs.

Considérons la portion du champ comprise dans le secteur déterminé par deux de ces droites, ω_i, ω_{i+1}. Une droite menée par l'origine, avec un azimut compris entre ω_i et ω_{i+1}, coupera la frontière du champ en un certain nombre de points; soit n le nombre des points de sortie P_0, P_2, ...; celui des points d'entrée, P_1, ..., sera n ou $n-1$, suivant que l'origine sera à l'extérieur ou à l'intérieur du champ.

Soient r_0, r_1, r_2, ... les rayons vecteurs de ces points; N_0R, N_1R, ... les angles que la normale extérieure au champ y forme avec le prolongement du rayon vecteur. On aura évidemment

$$\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} d\omega \int r\,dr = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{1}{2}\,d\omega\,(r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - \ldots).$$

Soient d'ailleurs ds_0, ds_1, ... les éléments des arcs frontières qui ont pour perspective l'arc $d\omega$ sur un cercle de rayon 1 tracé autour de l'origine : on aura évidemment

$$d\omega = \frac{ds_0 \cos N_0R}{r_0} = -\frac{ds_1 \cos N_1R}{r_1} = \ldots;$$

l'intégrale précédente se réduira donc à

$$\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{1}{2}(r_0 \cos N_0R\,ds_0 + r_1 \cos N_1R\,ds_1 + \ldots) = \int \frac{1}{2}\,r \cos NR\,ds,$$

la sommation étant étendue à tous les éléments des arcs frontières compris dans le secteur $\omega_i\omega_{i+1}$.

Chaque secteur donnant un résultat analogue, l'aire totale sera donnée par la même intégrale, étendue à toute la frontière du champ.

Le même raisonnement, appliqué à l'intégrale double plus générale

$$\mathbf{S}\,\frac{\partial F}{\partial r}\,dr\,d\omega,$$

montrerait qu'elle est égale à l'intégrale simple

$$\int \frac{F \cos NR}{r} ds.$$

137. Aire d'une surface courbe. — L'aire d'une portion de surface courbe, définie par les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v), \qquad z = \varphi_2(u, v),$$

est donnée par l'intégrale double

$$S\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

A, B, C désignant les jacobiens des fonctions $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, prises deux à deux.

Il existe deux cas assez étendus où l'on peut effectuer l'une des deux intégrations nécessaires pour le calcul de cette intégrale double.

138. Considérons, en premier lieu, la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une courbe. (Ce cas comprend celui des surfaces de révolution.) Prenons pour axe des z l'axe de ce mouvement, et soient

$$X = f(u), \qquad Z = \varphi(u)$$

les équations de la section de la surface par le plan des xy. Lorsqu'elle aura tourné d'un angle v, elle se sera élevée de mv, m désignant une constante. Le point (X, Y) sera donc venu en un point (x, y, z), où

$$x = X \cos v, \qquad y = X \sin v, \qquad z = Z + mv.$$

Les deux variables indépendantes seront u et v, et l'on aura

$$A = \quad X' \sin v . m - X \cos v . Z',$$

$$B = -Z' X \sin v \;\; - m X' \cos v,$$

$$C = X' \cos v . X \cos v + X \sin v . X' \sin v = XX',$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{m^2 X'^2 + X^2 Z'^2 + X^2 X'^2}.$$

Cette expression ne dépendant que de u, l'intégration par rapport à v sera immédiate.

139. Cherchons, d'après cette formule, l'aire du tore engendré par la révolution du cercle

$$X = a + r\cos u, \qquad Z = r\sin u.$$

On aura

$$m = 0, \qquad Z'^2 + X'^2 = r^2,$$

et la fonction à intégrer se réduira à

$$rX = r(a + r\cos u).$$

On aura à intégrer de 0 à 2π par rapport à v, puis par rapport à u. La première intégration donnera

$$2\pi r(a + r\cos u)$$

et la seconde

$$[2\pi r(au + r\sin u]_0^{2\pi} = 2\pi r.2\pi a.$$

140. Le second cas est celui des surfaces réglées, définies par les équations

$$x = a + bu, \qquad y = a_1 + b_1 u, \qquad z = a_2 + b_2 u,$$

a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 étant des fonctions d'un paramètre v.

En désignant leurs dérivées par a', b', ..., on aura

$$C = b(a'_1 + b'_1 u) - b_1(a' + b'u),$$

. . . .

Par suite, $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ sera de la forme

$$\sqrt{M + 2Nu + Pu^2},$$

où M, N, P ne dépendent que de v. Or nous savons effectuer l'intégration indéfinie de ce radical par rapport à u.

141. Considérons comme application le paraboloïde hy-

perbolique défini par les équations

$$x = a + b\,u + c\,v + d\,uv,$$
$$y = a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv,$$
$$z = a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv,$$

a, b, ... étant des constantes.

Chacun des jacobiens A, B, C sera de la forme

$$\alpha + \beta u + \gamma v.$$

L'expression à intégrer sera donc de la forme

$$\sqrt{\mathrm{F}}\, du\, dv,$$

F étant une fonction du second degré en u, v et positive.

Proposons-nous de calculer l'aire de la portion de surface comprise entre les quatre génératrices $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$. Prenons pour variables indépendantes, au lieu de u et v, de nouvelles variables ξ, η fonctions linéaires de u et de v. Ces fonctions pourront être choisies de manière à ramener F à la forme

$$m(1 + \xi^2 + \eta^2),$$

m étant un facteur constant. Le jacobien de la transformation est également une constante. Enfin on voit aisément que le nouveau champ d'intégration sera un parallélogramme. Or un parallélogramme (et généralement un polygone quelconque) peut être considéré comme une somme algébrique de triangles ayant un sommet à l'origine des coordonnées.

Cherchons donc la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{S}\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta$$

dans un semblable triangle.

Posons

$$\xi = r\cos\omega, \qquad \eta = r\sin\omega,$$

l'intégrale se transformera en

$$\mathrm{S}\sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\omega.$$

Les côtés du triangle qui passent par l'origine ont des

équations de la forme

$$\omega = \omega_0, \qquad \omega = \omega_1$$

et le côté opposé une équation de la forme

$$r = \frac{p}{\cos(\omega - \lambda)},$$

p et λ étant des constantes. La première intégration, par rapport à r, peut s'effectuer, et donne comme résultat

$$\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{p}{\cos(\omega-\lambda)}} d\omega = \frac{1}{3}\,\frac{\left[\cos^2(\omega-\lambda)+p^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\cos^3(\omega-\lambda)}\,d\omega - \frac{1}{3}\,d\omega.$$

Il restera à intégrer cette expression de ω_0 à ω_1. Cette intégration peut s'effectuer aisément en posant, dans le premier terme de la différentielle proposée,

$$\sin(\omega - \lambda) = t.$$

Il sera transformé en

$$\frac{1}{3}(1 - t^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{dt}{(1-t^2)^2},$$

expression intégrable par les méthodes connues.

142. Considérons enfin l'ellipsoïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cherchons l'aire S de la moitié de cet ellipsoïde située au-dessus du plan des xy.

Décomposons l'ellipse de base

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en éléments infiniment petits $d\sigma$. Chacun d'eux sera la projection d'un élément de l'aire cherchée, égal à

$$\frac{d\sigma}{\cos\varphi},$$

φ désignant l'angle que la normale à l'élément fait avec l'axe des z. Nous aurons donc à calculer l'intégrale double

$$\mathrm{S}\frac{d\sigma}{\cos\varphi}.$$

Or on a

$$\cos\varphi = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le lieu des points pour lesquels φ est constant sera donc la courbe définie par l'équation (1) et la suivante

$$\cos^2\varphi\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) = \frac{z^2}{c^4}.$$

Éliminant z^2, on aura, pour la projection de cette courbe sur le plan des xy, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2\varphi\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}\cos^2\varphi\right) = 1-\cos^2\varphi,$$

dont l'aire U sera

$$\pi ab\,\frac{1-\cos^2\varphi}{\sqrt{(1-\alpha^2\cos^2\varphi)(1-\beta^2\cos^2\varphi)}},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{a^2-c^2}{a^2} = \alpha^2, \qquad \frac{b^2-c^2}{b^2} = \beta^2.$$

La somme des éléments $d\sigma$, compris entre les ellipses φ et $\varphi + d\varphi$, sera évidemment $d\mathrm{U}$, et la bande correspondante de l'ellipsoïde aura évidemment pour aire $\frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi}$. On obtiendra S en sommant toutes ces bandes, de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui conduit à déterminer l'intégrale simple

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi}.$$

143. Considérons d'abord l'intégrale indéfinie.
L'intégration par parties donnera

$$\int \frac{dU}{\cos\varphi} = \frac{U}{\cos\varphi} - \int U\, d\frac{1}{\cos\varphi},$$

et, en posant

$$\alpha\cos\varphi = \sin\psi, \qquad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = k^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\pi ab}U = \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\psi}{\cos\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

on a

$$d\frac{1}{\cos\varphi} = \alpha d\frac{1}{\sin\psi} = -\alpha\frac{\cos\psi\, d\psi}{\sin^2\psi},$$

$$\frac{1}{\pi ab}\int\frac{dU}{\cos\varphi} = \frac{\alpha^2 - \sin^2\psi}{\alpha\sin\psi\cos\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} + \int\frac{\alpha^2 - \sin^2\psi}{\alpha\sin^2\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}.$$

Mais, en remplaçant, dans la dernière intégrale, α^2 par $\alpha^2(1 - k^2\sin^2\psi + k^2\sin^2\psi)$, elle deviendra

$$\left(-\frac{1}{\alpha} + \alpha k^2\right)\int\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} + \alpha\int\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}{\sin^2\psi}d\psi.$$

Or

$$\frac{d\psi}{\sin^2\psi} = -d\cot\psi;$$

on aura donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}{\sin^2\psi}d\psi \\
&= -\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\cot\psi - \int\frac{k^2\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}d\psi \\
&= -\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\cot\psi \\
&\quad - (k^2 - 1)\int\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} - \int\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi.
\end{aligned}$$

Réunissant ces résultats, il vient

$$\frac{1}{\pi ab}\int\frac{dU}{\cos\varphi}=\frac{\alpha^2-\sin^2\psi}{\alpha\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}-\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cot\psi$$
$$+\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}-\alpha\int\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

144. Il ne reste plus qu'à assigner les limites de l'intégration. Or, pour $\varphi=0$, on a $\psi=\arcsin\alpha$; pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\psi=0$.

On remarquera que la substitution $\psi=0$ rend infinis les deux termes tout intégrés. Mais leur différence s'annule; ce sont, en effet, des fonctions impaires, dont les valeurs principales $\frac{\alpha}{\psi}$ et $-\frac{\alpha}{\psi}$ se détruisent.

On obtiendra ainsi la formule

$$\frac{1}{\pi ab}S=\sqrt{1-k^2\alpha^2}\sqrt{1-\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$
$$+\alpha\int_0^{\arcsin\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

L'aire cherchée s'exprime donc par des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

145. Volumes. — Ils sont donnés par l'intégrale triple

$$S\,dx\,dy\,dz;$$

mais celle-ci se ramène aisément à une intégrale double.

Supposons, en premier lieu, qu'on demande le volume d'un cylindre parallèle à Oz et limité, d'un côté, au plan des x, y, de l'autre à une surface S définie par les équations

$$x=\varphi(u,v),\qquad y=\varphi_1(u,v),\qquad z=\varphi_2(u,v).$$

A chaque point (x, y) de la base du cylindre correspondent des points du champ, dont le z varie de 0 à $\varphi_2(u,v)$. On aura donc, en effectuant une première intégration par rapport à z,

$$S\,dx\,dy\,dz=S\varphi_2\,dx\,dy=S\varphi_2|C|\,du\,dv,$$

C désignant le jacobien de φ et de φ_1, et l'intégrale double étant étendue à tout l'intérieur de la base du cylindre.

146. Cette intégrale double se ramène elle-même à une intégrale simple :

1° Si la surface S est hélicoïdale (ou, en particulier, de révolution), car on a, dans ce cas (**138**),

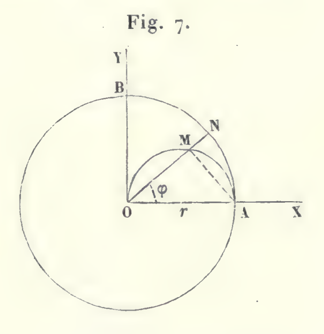
$$\varphi_2 = Z + mv, \qquad C = XX',$$

et, $\varphi_2 \,|C|$ étant linéaire par rapport à v, on pourra effectuer l'intégration relative à cette variable.

2° Si elle est réglée, car φ_2 et C étant linéaires en u, $\varphi_2 \,|C|$ sera, par rapport à cette variable, un polynôme du second degré, que l'on sait intégrer.

147. Cherchons, comme application, le volume compris entre les plans des xy, des yz, une demi-sphère de rayon r, ayant son centre à l'origine, et un cylindre droit dont la base a pour diamètre le rayon OA (*fig.* 7).

Fig. 7.



Prenons des coordonnées semi-polaires ρ, φ, z, déterminées par les relations

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = z.$$

L'ordonnée z de la sphère est évidemment définie par la relation

$$z = \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

On aura, d'autre part,

$$C = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Nous aurons donc à évaluer l'intégrale double

$$\int\int \sqrt{r^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

le champ d'intégration étant le triangle curviligne AOB.

Une première intégration par rapport à ρ donnera pour résultat

$$d\varphi\left[-\frac{(r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{\text{OM}}^{\text{ON}},$$

OM et ON étant des valeurs extrêmes de ρ pour une valeur déterminée de φ. Or la figure donne $\text{OM} = r\cos\varphi$, $\text{ON} = r$. Substituant ces limites, il viendra comme résultat de la première sommation

$$\frac{r^3}{3}\sin^3\varphi\,d\varphi.$$

Intégrant de nouveau entre les limites extrêmes de φ, qui sont ici o et $\frac{\pi}{2}$, on obtiendra le volume cherché

$$\frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(1-\cos^2\varphi)\,d\cos\varphi$$

$$= \frac{r^3}{3}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{9}\,r^3.$$

148. Cherchons encore le volume compris entre le plan des xy et la moitié supérieure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette équation peut être remplacée par le système des suivantes

$$x = a\sin v\cos u, \qquad y = b\sin v\sin u, \qquad z = c\cos v,$$

et l'on obtiendra tous les points du demi-ellipsoïde en faisant varier u de o à 2π et v de o à $\frac{\pi}{2}$.

On aura

$$\begin{aligned} C &= -a \sin v \sin u \,.\, b \cos v \sin u \\ &\quad - a \cos v \cos u \,.\, b \sin v \cos u \\ &= -ab \sin v \cos v. \end{aligned}$$

Le volume cherché sera donc donné par l'intégrale double

$$\begin{aligned} abc\, S \sin v \cos^2 v\, dv\, du &= 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \sin v\, dv \\ &= 2\pi\, abc \left[-\frac{\cos^3 v}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

149. Considérons plus généralement un volume V limité par une ou plusieurs surfaces fermées. Supposons que ces surfaces puissent être partagées en un nombre fini de régions telles : 1° que chacune d'elles ne puisse être rencontrée en plus de deux points par une parallèle aux z; 2° qu'elle possède un plan tangent dont la direction varie d'une manière continue; 3° que la frontière de séparation entre deux régions contiguës soit une ligne rectifiable.

Par ces diverses lignes de séparation, faisons passer des cylindres parallèles aux z. Ils découpent le plan des xy en un certain nombre de régions. Une parallèle aux z, menée par un point x, y pris dans une de ces régions R_i, rencontrera la frontière de V en $2n$ points (le nombre n pouvant varier d'une région à l'autre), à savoir n points d'entrée P_1, P_3, ..., et n points de sortie P_2, P_4, ...

Le volume de la portion de V contenu dans le cylindre de base R_i sera évidemment égal à

$$S\, dx\, dy \int dz = S\, dx\, dy\, (-z_1 + z_2 - z_3 + \ldots).$$

Or soient $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ... les éléments des surfaces frontières qui se projettent sur $dx\, dy$; N_1Z, N_2Z, ... les angles que les normales extérieures à ces éléments font avec Oz; on

aura évidemment

$$dx\,dy = -d\sigma_1 \cos N_1Z = d\sigma_2 \cos N_2Z = \ldots,$$

formule toute semblable à celle du n° 133, et d'où l'on déduit que le volume cherché est donné par l'intégrale double

$$S\,z \cos NZ\, d\sigma,$$

étendue à toute la frontière de V.

Si, au lieu de l'intégrale $S\,dx\,dy\,dz$, on considérait plus généralement la suivante

$$S\,\frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz,$$

on la réduirait à l'intégrale double

$$S\,F \cos NZ\, d\sigma.$$

150. L'emploi des coordonnées polaires donne une réduction du même genre. Le volume est déterminé par l'intégrale triple

$$S\,r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Une droite issue de l'origine rencontrera la frontière du champ en n points de sortie P_0, P_2, ... et n ou $n-1$ points d'entrée P_1, ... Soient respectivement r_0, r_1, ... les rayons vecteurs de ces points; on aura

$$S\,r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = S\,\frac{\sin\theta\, d\ \ d\varphi}{3}(r_0^3 - r_1^3 + \ldots).$$

La quantité $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = d\omega$ représente l'aire de l'élément intercepté sur une sphère de rayon 1 tracée autour de l'origine par le cône limité par les quatre surfaces φ, $\varphi + d\varphi$, θ, $\theta + d\theta$. Soient $d\sigma_0$, $d\sigma_1$, ... les éléments des surfaces frontières qui ont $d\omega$ pour perspective sphérique; N_0R, N_1R les angles que les normales extérieures à ces éléments font avec le rayon vecteur prolongé; on aura évidemment

$$d\omega = \frac{d\sigma_0 \cos N_0R}{r_0^2} = -\frac{d\sigma_1 \cos N_1R}{r_1^2} = \ldots,$$

d'où l'on déduit sans peine que le volume cherché est donné par l'intégrale double

$$\frac{1}{3}\mathrm{S}\, r \cos \mathrm{NR}\, d\sigma,$$

étendue à toute la surface frontière.

On verrait de même que l'intégrale plus générale

$$\mathrm{S} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r} dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

se réduit à l'intégrale double

$$\mathrm{S} \frac{\mathrm{F} \cos \mathrm{NR}}{r^2} d\sigma.$$

151. Cherchons, d'après ce qui précède, la valeur de l'intégrale double

$$\mathrm{S} \frac{\cos \mathrm{NR}\, d\sigma}{r^2}.$$

Associons ensemble les éléments

$$\frac{\cos \mathrm{N}_0 \mathrm{R}\, d\sigma_0}{r_0^2}, \qquad \frac{\cos \mathrm{N}_1 \mathrm{R}\, d\sigma_1}{r_1^2}, \qquad \ldots,$$

qui ont pour perspective sphérique un même élément $d\omega$; on aura

$$\frac{\cos \mathrm{N}_0 \mathrm{R}\, d\sigma}{r_0^2} + \frac{\cos \mathrm{N}_1 \mathrm{R}\, d\sigma_1}{r_1^2} + \ldots = d\omega - d\omega + \ldots.$$

Si l'origine est extérieure à V, le nombre des points d'entrée est égal à celui des points de sortie; la somme ci-dessus est nulle. L'intégrale est donc nulle.

Si l'origine est intérieure à V, le nombre des points d'entrée est inférieur d'une unité à celui des points de sortie. La somme ci-dessus est égale à $d\omega$, et l'intégrale sera égale à $\Sigma\, d\omega$, la sommation étant étendue à tous les éléments de la sphère de rayon 1. L'intégrale sera donc égale à 4π.

Enfin, si l'origine est sur la frontière de V, l'intégrale est encore égale à $\Sigma\, d\omega$. Mais ici la sommation ne porte que sur

les éléments de la surface sphérique situés d'un côté du plan tangent. L'intégrale aura donc pour valeur 2π.

152. Masses. — On nomme *densité moyenne* d'un corps le rapport de sa masse à son volume. Un corps sera *homogène* si, en le décomposant d'une manière quelconque en plusieurs parties, ces diverses parties ont toutes la même densité moyenne. Dans le cas contraire, le corps sera *hétérogène*.

Considérons un corps hétérogène; soient P l'un de ses points; Q une portion du corps, qui contienne le point P. Nous admettrons que, si l'on fait décroître indéfiniment suivant une loi quelconque le diamètre de Q, sa densité moyenne tendra vers une limite déterminée. Cette limite se nomme la *densité* au point P. Cette densité variera en général d'un point à l'autre et sera une fonction des coordonnées.

Supposons qu'on connaisse cette fonction et qu'elle soit continue. Proposons-nous de calculer, d'après ces données, la masse totale du corps. A cet effet, décomposons le corps en éléments de diamètre infiniment petit. Soient ΔV l'un d'eux; μ la densité en un point (x, y, z) choisi arbitrairement dans ΔV. La densité moyenne de l'élément sera $\mu + \varepsilon$, ε étant infiniment petit; sa masse sera donc $(\mu + \varepsilon)\Delta V$, et la masse totale M sera donnée par la formule

$$M = \Sigma(\mu + \varepsilon)\Delta V.$$

Si l'on passe à la limite, $\Sigma\varepsilon\Delta V$ tendra vers zéro, car son module ne peut surpasser

$$\eta\,\Sigma\Delta V = \eta V,$$

V désignant le volume du corps, et η la plus grande des quantités $|\varepsilon|$; or celles-ci tendent uniformément vers zéro dans tout le corps. Donc M sera égal à l'intégrale triple

$$\lim \Sigma\mu\Delta V = S\mu\, dV,$$

étendue à tout le corps.

153. Centres de gravité. Moments d'inertie. — Soient (x, y, z), (x', y', z'), ... des points de masses m, m', ... On nomme *centre de gravité* du système le point dont les coordonnées X, Y, Z sont définies par les équations

$$X = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \qquad Y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \qquad Z = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m},$$

et *moment d'inertie* du système par rapport à une droite la somme

$$\Sigma m \delta^2,$$

δ désignant la distance de la droite au point (x, y, z) de masse m.

Si, au lieu d'une série de points isolés, on a un corps continu, ces sommes se changeront en intégrales. Décomposons, en effet, le corps en éléments infiniment petits, comme plus haut.

Soient

ΔV le volume d'un de ces éléments;
μ la densité en un de ses points (x, y, z);
δ la distance de ce point à l'axe par rapport auquel on prend les moments d'inertie.

La masse m de l'élément sera sensiblement égale à $\mu\,\Delta V$. D'autre part, tous les points de l'élément auront sensiblement pour coordonnées x, y, z, et leur distance à l'axe sera sensiblement égale à δ. On aura donc, en passant à la limite,

$$\begin{aligned} \Sigma m &= \lim \Sigma \mu \Delta V = S \mu\, dV, \\ \Sigma m x &= \lim \Sigma \mu x \Delta V = S \mu x\, dV, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma m \delta^2 &= \lim \Sigma \mu \delta^2 \Delta V = S \mu \delta^2\, dV. \end{aligned}$$

154. *Application.* — Soit à trouver le moment d'inertie d'une sphère homogène, par rapport à un diamètre. Prenant cette droite pour axe des z et le centre de la sphère pour origine, on aura $\delta^2 = x^2 + y^3$. Il faudra donc calculer l'intégrale

$$S \mu (x^2 + y^2)\, dV.$$

On trouverait de même, pour les moments d'inertie relatifs aux axes des x et des y,

$$S\mu(y^2+z^2)\,dV \quad \text{et} \quad \Sigma\mu(z^2+x^2)\,dV.$$

Ces trois moments d'inertie étant égaux, chacun d'eux sera égal à la moyenne

$$\tfrac{2}{3}S\mu(x^2+y^2+z^2)\,dV.$$

En coordonnées polaires, on aura

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \qquad dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi.$$

On aura donc à calculer l'intégrale

$$\tfrac{2}{3}S\mu r^4\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi.$$

Dans l'étendue de la sphère, ψ varie de 0 à 2π, θ de 0 à π, r de 0 à R, rayon de la sphère.

Les intégrations sont immédiates et donnent pour résultat

$$\mu\,\tfrac{8}{15}\pi R^5.$$

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Dérivation des intégrales définies.

155. Une intégrale définie

$$\int_a^A f(x, t)\,dx,$$

où la fonction à intégrer dépend d'un paramètre t, est elle-même une fonction de ce paramètre. Les limites a, A peuvent d'ailleurs être constantes, ou dépendre aussi du paramètre; mais ce second cas se ramène aisément au premier par un changement de variable. Posons en effet

$$x = a + (A - a)y.$$

L'intégrale transformée sera

$$\int_0^1 f[a + (A - a)y, t](A - a)\,dy,$$

et aura ses limites constantes.

On opérerait de même pour une intégrale double

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y, t)\,dx.$$

En remplaçant d'abord x, puis y par de nouvelles variables, on rendrait constantes successivement les limites des deux intégrales à effectuer.

Nous pouvons donc nous borner au cas des limites constantes.

156. Soit

$$I = \int_a^A f(x, t)\, dx$$

l'intégrale considérée.

Supposons qu'à toute quantité positive ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ et une décomposition du champ d'intégration en deux parties D et d jouissant des propriétés suivantes :

1° Le champ D est borné et parfait; et la fonction f reste continue par rapport aux deux variables x et t, tant que x reste contenu dans D, et t dans l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$.

2° L'intégrale $\int_d f\, dx$, prise dans le champ d, a son module moindre que ε pour toutes les valeurs de t comprises entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$.

Dans ces conditions, I sera une fonction de t, continue au point t_0.

Changeons en effet t_0 en $t_0 + h$; I subira un accroissement

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int_a^A f(x, t_0 + h)\, dx - \int_a^A f(x, t_0)\, dx \\ &= \int_D f(x, t_0 + h)\, dx - \int_D f(x, t_0)\, dx \\ &\quad + \int_d f(x, t_0 + h)\, dx - \int_d f(x, t_0)\, dx.\end{aligned}$$

Si $|h| < \delta$, les deux dernières intégrales ont leur module moindre que ε. En désignant par η le module de la différence des deux premières, on aura donc

$$|\Delta I| < \eta + 2\varepsilon.$$

Or on peut choisir ε aussi petit qu'on veut, puis prendre h

assez petit pour rendre η moindre que toute quantité donnée, car l'intégrale $\int_D f(x, t)\,dx$ est continue (t. I, n° 83).

157. Si les conditions énoncées ci-dessus ne sont pas satisfaites, l'intégrale sera souvent discontinue.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx.$$

Si t est positif, posons $tx = y$; l'intégrale sera transformée en

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

et sera égale à $\frac{\pi}{2}$ (98).

Si t est négatif, posons $tx = -y$; elle se transformera en

$$-\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

et aura pour valeur $-\frac{\pi}{2}$.

Enfin si $t = 0$, elle sera nulle.

L'intégrale est donc discontinue au point $t = 0$.

158. Dérivation sous le signe $\int$. — Nous avons vu (t. I, n° 83) que l'intégrale

$$I = \int_a^A f(x, t)\,dx$$

admet au point $t = t_0$ une dérivée, représentée par l'intégrale

$$\int_a^A \frac{\partial f}{\partial t_0}\,dx.$$

Cet important résultat n'a été établi qu'en supposant a et A finis, et $\frac{\partial f}{\partial t}$ continu par rapport à x et t, tant que x reste

dans l'intervalle de a à A, et t dans l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$ (δ pouvant être choisi aussi petit qu'on voudra). Mais nous pouvons étendre la démonstration à d'autres cas.

En effet, la dérivée de I au point $t = t_0$ est, par définition, égale à

$$\begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_a^A [f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)]\, dx \\ &= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_a^A dx \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \\ &= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} dt \int_a^A \frac{\partial f}{\partial t}\, dx = \int_a^A \frac{\partial f}{\partial t}\, dx. \end{aligned}$$

Le théorème sera donc établi toutes les fois que les trois transformations que nous venons de faire seront licites.

La première suppose que la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'est discontinue, par rapport à t, qu'en un nombre fini de points, entre t_0 et $t_0 + h$, et que f reste continue en ces points (59). Si donc on peut déterminer une quantité δ telle que $f(x, t)$ soit une fonction continue de t dans tout le rectangle $(a, \text{A}, t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, et que, pour chaque valeur de x comprise entre a et A, $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'ait qu'un nombre limité de discontinuités entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$, cette transformation sera permise dès que $|h|$ sera devenu moindre que δ.

Si a et A sont finis, l'interversion des deux intégrations sera permise aux conditions suivantes (68).

1° Les points du rectangle ci-dessus aux environs desquels $\frac{\partial f}{\partial t}$ cesserait d'être continue sont situés sur un nombre limité d'arcs de courbe continus P_1Q_1, P_2Q_2, ... tels que le long de chacun d'eux x d'une part et t de l'autre soient croissants ou décroissants.

2° L'intégrale

$$\int_x^{x+\lambda} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx$$

a une valeur déterminée, et si $|\lambda| \leqq l$, son module sera $< \varepsilon_l$, ε_l tendant vers zéro avec l.

3° L'intégrale

$$\int_t^{t+\lambda} \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(x, t+\lambda) - f(x, t)$$

jouit de propriétés analogues.

Cette dernière condition sera certainement satisfaite, si, dans le rectangle, f est une fonction continue des deux variables x et t; car sa continuité sera uniforme.

Si l'une des limites a, A, par exemple A, est remplacée par ∞, on pourra encore intervertir les intégrations, si cette opération est permise dans l'intervalle de a à un nombre quelconque A, et si de plus l'intégrale

$$\int_A^\infty \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

est déterminée et a un module moindre que $\varepsilon_A \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant intégrable de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$ et ε_A tendant uniformément vers zéro dans cet intervalle lorsque A tend vers ∞.

Enfin, si les conditions précédentes sont satisfaites, l'intégrale

$$\int_a^A \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

sera continue (même si le champ est infini). La dernière transformation sera donc toujours permise.

159. On pourrait donner des règles analogues pour la dérivation des intégrales multiples; mais elles seraient moins utiles, car la dérivation sous le signe d'intégration reste encore applicable dans bien des cas où la fonction f n'est pas continue. On peut conduire la discussion comme il suit.

Considérons, par exemple, une intégrale double

$$\mathrm{S}_E f(x, y, t)\, dx\, dy.$$

Décomposons le champ d'intégration, supposé d'abord borné, en deux parties D et d, dont la première soit mesurable, et telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$ reste continue lorsque x, y décrit le champ D, et t l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$. Dans le champ D, on pourra dériver sous le signe d'intégration ; on aura, par suite,

$$\frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_{\mathrm{E}} = \frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_{\mathrm{D}} + \frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_{d} = \mathbf{S}_{\mathrm{D}}\frac{\partial f}{\partial t_0}\,dx\,dy$$
$$+\lim \mathbf{S}_d\left[\frac{f(x,y,t_0+h)-f(x,y,t_0)}{h}\right]dx\,dy.$$

Faisons décroître indéfiniment δ, et supposons, ce qui arrivera très généralement, qu'on puisse en même temps accroître progressivement la région D aux dépens de la région d, de telle sorte que l'aire de cette dernière tende vers zéro. L'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{D}}\frac{\partial f}{\partial t_0}\,dx\,dy$$

tendra vers

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}}\frac{\partial f}{\partial t_0}\,dx\,dy.$$

Pour reconnaître si la formule est applicable, on devra donc discuter le second terme, et s'assurer qu'il tend vers zéro. Si, par exemple, on peut montrer que, lorsque d et $|h|$ sont devenus suffisamment petits, on a toujours

$$\left|\frac{f(x\,y,t_0+h)-f(x,y,t_0)}{h}\right| < \varphi(x,y),$$

φ désignant une fonction positive dont l'intégrale dans E soit finie ; ce terme aura son module moindre que

$$\mathbf{S}_d\,\varphi(x,y)\,dx\,dy,$$

expression qui tendra vers zéro avec d.

160. Supposons enfin que E soit infini, mais que la formule de dérivation soit applicable à tout domaine borné con-

tenu dans E. On décomposera de même E en deux régions D et d, dont la première soit bornée, et contienne tous les points de E dont la distance à l'origine n'est pas plus grande qu'un nombre donné R. On aura encore

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_{\mathrm{E}} = \mathbf{S}_{\mathrm{D}} \frac{\partial f}{\partial t_0}\, dx\, dy \\ + \lim_{h=0} \mathbf{S}_d \left[\frac{f(x, y, t_0+h) - f(x, y, t_0)}{h}\right] dx\, dy.\end{aligned}$$

Faisons tendre R vers ∞. Le premier terme tendra vers

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \frac{\partial f}{\partial t_0}\, dx\, dy,$$

et la formule sera applicable si le second terme a pour limite zéro, et notamment si, pour R suffisamment grand et $|h|$ suffisamment petit, on a toujours

$$\frac{f(x, y, t_0+h) - f(x, y, t_0)}{h} < \varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ admettant une intégrale finie dans E.

161. La règle de dérivation précédente donne la solution d'un problème important.

Intégration des différentielles totales. — On dit qu'une expression de la forme

$$(1) \qquad \mathrm{X}_1\, dx_1 + \mathrm{X}_2\, dx_2 + \ldots + \mathrm{X}_n\, dx_n,$$

où $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont des fonctions des n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ (admettant, par hypothèse, des dérivées partielles continues), est une *différentielle exacte*, s'il existe une fonction u des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont cette expression soit la différentielle totale.

S'il en est ainsi, on aura, par définition,

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \mathrm{X}_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \mathrm{X}_i, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = \mathrm{X}_n.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}.$$

Le premier membre de cette relation ne changeant pas quand on permute i et k, il devra en être de même du second, d'où

$$(3) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \qquad \text{pour} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

On obtient ainsi un système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition, auxquelles devront satisfaire les fonctions $X_1, \ldots, X_n$.

162. Réciproquement, si les équations (3) sont satisfaites, l'expression (1) sera une différentielle exacte. Nous allons montrer, en effet, qu'on pourra déterminer son intégrale u par une série de quadratures.

La première condition à laquelle est assujettie cette fonction inconnue est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1.$$

Une solution de cette équation est donnée par l'intégrale définie

$$\int_{a_1}^{x_1} X_1 \, dx_1$$

prise en traitant $x_2, \ldots, x_n$ comme des constantes (a_1 désignant une constante choisie à volonté). La solution la plus générale de cette même équation sera évidemment

$$u = \int_{a_1}^{x_1} X_1 \, dx_1 + u_1,$$

u_1 étant une quantité indépendante de x_1 et fonction de $x_2, \ldots, x_n$ seulement.

Il reste à déterminer u_1 de telle sorte qu'on ait

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_n.$$

Or on a, en appliquant la règle de la dérivation sous le signe $\int$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_i}\, dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$$

$$= \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = X_i - X_i^{a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

$X_i^{a_1}$ désignant ce que devient X_i quand on y remplace x_1 par la constante a_1.

Substituant ces valeurs des dérivées de u dans les équations (4), elles deviendront

$$(5) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = X_2^{a_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = X_n^{a_1}.$$

D'ailleurs les équations (3) donneront, en posant $x_1 = a_1$,

$$(6) \qquad \frac{\partial X_i^{a_1}}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k^{a_1}}{\partial x_i}, \qquad \text{pour} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n, \\ k = 2, 3, \ldots, n. \end{array} \right.$$

La détermination de u_1 par les équations (5), jointes aux relations (6), est un problème entièrement semblable au problème primitif, sauf une réduction d'une unité dans le nombre des variables. Pour le résoudre, on posera

$$u_1 = \int_{a_2}^{x_2} X_2^{a_1}\, dx_2 + u_2,$$

a_2 étant une constante choisie à volonté, et u_2 une fonction de $x_3, \ldots, x_n$ seulement, à déterminer par les équations

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = X_3^{a_1 a_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = X_n^{a_1 a_2},$$

où $X_i^{a_1 a_2}$ représente ce que devient X_i pour $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$.

Continuant ainsi, on trouvera évidemment

$$u = \int_{a_1}^{x_1} X_1\, dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} X_2^{a_1}\, dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} X_3^{a_1 a_2}\, dx_3 + \ldots + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Les constantes $a_1, a_2, \ldots$, qui figurent dans cette formule, peuvent être choisies à volonté. On les déterminera dans chaque cas particulier, de manière à faciliter autant que possible les intégrations à effectuer.

163. Applications diverses. — La différentiation, seule ou combinée avec l'interversion des intégrations, l'intégration par parties et le développement en série, permet d'obtenir la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies. Nous allons en donner quelques exemples.

I. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Nous avons déjà vu (103) qu'elle a une valeur finie.

Pour la déterminer, changeons de variable, en posant $x = \alpha t$, α étant > 0; il viendra

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\alpha\,dt.$$

Multiplions par $e^{-\alpha^2}$, et intégrons de o à ∞; il viendra

$$I^2 = I\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,dt.$$

Dans le second membre on peut intervertir les intégrations. En effet, considérons en premier lieu l'intégrale

$$\int_B^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,dt = e^{-\alpha^2}\int_{B\alpha}^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Soit A un nombre positif quelconque. La fonction $e^{-\alpha^2}$ admet de o à A une intégrale finie. D'autre part, le second facteur est dans cet intervalle au plus égal à la constante finie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

enfin il tend uniformément vers zéro, lorsque B tend vers ∞, dans tout intervalle partiel qui ne contient pas le point $\alpha = 0$,

car si μ est le minimum de α dans cet intervalle, ce facteur ne pourra surpasser la quantité

$$\int_{B\mu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

qui est infiniment petite, et indépendante de α.

Considérons en second lieu l'intégrale

$$\int_{A}^{\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,d\alpha = \frac{e^{-A^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}.$$

La fonction $\frac{1}{2(1+t^2)}$ admet, de $t=0$ à $t=\infty$, une intégrale finie, et le facteur $e^{-A^2(1+t^2)}$ est moindre que e^{-A^2}, quantité indépendante de t et qui tend vers zéro pour $A=\infty$.

On aura donc

$$I^2 = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} t)_0^{\infty} = \frac{\pi}{4},$$

d'où

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Cette intégrale permet d'en obtenir plusieurs autres.

164. II. Posons d'abord $x = y\sqrt{a}$, a étant une constante positive; il viendra

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ay^2}\sqrt{a}\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$\int_0^{\infty} e^{-ay^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}},$$

et par une série de dérivations successives par rapport à a

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-ay^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}},$$

. . . . ,

$$\int_0^{\infty} y^{2n} e^{-ay^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Car il est aisé de justifier que la règle de dérivation sous le signe $\int$ est applicable à ces intégrales, bien que le champ soit infini.

Posons, en effet,

$$y^{2n} e^{-ay^2} = f(y, a),$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\, y^{2n+2} e^{-ay^2}.$$

Soit a_0 une valeur particulière quelconque de a; prenons $\delta < a_0$. Pour les valeurs de a comprises entre $a_0 - \delta$ et $a_0 + \delta$, l'intégrale

$$\int_A^\infty \frac{\partial f}{\partial a}\, dy$$

sera déterminée; car, pour des valeurs suffisamment grandes de y, on aura

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leqq y^{2n+2} e^{-(a_0-\delta)y^2} < \frac{1}{y^2}.$$

En outre, si l'on suppose A suffisamment grand, on aura

$$\left|\int_A^\infty \frac{\partial f}{\partial a}\, dy\right| \leqq \int_A^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| dy \leqq \int_A^\infty \frac{dy}{y^2} \leqq \frac{1}{A},$$

quantité indépendante de a et qui tend vers zéro quand A croît indéfiniment. On se trouve ainsi dans les conditions indiquées au n° 158, ε_A étant égal à $\frac{1}{A}$, et la fonction φ se réduisant à l'unité.

165. III. Passons à l'intégrale

$$K = \int_0^\infty \cos 2by\, e^{-ay^2}\, dy.$$

Remplaçons $\cos 2by$ par son développement en série

$$1 - \frac{(2by)^2}{1.2} + \frac{(2by)^4}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-1)^n (2by)^{2n}}{1.2\ldots 2n} + R_n,$$

R_n étant de la forme

$$\frac{(-1)^{n+1}(2by)^{2n+2}\cos\theta 2by}{1.2\ldots(2n+2)}, \quad \text{où } (0 > \theta > 1.)$$

$0 < \theta < 1$

On aura

$$K = \int_0^\infty \left[1 - \frac{(2by)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(-1)^n (2by)^{2n}}{1.2\ldots 2n} + R_n \right] e^{-ay^2} dy,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[a^{-\frac{1}{2}} - \frac{(2b)^2}{1.2}\,\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n(2b)^{2n}}{1.2\ldots 2n}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}} \right]$$
$$+ \int_0^\infty R_n e^{-ay^2} dy$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{b^2}{a} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n \right] + \int_0^\infty R_n e^{-ay^2} dy.$$

Faisons tendre n vers l'infini. La somme entre crochets tendra vers $e^{-\frac{b^2}{a}}$, et l'intégrale complémentaire vers zéro, car son module est moindre que

$$\int_0^\infty \frac{(2b)^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} y^{2n+2} e^{-ay^2} dy = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}}}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{b^2}{a}\right)^{n+1},$$

quantité qui tend vers zéro. On aura donc

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

166. IV. Considérons encore l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx.$$

On aura

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{-2a}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx.$$

Car si a_0 est une valeur particulière quelconque de a, et δ une quantité positive quelconque moindre que a_0, on aura, pour toutes les valeurs de a comprises entre $a_0 + \delta$ et $a_0 - \delta$

$$\left| \int_A^\infty \frac{-2a}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx \right| < \int_A^\infty \frac{2(a_0+\delta)}{x^2} dx < \frac{2(a_0+\delta)}{A},$$

quantité indépendante de a, et qui tend vers zéro pour $A = \infty$.

Posant $x = \frac{a}{t}$, il viendra

$$\frac{dI}{da} = \int_{\infty}^{0} 2e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}dt = -2I,$$

d'où

$$\frac{dI}{I} = -2\,da, \qquad \log I = -2a + \log C,$$

et enfin

$$I = Ce^{-2a},$$

C désignant une constante.

Pour la déterminer, faisons tendre a vers zéro; il viendra

$$\begin{aligned} C &= \lim_{a=0} \int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx + \lim_{a=0}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - 1\right)dx. \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; le second a pour limite zéro. Soit, en effet, μ un nombre positif quelconque. Décomposons l'intégrale en deux autres, prises respectivement de 0 à μ et de μ à ∞. Dans la première, le module de la fonction à intégrer aura pour maximum 2; dans la seconde, il ne pourra surpasser $e^{-x^2}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)$. L'intégrale cherchée sera donc au plus égale à

$$\int_0^{\mu} 2\,dx + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\mu + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

et comme

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2}dx < \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx < \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

il sera moindre que

$$2\mu + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

expression dont les deux termes décroîtront autant qu'on

voudra, en donnant des valeurs suffisamment petites à μ, puis à a.

On aura donc finalement

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a}.$$

167. V. Soit encore à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

On a (164)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$$

et, par suite,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ix}\, dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha,$$

ou, en renversant les intégrations,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{(-\alpha^2 + i)x}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2 - i} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \left(\frac{1}{\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}} - \frac{1}{\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}} \right).$$

Mais

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

La première fraction simple aura donc pour intégrale indéfinie

$$\tfrac{1}{2}\log\left[\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\right] + i \operatorname{arc\,tang}\left(\alpha\sqrt{2} - 1\right) + \text{const.}$$

et la seconde

$$-\tfrac{1}{2}\log\left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\right] + i \operatorname{arc\,tang}\left(\alpha\sqrt{2} + 1\right) + \text{const.}$$

La somme de ces expressions a pour partie réelle

$$\frac{1}{2}\log\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}},$$

qui s'annule aux deux limites $\alpha=0$, $\alpha=\infty$, la quantité sous le logarithme se réduisant à l'unité. Quant aux arc tang, ils varieront respectivement de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, lorsque α croîtra de 0 à ∞. La somme de leurs accroissements sera donc π.

On aura donc

$$I=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\pi i=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i),$$

et, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

168. Nous avons effectué un renversement d'intégrations qu'il est nécessaire de justifier.

Pour cela, considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$\int_B^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\,d\alpha.$$

En posant $\alpha\sqrt{x}=\beta$, elle se change en

$$\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\int_{B\sqrt{x}}^\infty e^{-\beta^2}\,d\beta.$$

Or soit A un nombre positif quelconque; l'intégrale de $\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$ entre 0 et A a une valeur finie. D'autre part, l'intégrale

qui forme le second facteur ne peut surpasser la quantité fixe

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2}\,d\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

lorsque B tend vers ∞.

Enfin, elle tend uniformément vers zéro dans tout intervalle qui ne contient pas la valeur $x = 0$.

En second lieu, considérons l'intégrale

$$\int_A^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\,dx = \frac{e^{(-\alpha^2+i)A}}{\alpha^2 - i}.$$

Elle a pour module

$$\frac{e^{-\alpha^2 A}}{\sqrt{\alpha^4+1}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{\alpha^4+1}}$ admet entre 0 et ∞ une intégrale finie. D'autre part, $e^{-\alpha^2 A}$ est constamment < 1; enfin il tend uniformément vers zéro, lorsque A tend vers ∞, dans tout intervalle qui ne contient pas la valeur $\alpha = 0$.

169. Si, dans les formules (7), nous posons $x = y^2$, il viendra

$$\int_0^\infty \cos y^2\,dy = \int_0^\infty \sin y^2\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Ces intégrales ont été rencontrées par Fresnel dans la théorie de la diffraction.

170. Si a désigne une constante positive, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},$$

et en intégrant de $a = \alpha$ à $a = \beta$ (α et β étant positifs)

$$\int_\alpha^\beta da \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}.$$

On peut intervertir l'ordre des intégrations; on a, en effet,

$$\int_{B}^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{e^{-aB}}{a}.$$

Or, dans l'intervalle de α à β, $\frac{1}{a}$ admet une intégrale finie et e^{-aB} tend uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞. Effectuant donc l'intégration par rapport à a, il viendra

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = \operatorname{Log}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Cette formule permet de reconnaître si l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{A e^{-\alpha x}}{x^m} + \frac{B e^{-\beta x}}{x^n} + \dots\right) dx,$$

où $m, n, \dots$ sont des entiers et $\alpha, \beta, \dots$ des constantes positives, est finie et déterminée, et d'assigner sa valeur.

En effet, intégrons d'abord entre ε et ∞, ε étant une constante positive, que nous ferons décroître ensuite jusqu'à zéro. L'intégration par parties, appliquée au premier terme, donnera

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{A e^{-\alpha x}}{x^m}\,dx &= \left[-\frac{A}{m-1}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{m-1}} + \frac{A\alpha}{(m-1)(m-2)}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{m-2}} - \dots\right]_{\varepsilon}^{\infty} \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} A \alpha^{m-1}}{(m-1)(m-2)\dots}\frac{e^{-\alpha x}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

La partie intégrée, s'annulant pour $x = \infty$, se réduira à

$$\frac{A}{m-1}\frac{e^{-\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots.$$

Opérant de même sur chacun des autres termes et réunissant les résultats, on obtiendra :

1° Pour la partie intégrée, une somme de termes de la forme

$$\frac{K e^{-\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^p};$$

2° Pour l'intégrale restante, une expression de la forme

$$\int_0^\infty (A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{-\beta x} + \ldots) \frac{dx}{x}.$$

La partie intégrée est aisément développable suivant les puissances entières et croissantes de ε. Soit

$$\frac{C_\lambda}{\varepsilon^\lambda} + \frac{C_{\lambda-1}}{\varepsilon^{\lambda-1}} + \ldots + C_0 + R$$

ce développement, R désignant l'ensemble des termes qui contiennent les puissances positives de ε.

D'autre part, si nous posons, pour abréger,

$$A_1 + B_1 + \ldots = S,$$

l'intégrale restante pourra s'écrire ainsi :

$$\int_\varepsilon^\infty [S e^{-\alpha x} + B_1 (e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) + \ldots] \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale du premier terme peut se décomposer en deux parties, à savoir $\int_\varepsilon^1 \frac{S e^{-\alpha x}\, dx}{x}$, qui a pour valeur

$$S\mu \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -S\mu \operatorname{Log} \varepsilon,$$

μ étant une quantité intermédiaire entre les valeurs extrêmes $e^{-\alpha\varepsilon}$ et $e^{-\alpha}$ du facteur $e^{-\alpha x}$; et $\int_1^\infty \frac{S e^{-\alpha x}\, dx}{x}$, qui a évidemment une valeur finie que nous représenterons par SD.

L'intégrale de chacun des autres termes, tel que

$$B_1 (e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) \frac{dx}{x},$$

aura également une valeur finie, qui, pour $\varepsilon = 0$, tendra vers $B_1 \operatorname{Log} \frac{\alpha}{\beta}$.

La partie de l'intégrale primitive, qui tend vers ∞ quand

ε tend vers zéro, sera donc la suivante :

$$\frac{C_\lambda}{\varepsilon^\lambda} + \frac{C_{\lambda-1}}{\varepsilon^{\lambda-1}} + \ldots - S\mu \operatorname{Log}\varepsilon.$$

Ces termes, étant d'ordres inégaux, devront s'annuler séparément pour que l'intégrale reste finie, ce qui donnera les conditions

$$C_\lambda = 0, \qquad C_{\lambda-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad C_1 = 0, \qquad S = 0.$$

Si ces conditions sont satisfaites, R s'annulant d'ailleurs pour $\varepsilon = 0$, la valeur de l'intégrale se réduira à

$$C_0 + B_1 \operatorname{Log}\frac{\alpha}{\beta} + \ldots = C_0 - A_1 \operatorname{Log}\alpha - B_1 \operatorname{Log}\beta - \ldots.$$

171. *Exemples.* — 1° Appliquons cette formule à l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[(n - \tfrac{1}{2})\, e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x}.$$

L'intégration par parties des termes en $\dfrac{1}{x^2}$ permettra de donner à cette expression la forme suivante :

$$\left(-\frac{e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x}\right)_0^\infty + \int_0^\infty \left[(n - \tfrac{1}{2})(e^{-x} - e^{-nx})\frac{dx}{x}\right].$$

Le terme tout intégré aura pour valeur

$$\lim\left(\frac{e^{-n\varepsilon} - e^{-\frac{1}{2}\varepsilon}}{x}\right)_{\varepsilon=0} = \lim\left(\frac{1 - n\varepsilon + \ldots - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \ldots}{\varepsilon}\right) = -n + \tfrac{1}{2}.$$

Quant à l'intégrale restante, elle aura pour valeur

$$(n - \tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} n.$$

On aura donc, pour valeur de l'intégrale totale,

$$(n - \tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} n - n + \tfrac{1}{2}.$$

2° Un calcul analogue donnera, pour la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx,$$

l'expression suivante :

$$1 - \operatorname{Log} 2.$$

II. — Intégrales eulériennes.

172. On donne le nom d'*intégrale eulérienne de deuxième espèce* à l'intégrale

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx.$$

Cette intégrale n'a de sens que si n est positif; car, si n était négatif ou nul, la fonction à intégrer devenant infinie du premier ordre au moins à la limite $x = 0$, l'intégrale serait infinie.

Si n est positif, l'intégrale sera, au contraire, finie et déterminée, car l'ordre d'infinitude de la fonction à intégrer pour $x = 0$ est inférieur à 1; elle est finie dans tout le reste du champ; enfin, pour $x = \infty$, elle devient plus petite qu'une puissance quelconque de x.

On peut varier à volonté la forme de cette intégrale en changeant de variable. Posons, par exemple, $x = y^2$; il viendra

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty 2 y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy.$$

Soit, en particulier, $n = \frac{1}{2}$; il viendra

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty 2 e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Posons, d'autre part, $x = \log \frac{1}{z}$, il viendra

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

173. Il est aisé de vérifier l'identité de cette fonction avec le produit Γ étudié dans le *Calcul différentiel* (383 à 385).

En effet, soit μ un entier que nous ferons croître indéfiniment; on aura, par définition,

$$\Gamma(n) = \lim_{\mu=\infty} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

Or on pourra, sans changer la limite de cette expression, y remplacer $\log\frac{1}{z}$ par $\mu\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)$. Posons, en effet,

$$1 - z^{\frac{1}{\mu}} = h,$$

d'où

$$\mu = \frac{\log z}{\log(1-h)},$$

$$\mu\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right) = \frac{h \log z}{\log(1-h)} = -\frac{h}{\log(1-h)} \log\frac{1}{z};$$

on aura

$$\int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz = k^{n-1} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz,$$

k désignant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum du facteur $\dfrac{-h}{\log(1-h)}$.

Mais h est une quantité infiniment petite, comprise entre les limites $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{\mu}}}$ et 0 correspondant aux valeurs extrêmes $e^{-\sqrt{\mu}}$ et 1 de la variable z. Le facteur

$$\frac{-h}{\log(1-h)} = \frac{h}{h + \frac{h^2}{2} + \ldots}$$

diffère donc infiniment peu de l'unité, de telle sorte qu'on aura à la limite $k = 1$ et

$$\lim_{\mu=\infty} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz = \Gamma(n).$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^{e^{-\sqrt{\mu}}} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz < \int_0^{e^{-\sqrt{\mu}}} \mu^{n-1}\,dz < \mu^{n-1} e^{-\sqrt{\mu}},$$

expression dont la limite est nulle. On pourra donc abaisser jusqu'à zéro la limite inférieure de l'intégrale, et écrire

$$\Gamma(n) = \lim \mu^{n-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz.$$

Posons $z = y^\mu$; il viendra

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{n-1}\,dy;$$

or l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{n-1}\,dy \\
&= \left[-\frac{1}{n} y^{\mu-1}(1-y)^n\right]_0^1 + \frac{\mu-1}{n}\int_0^1 y^{\mu-2}(1-y)^n\,dy \\
&= \frac{\mu-1}{n}\int_0^1 y^{\mu-2}(1-y)^n\,dy \\
&= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{n(n+1)}\int_0^1 y^{\mu-3}(1-y)^{n+1}\,dy \\
&= \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-2)}\int_0^1 (1-y)^{n+\mu-2}\,dy \\
&= \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-2)}\,\frac{1}{n+\mu-1}.
\end{aligned}$$

On aura donc

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-1)}.$$

C'est l'équation qui définit les produits Γ (*Calcul différentiel*, n° 325).

174. L'expression de la fonction $\Gamma(n)$ par une intégrale définie, que nous venons d'obtenir (dans le cas où n est positif), fournit un moyen commode de calculer sa valeur pour chaque valeur donnée de la variable. On peut d'ailleurs démontrer à nouveau, en partant de cette expression, les principales propriétés de la fonction.

Ainsi l'intégration par parties donnera immédiatement

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \\ &= (-x^n e^{-x})_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx = n\Gamma(n),\end{aligned}$$

et plus généralement, si k est un entier,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+k) &= (n+k-1)\Gamma(n+k-1) = \ldots \\ &= (n+k-1)n+k-2)\ldots n\Gamma(n).\end{aligned}$$

Cette formule permet de ramener le calcul de la fonction Γ au cas où la variable ne surpasse pas l'unité.

Posons, en particulier, $n=1$ dans la formule précédente. En remarquant qu'on a

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

il viendra

$$\Gamma(1+k) = 1,\ 2, \ldots, k.$$

175. La fonction $\operatorname{Log}\Gamma(n)$ peut également se mettre sous forme d'intégrale définie.

Prenons, en effet, la dérivée de l'expression

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\,dx;$$

il viendra

$$\Gamma'(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} \operatorname{Log} x\,dx.$$

On peut, en effet, dériver sous le signe $\int$; car soit m_0 une valeur particulière du paramètre m, et soit δ une quantité

suffisamment petite. Pour toutes les valeurs de m comprises entre $m_0 - \delta$ et $m_0 + \delta$ l'intégrale

$$\int_B^\infty x^{m-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx$$

convergera uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞, car elle sera au plus égale à

$$\int_B^\infty x^{m_0+\delta-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx,$$

quantité indépendante de m, et qui tend vers zéro.

Mais on a (170)

$$\operatorname{Log} x = \int^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$x^{m-1} e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} = f,$$

nous aurons

$$\Gamma'(m) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty f \, dz.$$

176. On peut intervertir les intégrations. Pour l'établir, nous montrerons tout d'abord qu'en désignant par λ une constante positive, on aura

$$\text{(1)} \qquad \int_\lambda^\infty dx \int_0^\infty f \, dz = \int^\infty dz \int_\lambda^\infty f \, dx.$$

En effet, on a, d'une part,

$$\left| \int_B^\infty f \, dz \right| < x^{m-1} e^{-x} \int_B^\infty \frac{e^{-z} + e^{-\lambda z}}{B} dz$$

$$= x^{m-1} e^{-x} \left(\frac{e^{-B}}{B} + \frac{e^{-\lambda B}}{\lambda B} \right).$$

Or $x^{m-1} e^{-x}$ a une intégrale finie entre $x = \lambda$ et $x = \infty$, et le second facteur est indépendant de x et tend vers zéro quand croît indéfiniment.

On a, d'autre part, d'après la série de Taylor arrêtée à son premier terme,

$$e^{-z} = 1 - ze^{-\theta z} \qquad (0 < \theta < 1),$$
$$e^{-xz} = 1 - xze^{-\theta' xz} \qquad (0 < \theta' < 1),$$

d'où (x et z étant positifs)

$$\left| \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} \right| \overline{\overline{<}} e^{-\theta z} + xe^{-\theta' xz} < 1 + x,$$

d'où

$$\left| \int_A^\infty f\,dx \right| < \int_A^\infty x^{m-1} e^{-x} (1 + x)\,dx,$$

quantité indépendante de z, et qui tend vers zéro quand A tend vers ∞.

177. Faisons tendre λ vers zéro dans l'équation (1). Le second membre tendra vers $\int_0^\infty dz \int_0^\infty f\,dx$. Pour le faire voir, il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty dz \int_0^\lambda f\,dx$$

tend vers zéro.

Or cette intégrale est la somme des deux suivantes (μ étant un nombre arbitraire)

$$\int_0^\mu dz \int_0^\lambda f\,dx \quad \text{et} \quad \int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda f\,dx.$$

La première a son module moindre que

$$\int_0^\mu dz \int_0^\lambda x^{m-1} (1 + x)\,dx = \mu \left(\frac{\lambda^m}{m} + \frac{\lambda^{m+1}}{m+1} \right).$$

La seconde a son module moindre que

$$\int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda x^{m-1} \frac{e^{-z} + e^{-xz}}{z}\,dx = \frac{\lambda^m}{m} \int_\mu^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz$$
$$+ \int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda \frac{x^{m-1} e^{-xz}}{z}\,dx.$$

Dans cette dernière intégrale, posons $x = \frac{y}{z}$. Elle devient

$$\int_{\mu}^{\infty} dz \int_{0}^{\lambda z} \frac{y^{m-1} e^{-y}\, dy}{z^{m+1}},$$

quantité moindre que la suivante

$$\int_{\mu}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} \frac{y^{m-1} e^{-y}\, dy}{z^{m+1}} = \frac{\Gamma(m)}{m \mu^m}.$$

L'intégrale cherchée a donc pour limite supérieure de son module

$$\mu\left(\frac{\lambda^m}{m} + \frac{\lambda^{m+1}}{m+1}\right) + \frac{\lambda^m}{m}\int_{\mu}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz + \frac{\Gamma(m)}{m\mu^m}.$$

Or, si nous prenons $\mu = \lambda^{-n}$, n étant un nombre $< m$, les trois termes qui précèdent tendront séparément vers zéro.

Le premier membre de l'équation (1) tendra vers la même limite, qui, par définition, sera l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} f\, dz.$$

178. Notre proposition est donc démontrée, et nous aurons

$$\Gamma'(m) = \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{0}^{\infty} x^{m-1} e^{-x} (e^{-z} - e^{-xz})\, dx.$$

Mais

$$\int_{0}^{\infty} x^{m-1} e^{-x} e^{-z}\, dx = e^{-z}\, \Gamma(m),$$

et, d'autre part, en posant $x(1+z) = y$,

$$\int_{0}^{\infty} x^{m-1} e^{-x} e^{-xz}\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{y^{m-1} e^{-y}\, dy}{(1+z)^m} = \frac{\Gamma(m)}{(1+z)^m}.$$

Donc

$$\Gamma'(m) = \Gamma(m) \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z}\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^m}\right].$$

Divisons par $\Gamma(m)$ et intégrons de $m = 1$ à $m = n$; on

aura, au premier membre, $\log\Gamma(n)$, car

$$\log\Gamma(1) = \log 1 = 0.$$

Au second membre, on pourra encore intervertir les intégrations; on a, en effet, μ désignant un nombre positif quelconque moindre que 1 et que n (m étant au contraire compris entre 1 et n),

$$\left|\int_B^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^m}\right]\right| \leqq \int_B^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z} + \int_B^\infty \frac{dz}{z^{1+\mu}},$$

quantité indépendante de m et qui tend vers zéro quand B croît indéfiniment.

Effectuant donc l'intégration par rapport à m, il viendra

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[(n-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-n}}{\log(1+z)}\right].$$

Posant en particulier $n = 2$, il viendra, en remarquant que $\log\Gamma(2) = \log 1 = 0$,

$$0 = \int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{\log(1+z)}\right].$$

Multipliant par $(n-1)$, et retranchant de la formule précédente, pour se débarrasser du terme en e^{-z}, il vient

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-n}}{z}\right]\frac{dz}{\log(1+z)},$$

et, en posant $\log(1+z) = x$, d'où $z = e^x - 1$,

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

179. Le facteur $\frac{1}{1-e^{-x}}$, qui multiplie e^{-nx} dans l'intégrale précédente, étant développé en série suivant les puissances croissantes de x, aura pour premiers termes $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$. Réunissant ces termes $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-nx}$ à ceux qui sont indé-

pendants de cette exponentielle, il viendra

$$\log\Gamma(n) = F(n) + \varpi(n),$$

en posant, pour abréger,

$$F(n) = \int_0^\infty \left[\left(n - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-nx}\right]\frac{dx}{x}$$

$$\varpi(n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-nx}\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale $F(n)$ peut se calculer exactement. On a, en effet (**171**),

$$\begin{aligned} F(n) - F(\tfrac{1}{2}) &= \int_0^\infty \left[(n-\tfrac{1}{2})e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x} \\ &= (n-\tfrac{1}{2})\log n - n + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a, en second lieu,

$$F(\tfrac{1}{2}) = \log\Gamma(\tfrac{1}{2}) - \varpi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\log\pi - \varpi(\tfrac{1}{2}).$$

Enfin

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\frac{dx}{x},$$

ou, en changeant x en $2x$,

$$(2) \qquad \varpi(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x},$$

et, en changeant x en $2x$,

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)e^{-2x}\frac{dx}{x},$$

et, en retranchant,

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{2-e^{-x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Retranchant cette égalité de la formule (2), il viendra (171)

$$\varpi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x} \right) dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2.$$

On aura donc enfin

$$F(n) = \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\log n - n + \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Quant à la seconde intégrale $\varpi(n)$, elle tend évidemment vers zéro quand n augmente. On peut la développer en série de diverses manières.

180. Développons, par exemple, la fonction qui multiplie e^{-nx} suivant les puissances de x.

On a

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{1}{x} = \frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} - \frac{1}{x}.$$

Mais on a (*Calcul différentiel*, 377)

$$\pi\cot\pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2z}{z^2-n^2},$$

et, en posant $z = \frac{ix}{2\pi}$ et multipliant par $\frac{i}{2\pi}$,

$$\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} - \frac{1}{x} = 2\sum_1^\infty \frac{x}{x^2+4n^2\pi^2}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

$$=2\sum_1^\infty \frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}=2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4n^2\pi^2)^2}+\frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^3}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(4n^2\pi^2)^m(x^2+4n^2\pi^2)}\right].$$

On a d'ailleurs (*Calcul différentiel*, 376)

$$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4n^2\pi^2)^p}=\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2p}}=\frac{B_p}{1.2\ldots 2p}.$$

En outre,

$$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4n^2\pi^2)^m(x^2+4n^2\pi^2)}=2\theta\sum_1^\infty\frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}}$$
$$=\theta\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots(2m+2)},$$

θ étant compris entre 0 et 1. On aura donc

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^2+\ldots$$
$$+(-1)^m\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots(2m+2)}\theta x^{2m}.$$

On en déduira $\varpi(n)$, en multipliant par e^{-nx}, et intégrant de 0 à ∞.

Mais on a

$$\int_0^\infty x^{2p}e^{-nx}dx=\frac{\Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}}=\frac{1.2\ldots 2p}{n^{2p+1}},$$

$$\int_0^\infty \theta x^{2m}e^{-nx}dx=\theta_1\int_0^\infty x^{2m}e^{-nx}dx=\theta_1\frac{1.2\ldots 2m}{n^{2m+1}},$$

θ_1 étant encore compris entre o et 1. On trouvera donc

$$\varpi(n) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}B_m}{(2m-1)2m}\frac{1}{n^{2m-1}} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\frac{\theta_1}{n^{2m+1}}.$$

181. La série que nous venons d'obtenir pour la valeur de $\varpi(n)$ serait divergente si on la prolongeait jusqu'à l'infini. Toutefois, les premiers termes décroissent rapidement pour peu que n soit considérable. L'expression du reste montre d'ailleurs que l'erreur est moindre que le premier terme négligé. En s'arrêtant au moment où les termes commencent à croître de nouveau, on aura donc une valeur de $\varpi(n)$ dont le degré d'exactitude est facile à apprécier, et sera, en général, largement suffisant.

Si n tend vers ∞, $\varpi(n)$ tendra vers zéro et pourra être négligé. On aura donc à la limite

$$\log\Gamma(n) = F(n),$$

et, comme on a

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

il viendra

$$\log\Gamma(n+1) = F(n) + \log n = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

182. Les résultats qui précèdent permettent de calculer, avec une erreur relative d'autant plus faible que n sera plus grand, la valeur d'une factorielle quelconque

$$F = a(a+b)\ldots(a+nb).$$

On a, en effet,

$$F = ab^n\left(\frac{a}{b}+1\right)\ldots\left(\frac{a}{b}+n\right) = ab^n\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)},$$

$$\log F = \log a + n\log b + \log\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right) - \log\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right).$$

Mais on obtiendra, par la méthode précédente, une valeur approchée de $\log\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)$. Le dernier logarithme se calculera de même, si $\frac{a}{b}$ est un grand nombre; sinon, on devra recourir à une Table des valeurs de la fonction Γ.

183. L'une des applications les plus importantes de la formule précédente est relative au Calcul des probabilités.

Soient p et $q=1-p$ les probabilités de deux événements contradictoires A et B. On démontre aisément que la probabilité que sur μ épreuves successives l'événement B se présente m fois, et l'événement A, $\mu-m$ fois, est représentée par le terme en $p^{\mu-m}q^m$ du développement du binôme $(p+q)^\mu$. Ce terme T_m est donné par la formule

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots m\,1.2\ldots(\mu-m)}p^{\mu-m}q^m \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\mu-m+1)}p^{\mu-m}q^m. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{T_m}{T_{m-1}}=\frac{\mu-m+1}{m}\,\frac{q}{p}=\frac{\mu-m+1}{m}\,\frac{q}{1-q}.$$

Ce rapport sera >1 ou <1, suivant que l'on aura

$$m<(\mu+1)q \quad \text{ou} \quad >(\mu+1)q.$$

Le plus grand terme sera donc T_n, n étant le plus grand entier contenu dans $(\mu+1)q$. Ce nombre n, étant $>(\mu+1)q-1$, mais $\overline{\gtrless}(\mu+1)q$, sera de la forme $\mu q+r$, r étant compris entre $q-1$ et q.

184. Cela posé, cherchons à évaluer la limite vers laquelle tend, lorsque μ croît indéfiniment, la somme

$$S=T_{n-\lambda}+\ldots+T_n+T_{n+1}+\ldots+T_{n+\lambda-1},$$

λ étant un entier fixe ou variable, mais d'un ordre de grandeur inférieur à celui de $\mu^{\frac{2}{3}}$.

Considérons à cet effet la fonction

$$f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+x+1)\Gamma(\mu-n-x+1)} p^{\mu-n-x} q^{n+x}.$$

Soient M et m le maximum et le minimum du rapport $\frac{f(x+\theta)}{f(x)}$ lorsque θ varie de 0 à 1 et x de $-\lambda$ à $\lambda-1$. Soit ρ l'un des entiers compris dans ce dernier intervalle.

Pour $x=\rho$, $f(x)$ se réduira à $T_{n+\rho}$, et de $x=\rho$ à $x=\rho+1$, $f(x)$ sera compris entre $MT_{n+\rho}$ et $mT_{n+\rho}$; on aura donc

$$MT_{n+\rho} > \int_\rho^{\rho+1} f(x)\,dx > mT_{n+\rho}.$$

Posant $\rho = -\lambda, \ldots, \lambda-1$ et ajoutant les résultats, il vient

$$MS > \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx > mS,$$

d'où

$$S = k\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx,$$

k étant compris entre $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{M}$.

Or on a

$$\log f(x) = \log\Gamma(\mu+1) - \log\Gamma(n+x+1) - \log\Gamma(\mu-n-x+1)$$
$$+ (\mu-n-x)\log p + (n+x)\log q,$$

ou, d'après la formule d'approximation trouvée plus haut,

$$\begin{aligned}\log f(x) = {} & (\mu+\tfrac{1}{2})\log\mu - \mu + \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & -(n+x+\tfrac{1}{2})\log(n+x) + n + x - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & -(\mu-n-x+\tfrac{1}{2})\log(\mu-n-x) + \mu - n - x - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\ & +(\mu-n-x)\log p + (n+x)\log q + R,\end{aligned}$$

le reste R étant infiniment petit.

Mais on a $n = \mu q + r$, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\mu - n &= \mu p - r, \\
\log(n + x) &= \log(\mu q + r + x) \\
&= \log \mu q + \log\left(1 + \frac{x + r}{\mu q}\right) \\
&= \log \mu + \log q + \frac{x + r}{\mu q} - \frac{(x + r)^2}{2\mu^2 q^2} + R', \\
\log(\mu - n - x) &= \log(\mu p - r - x) \\
&= \log \mu p + \log\left(1 - \frac{x + r}{\mu p}\right) \\
&= \log \mu + \log p - \frac{x + r}{\mu p} - \frac{(x + r)^2}{2\mu^2 p^2} + R'',
\end{aligned}$$

les restes R' et R'' étant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier (μ étant considéré comme infini du premier ordre), car x varie entre $-\lambda$ et $+\lambda - 1$, qui sont d'ordre inférieur à $\frac{2}{3}$.

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\log f(x)$, réduisant et négligeant les termes infiniment petits, il viendra

$$\begin{aligned}
\log f(x) = &-\tfrac{1}{2}\log \mu - \tfrac{1}{2}\log p - \tfrac{1}{2}\log q \\
&-\tfrac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{x^2}{\mu},
\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{x^2}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} e^{-\frac{x^2}{2pq\mu}}.$$

On en déduit

$$\frac{f(x + \theta)}{f(x)} = e^{-\frac{2\theta x + \theta^2}{2pq\mu}}.$$

Si θ varie de 0 à 1 et x de $-\lambda$ à $\lambda - 1$, ce rapport restera compris entre

$$M = e^{\frac{2\lambda - 1}{2pq\mu}} \quad \text{et} \quad m = e^{-\frac{2\lambda - 1}{2pq\mu}}.$$

Si μ tend vers ∞, ces deux quantités tendront vers l'unité.

Nous aurons donc

$$\lim k = 1$$

et

$$\lim S = \lim \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx = \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2pq\mu}}\,dx.$$

185. Posons, pour simplifier,

$$x = t\sqrt{2pq\mu}.$$

L'intégrale

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}}^{\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}} e^{-t^2}\,dt.$$

Si λ croît moins rapidement que $\sqrt{\mu}$, cette intégrale aura pour limite zéro, le champ d'intégration décroissant indéfiniment. Si $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ tend vers une limite finie, l'intégrale aura une valeur variable avec cette limite. Enfin, si $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ tend vers ∞, l'intégrale tendra vers

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.$$

Donc, si le nombre μ des épreuves croît indéfiniment, la probabilité que le rapport du nombre des événements B au nombre des événements A reste compris entre les deux limites $\frac{n-\lambda}{\mu-n+\lambda}$ et $\frac{n+\lambda-1}{\mu-n-\lambda+1}$ tendra vers la certitude, si λ croît plus vite que $\sqrt{\mu}$. Or les deux limites ci-dessus tendent évidemment toutes deux vers $\frac{q}{p}$. Donc le rapport du nombre des événements A à celui des événements B tendra vers la même limite.

Cet important résultat est connu sous le nom de *théorème de Bernoulli.*

186. *Produit de deux fonctions* Γ. — On a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty 2x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty 2y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

et, en posant $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty 4\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi \int_0^\infty 2\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}\,d\rho$$

$$= \mathrm{B}(p,q)\,\Gamma(p+q),$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Soit en particulier $p = q = \frac{1}{2}$. On aura

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = \pi,$$

$$\Gamma(p+q) = 1$$

et, par suite,

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

formule déjà obtenue (**172**).

Posons plus généralement $q = 1 - p$; il viendra (*Calcul différentiel*, **384**)

$$\mathrm{B}(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

187. L'intégrale $B(p, q)$, que nous venons de ramener aux fonctions Γ, porte le nom d'*intégrale eulérienne de première espèce.* Elle est susceptible de plusieurs autres formes.

Posons, par exemple,

$$\cos^2\varphi = x, \qquad \text{d'où} \qquad -2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = dx;$$

il viendra

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx.$$

Posons encore

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

il viendra

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\, dy}{(1+y)^{p+q}}.$$

188. Considérons l'intégrale multiple

$$I = \int\int\int f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\right] x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\, dx\, dy\, dz$$

prise pour tous les systèmes de valeurs positives des variables qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leqq 1.$$

Posons

$$x = a x_1^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad y = b y_1^{\frac{1}{\beta}}, \qquad z = c z_1^{\frac{1}{\gamma}},$$
$$p = \alpha p_1, \qquad q = \beta q_1, \qquad r = \gamma r_1.$$

L'intégrale deviendra

$$\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \int\int\int f(x_1 + y_1 + z_1)\, x_1^{p_1-1} y_1^{q_1-1} z_1^{r_1-1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

et devra être étendue à tous les systèmes de valeurs positives des variables qui satisfont à la relation

$$x_1 + y_1 + z_1 \leqq 1.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} X &= x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \\ Y &= \phantom{x_1 +{}} y_1 + z_1 = \xi\eta, \\ Z &= \phantom{x_1 + y_1 +{}} z_1 = \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi(1-\eta), \\ y_1 &= \xi\eta(1-\zeta), \\ z_1 &= \xi\eta\zeta \end{aligned}$$

et

$$dX\,dY\,dZ = dx_1\,dy_1\,dz_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} d\xi\,d\eta\,d\zeta = \xi^2\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Enfin ξ, η, ζ varieront de 0 à 1.

Substituant les nouvelles variables à la place de x_1, y_1, z_1, l'intégrale précédente deviendra

$$\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi)\xi^{p_1+q_1+r_1-1}(1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Les variables étant complètement séparées, cette intégrale sera le produit des trois suivantes

$$\int_0^1 f(\xi)\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi,$$

$$\int_0^1 (1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}\,d\eta = B(p_1, q_1+r_1) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\zeta \qquad = B(q_1, r_1) \qquad = \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(q_1+r_1)}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)} \int_0^1 f(\xi)\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi \\ &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)} \int_0^1 f(\xi)\xi^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}-1}\,d\xi, \end{aligned}$$

et l'intégrale multiple sera ainsi réduite à une intégrale simple.

189. Supposons, en particulier, que la fonction f se réduise à une constante K. L'intégrale simple sera égale à $\dfrac{K}{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}$, et I sera complètement calculée en fonction des transcendantes Γ.

Cette formule a de nombreuses applications au calcul des volumes, centres de gravité, moments d'inertie. Cherchons, par exemple, le moment d'inertie d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

homogène et de densité 1, par rapport à l'axe des z. L'intégrale à calculer sera la suivante

$$\iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

On en aura le huitième en se bornant aux valeurs positives des coordonnées.

Le premier terme de cette intégrale s'obtient en posant, dans la formule précédente,

$$\alpha=\beta=\gamma=2, \qquad p=3, \qquad q=r=1, \qquad f=1.$$

Il aura pour valeur

$$\frac{a^3bc}{8}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}\,\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{a^3bc}{8}\,\frac{\pi}{\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}.$$

Calculant de même le second terme, ajoutant et multipliant par 8, il viendra, pour le moment d'inertie cherché,

$$\tfrac{4}{15}(a^2+b^2)\pi abc.$$

III. — Potentiel.

190. *Potentiel d'un corps à trois dimensions.* — D'après la loi de Newton, deux points de masses m et m' exercent

l'un sur l'autre, suivant la droite qui les joint, une attraction F égale à $\frac{fmm'}{r^2}$, f désignant une constante et r la distance des deux points.

Supposons, pour plus de simplicité, que la masse m' du point attiré soit égale à $\frac{1}{f}$; soient a, b, c ses coordonnées, x, y, z celles du point attirant, on aura

$$F = \frac{m}{r^2}, \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

La droite qui joint les deux points ayant pour cosinus directeurs $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$, les composantes de l'attraction suivant les trois axes coordonnés seront

$$X = \frac{m(x-a)}{r^3}, \qquad Y = \frac{m(y-b)}{r^3}, \qquad Z = \frac{m(z-c)}{r^3}.$$

Si, au lieu d'un seul point attirant, on en a plusieurs, on aura, pour les trois composantes,

$$X = \sum \frac{m(x-a)}{r^3}, \quad Y = \sum \frac{m(y-b)}{r^3}, \quad Z = \sum \frac{m(z-c)}{r^3}.$$

Enfin, si les points attirants forment un corps continu, on le décomposera en éléments infiniment petits. Soient x, y, z les coordonnées d'un de ces éléments, dV son volume, $\mu = f(x, y, z)$ sa densité; sa masse sera $\mu\, dV$; les composantes de son attraction seront

$$\frac{x-a}{r^3}\mu\, dV, \quad \frac{y-b}{r^3}\mu\, dV, \quad \frac{z-c}{r^3}\mu\, dV,$$

et les composantes de l'attraction totale seront données par les intégrales

$$(1) \qquad X = \int \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV,$$

$$(2) \qquad Y = \int \frac{y-b}{r^3}\mu\, dV,$$

$$(3) \qquad Z = \int \frac{z-c}{r^3}\mu\, dV,$$

étendues à tout le corps attirant.

191. Ces composantes sont les dérivées partielles par rapport à a, b, c de l'intégrale

$$U = \int \frac{\mu\, dV}{r}, \tag{4}$$

qu'on nomme le *potentiel* du point a, b, c. On a, en effet, d'après une règle connue,

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \int \frac{-\mu\, dV}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a}.$$

D'ailleurs

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \tag{5}$$

d'où

$$r \frac{\partial r}{\partial a} = -(x-a).$$

Substituant dans l'intégrale précédente la valeur de $\frac{\partial r}{\partial a}$ tirée de cette équation, il viendra

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \int \frac{x-a}{r^3} \mu\, dV = X. \tag{6}$$

On trouvera de même

$$\frac{\partial U}{\partial b} = Y, \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial c} = Z. \tag{8}$$

Une seconde dérivation donnera

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \int \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] \mu\, dV, \tag{9}$$

et de même

$$\frac{\partial^2 U}{\partial b^2} = \int \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5} \right] \mu\, dV, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = \int \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5} \right] \mu\, dV. \tag{11}$$

Ajoutons ces trois équations ; il viendra, en tenant compte de (5),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = 0. \tag{12}$$

192. Les différentiations sous le signe $\int$, qui nous ont fourni les résultats précédents, ne sont permises, sauf examen ultérieur, que si les fonctions à intégrer restent continues et si le champ d'intégration est fini. Ces conditions seront satisfaites, si l'on suppose : 1° que le corps attirant a des dimensions finies ; 2° que la densité est partout continue ; 3° que le point (a, b, c) est extérieur au corps attirant.

Mais, si le point (a, b, c) fait partie du corps attirant, $\frac{1}{r}$ devenant infini en ce point, une nouvelle discussion devient nécessaire. Elle nous fournira successivement les résultats suivants :

193. *Les intégrales* U, X, Y, Z *restent finies et déterminées.*

Posons, en effet,

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + r\sin\theta\cos\psi, \\ y = b + r\sin\theta\sin\psi, \\ z = c + r\cos\theta, \end{array}\right. \tag{13}$$

d'où

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi;$$

il viendra

$$U = \mathsf{S}\, \mu r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$X = \mathsf{S}\, \mu \sin^2\theta \cos\psi \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

. . . .

Sous cette nouvelle forme, la fonction à intégrer ne devient plus infinie.

Au contraire, les intégrales (9), (10), (11) conserveront r

au dénominateur, et il serait aisé de s'assurer qu'elles sont indéterminées.

194. *L'intégrale* U *a encore pour dérivées partielles* X, Y, Z.

On a, en effet (159), en désignant par r' ce que devient r par le changement de a en $a+h$,

$$\frac{\partial U}{\partial a} = X + \lim \mathbf{S} \frac{1}{h}\left(\frac{\mu}{r'} - \frac{\mu}{r}\right) dV,$$

lorsqu'on fait tendre vers zéro d'abord h, puis le champ de l'intégrale qui figure au second membre.

Or, r, r', h étant les trois côtés d'un triangle, on aura $|r'-r| \leqq |h|$ et, par suite,

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r'}\right)\right| = \left|\frac{\mu(r'-r)}{hrr'}\right| \leqq \frac{\mu}{rr'} \leqq \mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right).$$

Le module de l'intégrale aura donc pour limite supérieure

$$\mathbf{S} \frac{\mu\, dV}{r^2} + \mathbf{S} \frac{\mu\, dV}{r'^2}.$$

Or, si nous passons aux coordonnées polaires définies par les équations (13), la première de ces deux intégrales deviendra

$$\mathbf{S}\, \mu \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

et tendra évidemment vers zéro, si le champ d'intégration décroît indéfiniment. Il en sera de même de la seconde intégrale, si l'on prend des coordonnées polaires ayant leur centre au point $(a+h, b, c)$.

Les dérivées partielles X, Y, Z étant toujours finies et déterminées, le potentiel U sera continu dans tout l'espace.

195. *Les fonctions* X, Y, Z *sont également continues dans tout l'espace, et leurs dérivées partielles sont finies et déterminées dans tous les points où les dérivées partielles* $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z}$ *sont continues.*

En effet, considérons par exemple l'intégrale X. Si l'on y change x en $x+h$, elle deviendra

$$\mathrm{S}\frac{x-a-h}{r'^3}\mu\, d\mathrm{V}.$$

Supposons $|h|$ moindre qu'une quantité fixe δ.

Décomposons le champ en deux régions D et d, cette dernière étant une sphère d'un rayon R plus grand que δ et ayant pour centre le point (a, b, c). L'intégrale partielle S_{D} étant continue, il suffira, pour établir la continuité, de montrer que, en prenant R et δ assez petits, on pourra faire en sorte que le module de la seconde intégrale partielle

$$\mathrm{S}_d\frac{x-a-h}{r'^3}\mu\, d\mathrm{V}$$

soit constamment moindre qu'une quantité arbitraire ε (156).

Prenons pour nouvelles variables des coordonnées polaires, r', θ, ψ ayant leur centre au point $(a+h, b, c)$. L'intégrale ci-dessus deviendra

$$\mathrm{S}\,\mu \sin^2\theta \cos\psi\, dr'\, d\theta\, d\psi,$$

et, si M désigne le maximum du module de μ dans la sphère d, son module sera moindre que

$$\mathrm{M}\,\mathrm{S} \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\psi.$$

Il sera *a fortiori* moindre que cette dernière intégrale, étendue à une sphère de rayon $\mathrm{R}+\delta$ décrite autour du point $(a+h, b, c)$, car cette nouvelle sphère contient la sphère d. Mais cette nouvelle intégrale a pour valeur

$$\mathrm{M}.2\pi.2(\mathrm{R}+\delta).$$

Si nous faisons décroître R et δ, M ne pourra que décroître. L'expression précédente tendra donc vers zéro, et pourra être rendue moindre que ε.

196. Cherchons la dérivée de X. On connaît déjà celle de l'intégrale $\mathbf{S}_D$. Quant à celle de l'autre intégrale partielle $\mathbf{S}_d$, elle est égale, par définition, à la limite vers laquelle tend, pour $h=0$, l'expression

$$(14)\qquad \frac{1}{h}\left(\mathbf{S}_d \frac{x-a-h}{r'^3}\mu\, dV - \mathbf{S}_d \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV\right).$$

Changeons x en $x+h$ dans la première intégrale; elle devient

$$\mathbf{S}_{d_1} \frac{x-a}{r^3}\mu_1 dV,$$

d_1 désignant une nouvelle sphère égale à d, mais déplacée de la quantité h du côté des x négatifs, et μ_1 la densité au point $(x+h, y, z)$.

On aura, d'autre part,

$$\mathbf{S}_d \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV$$
$$= \mathbf{S}_{d_1} \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV + \mathbf{S}_\rho \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV - \mathbf{S}_{\rho_1} \frac{x-a}{r^3}\mu\, dV,$$

ρ désignant la partie de d qui n'appartient pas à d_1, et ρ_1 la partie de d_1 qui n'appartient pas à d.

L'expression (14) deviendra donc

$$\mathbf{S}_{d_1} \frac{x-a}{r^3}\frac{\mu_1-\mu}{h} dV - \mathbf{S}_\rho \frac{1}{h}\frac{x-a}{r^3}\mu\, dV + \mathbf{S}_{\rho_1} \frac{1}{h}\frac{x-a}{r^3}\mu\, dV.$$

197. A la limite, $\frac{\mu_1-\mu}{h}$ tend vers $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, quantité finie et déterminée. La première intégrale deviendra donc

$$\mathbf{S}_{d_1} \frac{x-a}{r^3}\frac{\partial\mu}{\partial x} dV.$$

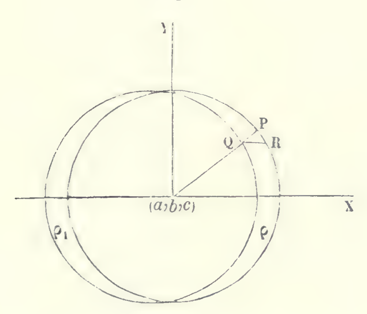
Cette expression, de même forme que l'intégrale X, sera finie

et continue, et tendra évidemment vers zéro, si le rayon des sphères décroît indéfiniment.

198. Passons à l'examen de la seconde intégrale $\mathbf{S}_\rho$.

Soient r, θ, ψ les coordonnées polaires d'un point P (*fig.* 8) pris à la surface de la sphère d, PQ la portion du rayon vecteur interceptée entre les deux sphères d et d_1. Par le point Q,

Fig. 8.



menons une parallèle QR aux x positifs. La quantité $\text{QR} = h$ étant infiniment petite, le triangle PQR sera sensiblement rectangle et donnera

$$\text{PQ} = h \cos \text{PQR} = h\,\frac{x-a}{r}.$$

Cela posé, soit $d\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ un élément de la surface sphérique contenant le point P. L'élément de volume $d\text{V}$, intercepté dans la région ρ par le cône de base $d\sigma$ ayant son sommet à l'origine, sera évidemment

$$\text{PQ}\, d\sigma = hr(x-a)\sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et l'élément correspondant de l'intégrale sera

$$\frac{x-a}{r^3}\,\mu r(x-a)\sin\theta\, d\theta\, d\psi = \mu \sin^3\theta \cos^2\psi\, d\theta\, d\psi.$$

Les éléments de la troisième intégrale se calculeront de la même manière, avec cette différence que, x étant $< a$, la

quantité PQ, qui doit toujours être prise positivement, ne sera plus égale à $h\frac{x-a}{r}$, mais à $\frac{h(a-x)}{r}$, ce qui entraînera un changement de signe.

On aura donc, en réunissant ces deux intégrales,

$$-\mathbf{S}_{\rho}+\mathbf{S}_{\rho_1}=-\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\mu\cos^2\psi\,d\psi.$$

Si nous faisons décroître indéfiniment le rayon de la sphère d, la densité μ tendra vers une valeur constante μ_0, égale à la densité au point (a, b, c); et l'on aura

$$-\mathbf{S}_{\rho}+\mathbf{S}_{\rho_1}=-\mu_0\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi=-\frac{4\pi}{3}\mu_0.$$

On aura, par suite,

$$\frac{\partial X}{\partial a}=\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}=\lim_{d=0}\mathbf{S}_{D}\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5}\right]\mu\,dV-\frac{4\pi}{3}\mu_0.$$

Cette valeur sera finie et déterminée, si le premier terme du second membre tend vers une limite fixe lorsque le rayon ρ de la sphère d tend vers zéro.

Pour montrer qu'il en est ainsi, il suffit d'établir que d, d' désignent deux sphères concentriques de rayons infiniment petits ρ, ρ', l'intégrale

$$\mathbf{S}_{d-d'}\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5}\right]\mu\,dV,$$

prise dans la couronne comprise entre ces deux sphères, est infiniment petite.

Or la formule de Taylor, arrêtée à son premier terme, donne

$$\mu=\mu_0+A(x-a)+B(y-b)+C(z-c),$$

A, B, C étant les valeurs de $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$ en un point dont les coordonnées sont

$$a+\theta(x-a),\qquad b+\theta(y-b),\qquad c+\theta(z-c),$$

θ étant compris entre o et 1. Ces dérivées partielles étant continues au point a, b, c, les modules $|A|$, $|B|$, $|C|$ resteront, aux environs de ce point, inférieurs à un nombre fixe M.

Substituons la valeur ci-dessus de μ dans l'intégrale. Le premier terme

$$\mathbf{S}_{d-d'}\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5}\right]\mu_0\, dV$$

prendra, en passant aux coordonnées polaires

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = b + r\sin\theta\cos\psi, \qquad z = c + r\sin\theta\sin\psi,$$

la forme suivante

$$\mu_0\int_\rho^{\rho'} dr\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{\pi}(-1+3\cos^2\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta}{r}.$$

Cette intégrale est nulle, car la première intégration par rapport à θ donne comme résultat

$$\left(\frac{\cos\theta-\cos^3\theta}{r}\right)_0^\pi = 0.$$

Quant à l'intégrale restante

$$\mathbf{S}_{d-d'}\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5}\right][A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)]\, dV,$$

son module sera moindre que

$$\mathbf{S}_{d-d'}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{3}{r^3}\right)3\, M r . r^2\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

$$=\int_\rho^{\rho'} d\rho\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{\pi} 12\, M\sin\theta\, d\theta = 24\, M . 2\pi(\rho'-\rho),$$

quantité infiniment petite.

199. On obtiendra pour $\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}$ des expressions analogues à celle que nous venons de trouver pour $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}$; en les

ajoutant, les intégrales se détruiront, et il viendra

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = -4\pi\mu_0,$$

formule qui contient, comme cas particulier, celle que nous avons trouvée plus haut pour le point extérieur, où la densité était nulle.

200. Si la densité μ est constante, les intégrales X, Y, Z pourront se ramener, et cela de plusieurs manières, à des intégrales doubles.

On a, en effet,

$$X = \mu \mathbf{S} \frac{x-a}{r^3}\, dx\, dy\, dz = -\mu \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

et, par suite (149),

$$X = -\mu \mathbf{S} \frac{\cos NX}{r}\, d\sigma.$$

D'autre part, prenons pour variables des coordonnées polaires ayant leur centre au point a, b, c; on aura

$$X = \mu \mathbf{S} \frac{x-a}{r} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Or on a

$$\frac{x-a}{r} = \cos RX,$$

RX désignant l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x. Cette quantité étant indépendante de r, l'intégration par rapport à r donnera (150)

$$X = \mu \mathbf{S} \frac{\cos RX \cos NR}{r}\, d\sigma.$$

201. *Attraction d'un ellipsoïde.* — Appliquons ces résultats à la recherche de l'attraction exercée par l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

que nous supposerons homogène et de densité 1.

Cette équation peut être remplacée par le système des trois suivantes :

$$x = \alpha \cos p,$$
$$y = \beta \sin p \cos q,$$
$$z = \gamma \sin p \sin q,$$

où p variera de o à π et q de o à 2π.

On a

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\alpha \sin p, \qquad \frac{\partial x}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = \beta \cos p \cos q, \qquad \frac{\partial y}{\partial q} = -\beta \sin p \sin q,$$
$$\frac{\partial z}{\partial p} = \gamma \cos p \sin q, \qquad \frac{\partial z}{\partial q} = \gamma \sin p \cos q,$$

et l'élément d'aire $d\sigma$ aura pour projections

$$\begin{aligned} d\sigma \cos \mathrm{NX} &= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}\right) dp\, dq \\ &= \beta\gamma \sin p \cos p\, dp\, dq \\ &= \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{x}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$d\sigma \cos \mathrm{NY} = \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{y}{\beta^2},$$

$$d\sigma \cos \mathrm{NZ} = \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{z}{\gamma^2}.$$

Cela posé, on aura (200) pour la composante X de l'attraction, suivant l'axe des x,

$$\mathrm{X} = -\mathbf{S} \frac{\beta\gamma \sin p \cos p}{r} dp\, dq,$$

d'où, en posant $\dfrac{\mathrm{X}}{\alpha\beta\gamma} = \xi$,

(15) $$\alpha\xi = -\mathbf{S} \frac{\sin p \cos p}{r} dp\, dq.$$

Cherchons comment varie la quantité ξ, lorsque l'on fait varier les axes α, β, γ de telle sorte que les différences $\beta^2-\alpha^2=\delta$, $\gamma^2-\alpha^2=\delta_1$ demeurent constantes.

En vertu de ces relations, une seule de ces variables, α par exemple, sera indépendante, et l'on aura

$$\alpha\,d\alpha=\beta\,d\beta=\gamma\,d\gamma,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=\cos p\quad=\frac{x}{\alpha^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{y}{\beta^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}=\frac{\partial z}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=\frac{z}{\gamma^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial r}{\partial\alpha}=\frac{(x-a)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+(y-b)\frac{\partial y}{\partial\alpha}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial\alpha}}{r}$$

$$=\left(\frac{x}{\alpha^2}\cos\mathrm{RX}+\frac{y}{\beta^2}\cos\mathrm{RY}+\frac{z}{\gamma^2}\cos\mathrm{RZ}\right)\alpha,$$

$$d.\alpha\xi=\alpha\,d\xi+\xi\,d\alpha=\mathbf{S}\frac{\sin p\cos p}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\alpha}d\alpha\,dp\,dq,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial r}{\partial\alpha}$ par sa valeur et $\cos p$ par $\frac{x}{\alpha}$,

$$\alpha\,d\xi+\xi\,d\alpha=\mathbf{S}\frac{\sin p}{r^2}x\left(\frac{x}{\alpha^2}\cos\mathrm{RX}+\frac{y}{\beta^2}\cos\mathrm{RY}+\frac{z}{\gamma^2}\cos\mathrm{RZ}\right)d\alpha\,dp\,dq$$

$$=\frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\mathbf{S}\frac{x(\cos\mathrm{NX}\cos\mathrm{RX}+\cos\mathrm{NY}\cos\mathrm{RY}+\cos\mathrm{NZ}\cos\mathrm{RZ})}{r^2}d\sigma$$

$$=\frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\mathbf{S}\frac{x\cos\mathrm{NR}}{r^2}d\sigma$$

$$=\frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\mathbf{S}\frac{x-a}{r}\frac{\cos\mathrm{NR}}{r}d\sigma+\frac{a\,d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\mathbf{S}\frac{\cos\mathrm{NR}}{r^2}d\sigma.$$

Or la première intégrale est égale à $\frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{X}=\xi\,d\alpha$ (200) ; et la seconde est égale à zéro ou à $\frac{4\pi a\,d\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ (151), suivant que le point a, b, c est extérieur ou intérieur à l'ellipsoïde.

202. Supposons d'abord le point extérieur. On aura

$$d\xi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \xi = C, \qquad X = C\alpha\beta\gamma,$$

C désignant une constante; d'où ce théorème énoncé par Maclaurin :

Les composantes des attractions de deux ellipsoïdes homofocaux homogènes sur un point extérieur sont proportionnelles à leurs masses.

On sait, d'ailleurs, que X est une fonction continue des coordonnées du point attiré. Le théorème subsistera donc encore lorsque ce point, au lieu d'être situé en dehors de l'ellipsoïde attirant, sera sur sa surface extérieure.

Le problème de l'attraction sur un point extérieur se trouve ainsi ramené à celui de l'attraction sur un point de la surface, lequel n'est qu'un cas particulier de l'attraction sur un point intérieur.

203. Passons donc au cas du point intérieur. On aura

$$\alpha\, d\xi = \frac{4\pi a\, d\alpha}{\alpha\beta\gamma},$$

d'où

$$d\xi = 4\pi a \frac{d\alpha}{\alpha^2\beta\gamma} = 4\pi a \frac{d\alpha}{\alpha^2\sqrt{(\delta+\alpha^2)(\delta_1+\alpha^2)}}$$

et, par suite,

$$\xi = 4\pi a \int_\infty^\alpha \frac{d\alpha}{\alpha^2\sqrt{(\delta+\alpha^2)(\delta_1+\alpha^2)}} + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on remarquera qu'en vertu de la formule (15) ξ tend vers zéro quand α augmente indéfiniment; car r tend vers ∞ en même temps que α, β et γ; donc la constante est nulle. On aura donc, en remplaçant pour plus de clarté la lettre α par t sous le signe d'intégration,

$$X = \alpha\beta\gamma\xi = 4\pi\alpha\beta\gamma a \int_\infty^\alpha \frac{dt}{t^2\sqrt{(\delta+t^2)(\delta_1+t^2)}},$$

ou, en posant $t = \frac{\alpha}{u}$ et remarquant que $\delta = \beta^2 - \alpha^2$, $\delta_1 = \gamma^2 - \alpha^2$,

$$X = -\frac{4\pi\beta\gamma a}{\alpha^2}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}u^2\right)\left(1 - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}u^2\right)}}.$$

Une permutation circulaire donnera Y et Z.

On remarquera que X, Y, Z varient proportionnellement aux coordonnées a, b, c. On aura donc à calculer les mêmes intégrales, quel que soit le point attiré.

Remarquons, en outre, que X, Y, Z ne dépendent que des rapports des axes α, β, γ. Si donc on remplace l'ellipsoïde par un autre ellipsoïde homothétique, l'attraction restera la même; d'où ce théorème :

L'attraction d'une couche homogène limitée par deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques est nulle sur tout point intérieur.

204. Le cas où l'ellipsoïde se réduit à une sphère mérite une attention particulière. L'attraction sur un point extérieur est la même que celle de toute sphère concentrique de même masse. En faisant décroître indéfiniment le rayon de la sphère, on arrive à cette conséquence :

L'attraction d'une sphère homogène sur un point intérieur est la même que si toute la masse était réunie au centre.

205. *Potentiel d'une surface.* — Supposons maintenant que le corps attirant, au lieu d'avoir, comme précédemment, trois dimensions, se réduise à une surface. Soient $d\sigma$ un élément de cette surface, μ sa densité; on aura, pour le potentiel, l'intégrale double

$$U = \mathbf{S}\frac{\mu\,d\sigma}{r},$$

et, pour les composantes de l'attraction,

$$X = \mathbf{S} \frac{\mu(x-a)}{r^3} d\sigma = \frac{\partial U}{\partial a},$$

$$Y = \mathbf{S} \frac{\mu(y-b)}{r^3} d\sigma = \frac{\partial U}{\partial b},$$

$$Z = \mathbf{S} \frac{\mu(z-c)}{r^3} d\sigma = \frac{\partial U}{\partial c}.$$

Si le point est sur la surface attirante, ces formules peuvent devenir illusoires. Il y a donc lieu de les discuter.

206. Pour plus de simplicité, prenons pour origine des coordonnées le point (a, b, c), et pour plan des xy le plan tangent en ce point. L'intégrale U restera finie et continue en ce point.

Soit en effet (h, k, l) un point voisin de l'origine. Supposons $|h|$, $|k|$, $|l|$ moindres qu'une quantité fixe δ. La valeur correspondante de U sera donnée par l'intégrale

$$\mathbf{S} \frac{\mu\, d\sigma}{\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2}}.$$

Traçons sur le plan tangent, avec l'origine pour centre, un cercle de rayon $R > 2\delta$. Soient d la région interceptée dans la surface par un cylindre droit ayant ce cercle pour base; D le reste de la surface.

L'intégrale ci-dessus se décompose en deux autres, S_d et S_D. La seconde est évidemment continue; il suffira donc de montrer que R et δ peuvent être pris assez petits pour que le module de S_d soit $< \varepsilon$.

Prenons pour variables des coordonnées semi-polaires ρ, θ, ζ définies par les relations

$$x = h + \rho\cos\theta, \qquad y = k + \rho\sin\theta, \qquad z = l + \zeta.$$

L'intégrale deviendra

$$\mathbf{S} \frac{\mu\, d\sigma}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} = \mathbf{S} \frac{\mu}{\cos\psi} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

ψ désignant le petit angle formé par le plan tangent à l'élément $d\sigma$ avec le plan des xy.

Soit M le maximum de $\frac{\mu}{\cos\psi}$ dans la région d; le module de l'intégrale ci-dessus sera au plus égal à $\mathrm{MS}\,d\rho\,d\theta$. Mais on a évidemment dans toute la région d

$$\rho \overline{\gtreqless} \mathrm{R} + |h| + |k| < \mathrm{R} + 2\delta.$$

Cette dernière intégrale sera donc moindre que la suivante

$$\mathrm{M}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\mathrm{R}+2\delta} d\rho = \mathrm{M}.2\pi(\mathrm{R}+2\delta).$$

Si R et δ décroissent, M ne peut que décroître. Cette expression tend donc vers zéro avec R et δ, et peut être rendue moindre que ε.

207. L'intégrale Z reste également finie et déterminée au point $a = b = c = 0$. On peut, en effet, la décomposer en deux autres Z_d et Z_D, prises respectivement dans les régions d et D. La dernière est finie; quant à la première

$$Z_d = \mathbf{S}_d \frac{\mu z\, d\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

l'emploi des coordonnées semipolaires

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \zeta,$$

permettra de la mettre sous la forme

$$\mathbf{S}\frac{\mu}{\cos\psi}\,\frac{z\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Son module sera fini; car il est au plus égal à

$$\mathrm{M}\,\mathbf{S}\frac{|z|\,\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} < \mathrm{M}\,\mathbf{S}\frac{|z|}{\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

$$< \mathrm{M}m\,\mathbf{S}\, d\rho\, d\theta < \mathrm{M}m.2\pi\mathrm{R},$$

m désignant le maximum de $\left|\frac{z}{\rho^2}\right|$, lequel sera fini, car le plan des xy étant tangent à la surface, z est, aux environs de l'origine, du second ordre en x, y, comme ρ^2.

L'intégrale Z présente toutefois une discontinuité remarquable lorsqu'on traverse la surface. Supposons, en effet, $h = 0$, $k = 0$ et l infiniment petit; on aura

$$Z = \mathbf{S} \frac{\mu(z - l)}{r^3} d\sigma = Z_d + Z_D.$$

Z_D variant d'une manière continue, il suffira de considérer la première intégrale. Elle a pour premier terme

$$\mathbf{S} \frac{\mu z \, d\sigma}{r^3} = \mathbf{S} \frac{\mu}{\cos\psi} \frac{z \rho \, d\rho \, d\theta}{[\rho^2 + (z - l)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette quantité, dont le module est encore moindre que $Mm.2\pi R$, tend vers zéro avec R, quel que soit l, et, par suite, ne donne lieu à aucune discontinuité.

Reste l'intégrale

$$- l \mathbf{S} \frac{\mu \, d\sigma}{r^3}.$$

Le champ d'intégration étant très petit, la densité μ restera sensiblement égale à μ_0, valeur de la densité à l'origine; $d\sigma$ sera sensiblement égal à $\rho \, d\rho \, d\theta$; enfin

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - l)^2}$$

pourra être remplacé par $\sqrt{\rho^2 + l^2}$, car, z étant de l'ordre de ρ^2 et l très petit, $2lz$ et z^2 seront négligeables par rapport à ρ^2.

On aura donc sensiblement, pour la valeur de l'intégrale cherchée,

$$- l\mu_0 \mathbf{S} \frac{\rho \, d\rho \, d\theta}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ρ variant de zéro à R et θ de zéro à 2π. L'intégration donnera

$$2\pi l \mu_0 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2}} \right).$$

Si l tend vers zéro, le premier terme de ce produit tendra vers zéro et le second vers $-2\pi\mu_0$ ou $+2\pi\mu_0$, suivant que l sera positif ou négatif.

La composante Z de l'attraction variera donc brusquement de la quantité $-4\pi\mu_0$, lorsqu'on traverse la surface attirante en se déplaçant sur la normale.

Enfin l'on reconnaît sans peine que, sur la surface attirante, X et Y sont indéterminées.

208. Désignons, pour abréger, par ΔV l'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

L'équation aux dérivées partielles

$$\Delta V = 0,$$

que nous venons de rencontrer dans la théorie du potentiel, joue un rôle considérable dans la Physique mathématique. Les fonctions qui y satisfont ont reçu le nom de *fonctions harmoniques*. Nous sommes en mesure d'établir à leur égard quelques théorèmes généraux.

Soient, en effet, U, V deux fonctions de x, y, z continues, ainsi que leurs dérivées premières, dans un domaine fermé T. On aura

$$\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} U \frac{\partial V}{\partial z} - U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Intégrons dans le domaine T. La première intégrale du second membre se ramène à une intégrale double (149); on aura donc, en désignant par dv l'élément de volume de l'espace T, par $d\sigma$ l'élément de surface de sa frontière, et

par NZ l'angle de la normale extérieure à l'élément avec les z positifs

$$\mathbf{S}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}dv = \mathbf{S}U\frac{\partial V}{\partial z}\cos NZ\,d\sigma - \mathbf{S}U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dv.$$

Permutons circulairement x, y, z dans cette formule, ajoutons les résultats obtenus et posons, pour abréger,

$$I = \mathbf{S}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv;$$

il viendra

$$I = \mathbf{S}U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos NX + \frac{\partial V}{\partial y}\cos NY + \frac{\partial V}{\partial z}\cos NZ\right)d\sigma - \mathbf{S}U\,\Delta V\,dv.$$

L'intégrale double qui figure dans cette formule peut être écrite sous une forme plus condensée. Soient, en effet, δx, δy, δz, δV les variations qu'éprouvent x, y, z, V lorsque, partant d'un point de la surface, on se déplace de la quantité infiniment petite δN sur la normale intérieure; on aura

$$\delta x = -\delta N\cos NX, \qquad \delta y = -\delta N\cos NY, \qquad \delta z = -\delta N\cos NZ,$$

$$\begin{aligned}\delta V &= \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos NX + \frac{\partial V}{\partial y}\cos NY + \frac{\partial V}{\partial z}\cos NZ\right)\delta N.\end{aligned}$$

L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$I = -\mathbf{S}U\frac{\delta V}{\delta N}d\sigma - \mathbf{S}U\,\Delta V\,dv.$$

Permutant U et V et retranchant, il viendra

$$\mathbf{S}\left(V\frac{\delta U}{\delta N} - U\frac{\delta V}{\delta N}\right)d\sigma = \mathbf{S}(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dv,$$

identité qui constitue le *théorème de Green*.

Si U et V sont des fonctions harmoniques, cette relation

se réduit à

$$(16)\qquad \mathbf{S}\left(V\frac{\partial U}{\partial N}-U\frac{\partial V}{\partial N}\right)d\sigma=0.$$

Posons, en particulier, $U=1$; nous aurons

$$(17)\qquad \mathbf{S}\frac{\delta V}{\delta N}\,d\sigma=0.$$

209. Soit (a, b, c) un point intérieur à T. On reconnaît sans peine que la fonction

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

est harmonique. Elle n'est pas continue dans la région T, mais elle le sera dans le domaine T′ obtenu en retranchant de T une sphère s d'un rayon ρ infiniment petit ayant son centre en (a, b, c). On pourra donc appliquer la formule (16) aux deux fonctions $\frac{1}{r}$ et V dans la région T′, ce qui donnera

$$\mathbf{S}\left(V\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N}-\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta N}\right)d\sigma+\mathbf{S}'\left(V\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N}-\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta N}\right)d\sigma=0,$$

l'intégrale $\mathbf{S}$ étant prise sur la surface frontière de T, et l'intégrale $\mathbf{S}'$ sur la frontière de la sphère.

Il est facile d'évaluer cette dernière intégrale. En effet, sur la sphère, r a une valeur constante ρ. Le dernier terme de l'intégrale est donc

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{S}'\frac{\delta V}{\delta N}\,d\sigma,$$

et s'annule en vertu de la formule (17) qui peut être appliquée à la sphère.

On a d'ailleurs

$$\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N}=-\frac{1}{r^2}\frac{\delta r}{\delta N}=-\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{\rho^2},$$

car, N désignant la normale intérieure à T′ (ou extérieure à la sphère), δN et δr sont égaux. Donc

$$\mathbf{S}' V \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta N} d\sigma = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{S}' V\, d\sigma.$$

D'ailleurs, la sphère s étant infiniment petite, la valeur de V en chacun de ses points diffère infiniment peu de la valeur $V(a, b, c)$ qu'il possède en son centre; cette intégrale aura donc pour valeur limite

$$-V(a, b, c) \frac{1}{\rho^2} \mathbf{S}' d\sigma = -4\pi V(a, b, c).$$

Nous aurons donc

$$(18) \qquad 4\pi V(a, b, c) = \mathbf{S} \left(V \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta N} - \frac{1}{r} \frac{\delta V}{\delta N} \right) d\sigma.$$

210. Supposons, en particulier, que T se réduise à une sphère de rayon R et de centre a, b, c; cette formule se réduira, d'après le calcul fait plus haut (en remarquant qu'ici, N représentant la normale intérieure à la sphère, on a $\delta r = -\delta N$, ce qui change le signe du résultat), à

$$(19) \qquad 4\pi V(a, b, c) = \frac{1}{R^2} \mathbf{S} V\, d\sigma.$$

On en conclut ce théorème :

Théorème. — *Une fonction harmonique* V, *continue dans une région* T *sans être constante, ne peut avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de cette région.*

En effet, supposons par exemple qu'elle eût un maximum V_0 au point (a, b, c). Traçons autour de ce point une sphère d'un rayon r arbitraire, mais assez petit pour que la sphère soit intérieure à T. Supposons qu'en un point x, y, z de la surface de la sphère, V fût moindre que son maximum V_0 et fût égal à $V_0 - \alpha$. Soit δ une quantité moindre que α. On pourra assigner une quantité ε telle qu'en tous les points de

la surface de la sphère dont la distance à x, y, z est moindre que ε, V soit encore moindre que $V_0 - \alpha + \delta$. Soient s l'aire de la région d formée par l'ensemble de ces points; $4\pi r^2 - s$ l'aire du reste D de la surface sphérique; V n'y pourra surpasser V_0. On aura évidemment

$$\frac{1}{r^2} \mathbf{S} V\, d\sigma = \frac{1}{r^2} \mathbf{S}_d V\, d\sigma + \frac{1}{r^2} \mathbf{S}_D V\, d\sigma$$
$$< \frac{1}{r^2}(V_0 - \alpha + \delta)s + \frac{1}{r^2} V_0 (4\pi r^2 - s) < 4\pi V_0,$$

ce qui contredit l'équation (19).

Donc la fonction V doit conserver aux environs du point a, b, c la même valeur V_0 qu'en ce point lui-même; et, en cheminant de proche en proche, on voit qu'elle sera constante dans toute la région T.

211. Corollaire. — *Une fonction harmonique continue dans la région* T *est complètement déterminée lorsqu'on connaît sa valeur en chaque point de la frontière de* T.

En effet, soient deux fonctions V, W admettant les mêmes valeurs aux divers points de la frontière; leur différence $V - W$ sera nulle sur toute la frontière de T. Elle le sera aussi à son intérieur, car autrement elle devrait admettre un maximum ou un minimum.

212. On est conduit à se demander s'il existe toujours une fonction harmonique V continue dans la région T et prenant aux divers points de sa frontière un système de valeurs donné *a priori* (sous la seule condition de varier d'une manière continue). Cette question célèbre, connue sous le nom de *problème de Dirichlet,* a été l'objet de nombreux travaux de MM. Schwartz, Neumann, Poincaré, etc. Ils l'ont résolue par l'affirmative, sauf quelques légères restrictions.

Nous nous bornerons à traiter la question dans le cas d'une sphère.

Admettant provisoirement l'existence de la fonction cher-

chée, nous déterminerons d'abord sa forme; et nous vérifierons ensuite qu'elle satisfait aux conditions requises.

Soient

R le rayon de la sphère;
(a, b, c) un point intérieur quelconque;
$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ sa distance au centre.

Nous aurons, d'après les formules précédentes,

$$4\pi V(a, b, c) = \mathbf{S}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N}\right)d\sigma.$$

Dans l'intégrale du second membre figurent, outre les valeurs de V sur la surface de la sphère, celles de $\frac{\partial V}{\partial N}$, qui ne sont pas des données de la question. Mais on peut les éliminer par l'artifice suivant.

Au point (a, b, c) intérieur à la sphère correspond, comme on sait, un point conjugué (a_1, b_1, c_1) situé sur le même diamètre, à une distance l_1 du centre donnée par la formule

$$ll_1 = R^2$$

et les distances r, r_1 des deux points conjugués à un point quelconque de la surface de la sphère seront dans un rapport constant

$$\frac{r_1}{r} = \frac{R}{l}.$$

Appliquant la formule de Green à la fonction V et à la fonction harmonique $\frac{1}{r_1}$, laquelle reste continue dans la sphère, on aura

$$0 = \mathbf{S}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial N} - \frac{1}{r_1}\frac{\partial V}{\partial N}\right)d\sigma.$$

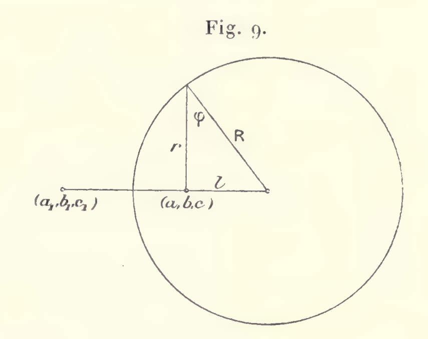
Multiplions cette équation par $\frac{R}{l}$, et retranchons-la de la

précédente, il viendra

$$4\pi V(a, b, c) = \mathbf{S}\, V\left(\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N} - \frac{R}{l}\frac{\delta\frac{1}{r_1}}{\delta N}\right) d\sigma.$$

Or on a évidemment (*fig.* 9)

Fig. 9.



$$\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N} = -\frac{1}{r^2}\frac{\delta r}{\delta N} = \frac{1}{r^2}\cos\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{R^2 + r^2 - l^2}{2Rr}.$$

De même

$$\frac{\delta\frac{1}{r_1}}{\delta N} = \frac{1}{r_1^2}\frac{R^2 + r_1^2 - l_1^2}{2Rr_1}.$$

Substituant ces valeurs et remplaçant ensuite r_1, l_1 par leurs valeurs

$$r_1 = \frac{Rr}{l}, \qquad l_1 = \frac{R^2}{l},$$

on aura enfin

$$(20) \qquad 4\pi V(a, b, c) = \frac{1}{R}\mathbf{S}\frac{R^2 - l^2}{r^3} V\, d\sigma.$$

Telle est la forme nécessaire que doit avoir la solution si elle existe. Mais il reste à prouver que la fonction ainsi obtenue satisfait bien aux conditions requises.

213. 1° Tant que le point (a, b, c) reste intérieur à la

sphère, r n'est jamais nul. L'intégrale et ses dérivées partielles successives sont donc continues.

2° C'est une fonction harmonique. Posant, en effet, pour abréger,

$$f = \frac{R^2 - l^2}{r^3},$$

et tenant compte des relations

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad l^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

on trouve aisément

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = -\frac{3(R^2 - l^2)}{r^5} + \frac{15(R^2 - l^2)(x-a)^2}{r^7} - \frac{2}{r^3} + \frac{12a(a-x)}{r^5},$$

et de même pour $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}$. Ajoutant ces trois expressions et réduisant, il vient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \frac{1}{4\pi R} \mathbf{S} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \right) V \, d\sigma = 0.$$

3° Il reste à prouver que cette fonction prend, en chaque point de la surface de la sphère, les valeurs qui lui ont été assignées d'avance, et qui ont été adoptées pour le calcul de l'intégrale.

Il nous suffira, pour cela, de montrer que, si le point $A = (a, b, c)$ tend vers un point $A_0 = (a_0, b_0, c_0)$ de la surface de la sphère où la valeur assignée soit V_0, l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi R} \mathbf{S} \frac{R^2 - l^2}{r^3} V \, d\sigma$$

tend bien vers V_0.

Cette intégrale est la somme des deux suivantes :

$$\frac{1}{4\pi R}\mathop{\mathbf{S}}\frac{R^2 - l^2}{r^3} V_0\, d\sigma + \frac{1}{4\pi R}\mathop{\mathbf{S}}\frac{R^2 - l^2}{r^3} (V - V_0)\, d\sigma.$$

La première représente une fonction harmonique continue ayant la valeur constante V_0, à supposer que cette fonction existe, ce qui est évidemment le cas, car toute constante satisfait à l'équation $\Delta V = 0$.

Donc la première intégrale a pour valeur V_0. Reste à prouver que la seconde tend vers zéro.

Les valeurs assignées à V sur la sphère variant d'une manière continue, leurs modules ne surpasseront pas un maximum fixe M. Si, d'autre part, nous décrivons autour du point A_0 un petit cercle correspondant à un arc trigonométrique δ infiniment petit, dans la calotte d ainsi détachée de la sphère, $|V - V_0|$ restera inférieur à une quantité ε également infiniment petite.

Dans le reste D de la surface sphérique, chaque point sera à une distance de A_0 au moins égale à $2 \sin\frac{1}{2}\delta$, et, si η est la distance de A à A_0, r sera au moins égal à $2 \sin\frac{1}{2}\delta - \eta$. Enfin l sera au moins égal à $R - \eta$, et $R^2 - l^2 \overline{\gtrless} (2R - \eta)\eta$.

Cela posé, décomposons notre intégrale

$$\mathop{\mathbf{S}}\frac{R^2 - l^2}{r^3} (V - V_0)\, d\sigma$$

en deux autres, correspondant aux deux régions d et D. On aura

$$\left|\mathop{\mathbf{S}}_d \frac{R^2 - l^2}{r^3} (V - V_0)\, d\sigma\right| < \mathop{\mathbf{S}}_d \frac{R^2 - l^2}{r^3} \varepsilon\, d\sigma < \mathop{\mathbf{S}}_{d+D} \frac{R^2 - l^2}{r^3} \varepsilon\, d\sigma < \varepsilon$$

et, d'autre part,

$$\mathop{\mathbf{S}}_D \frac{R^2 - l^2}{r^3} (V - V_0)\, d\sigma < \frac{(2R - \eta)\eta}{(2 \sin\frac{1}{2}\delta - \eta)^3}\, 2M.4\pi R^2.$$

Ces deux expressions tendront toutes deux vers zéro, si l'on fait décroître suffisamment d'abord η, puis δ.

214. Théorème. — *Une fonction harmonique* V *continue dans tout l'espace, et dont le module reste inférieur à une quantité fixe* M, *est nécessairement une constante.*

Appliquons, en effet, la formule (20) pour une sphère d'un rayon infini R, à la détermination de V (a, b, c) et de V(o, o, o). On aura

$$4\pi V(a, b, c) = \frac{1}{R} \mathbf{S} \frac{R^2 - l^2}{r^3} V \, d\sigma,$$

$$4\pi V(o, o, o) = \frac{1}{R} \mathbf{S} \frac{1}{R} V \, d\sigma,$$

$$\begin{aligned} 4\pi [V(a, b, c) - V(o, o, o)] &= \frac{1}{R} \mathbf{S} \left(\frac{R^2 - l^2}{r^3} - \frac{1}{R} \right) V \, d\sigma \\ &= \mathbf{S} \left(\frac{R^3}{r^3} - \frac{R l^2}{r^3} - 1 \right) V \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Or, si R tend vers ∞, $\frac{R}{r}$ tend vers 1, et $|V|$ reste $< M$ par hypothèse. La fonction à intégrer est donc infiniment petite, et, le champ étant fini, il en est de même de l'intégrale. Donc

$$V(a, b, c) = V(o, o, o).$$

CHAPITRE IV.

SÉRIES DE FOURIER.

I. — Intégrales de Fourier.

215. Théorème. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction de* x, *qui admette, dans un intervalle donné* AB, $(B > A)$, *une intégrale finie et déterminée.*

Soit, d'autre part, $f(x)$, *une fonction bornée et non croissante (ou non décroissante) dans le même intervalle.*

L'intégrale de $f(x)\varphi(x)$, *dans l'intervalle* AB, *sera finie et déterminée, et l'on aura*

$$\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = f(A+0)\int_A^\xi \varphi(x)\,dx + f(B-0)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx,$$

ξ *désignant une quantité comprise dans l'intervalle* AB.

Cette proposition, due à M. Ossian Bonnet, est connue sous le nom de *second théorème de la moyenne*.

Pour l'établir, supposons d'abord A et B finis, et $\varphi(x)$ intégrable dans tout le champ; $f(x)\varphi(x)$, étant le produit de deux fonctions intégrables, sera intégrable.

Pour obtenir l'intégrale, nous décomposerons le champ par des points de division $x_1 = A$, x_2, ..., $x_{n+1} = B$ en éléments infiniment petits Δx_1, ..., Δx_n; dans l'intérieur de chacun d'eux, nous prendrons arbitrairement un point ξ_i et nous chercherons la limite de la somme

$$\Sigma f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Or soient M_i, m_i et $O_i = M_i - m_i$ le maximum, le minimum et l'oscillation de $\varphi(x)$ dans l'élément Δx_i; le facteur $\varphi(\xi_i)\Delta x_i$ sera compris entre $M_i \Delta x_i$ et $m_i \Delta x_i$; il en est de même pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx;$$

on aura donc

$$\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx + r_i,$$

$|r_i|$ étant au plus égal à $O_i \Delta x_i$; et, par suite,

$$\Sigma f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \Sigma f(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx + \Sigma r_i f(\xi_i).$$

La première somme du second membre peut évidemment se mettre sous la forme

$$f(\xi_1)\int_{A}^{B} \varphi(x)\,dx + \sum_{2}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^{B} \varphi(x)\,dx.$$

Or les facteurs $f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$ sont tous de même signe et ont pour somme $f(\xi_n) - f(\xi_1)$.

La somme des termes où ils figurent sera donc de la forme

$$[f(\xi_n) - f(\xi_1)]\,\mu,$$

μ étant une quantité comprise entre le plus grand et le plus petit des facteurs

$$\int_{x_i}^{B} \varphi(x)\,dx,$$

et, *a fortiori,* entre le maximum et le minimum des valeurs que prend l'expression

$$\int_{\xi}^{B} \varphi(x)\,dx,$$

lorsque ξ varie de A à B.

Nous aurons donc

$$\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\int_A^B \varphi(x)\,dx + [f(\xi_n) - f(\xi_1)]\mu + \Sigma r_i f(\xi_i).$$

Faisons maintenant décroître indéfiniment les intervalles Δx_i. Le premier membre tendra vers l'intégrale

$$\int_A^B f(x)\,\varphi(x)\,dx;$$

ξ_1 tendra vers A, ξ_n vers B, et par suite $f(\xi_1)$ vers $f(A+o)$, $f(\xi_n)$ vers $f(B-o)$. Enfin $\Sigma r_i f(\xi_i)$ tendra vers zéro; car son module est au plus égal à $L\Sigma O_i\Delta x_i$, L désignant le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle AB; or, $\varphi(x)$ étant intégrable, $\Sigma O_i\Delta x_i$ tend vers zéro. Donc μ tendra aussi vers une limite déterminée μ_0, qui sera comprise, elle aussi, entre le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.$$

Mais cette intégrale, étant une fonction continue de ξ, prend toutes les valeurs comprises entre son maximum et son minimum. On peut donc assigner à ξ une valeur telle qu'elle soit égale à μ_0. Donnant à ξ cette valeur, on aura l'équation limite

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\,\varphi(x)\,dx &= f(A+o)\int_A^B \varphi(x)\,dx \\ &\quad + [f(B-o) - f(A+o)]\int_\xi^B \varphi(x)\,dx \\ &= f(A+o)\int_A^\xi \varphi(x)\,dx + f(B-o)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

216. Passons au cas où le champ AB, étant encore fini, contient des points singuliers c, c', ... aux environs desquels $\varphi(x)$ cesse d'être intégrable. Décomposons encore le champ en éléments infiniment petits $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Désignons en général par Δx_i ceux de ces éléments qui ne contiennent pas de point singulier, par Δx_k les autres. Dans chacun des éléments Δx_i, on peut intégrer la fonction $f(x)\varphi(x)$, et si la somme

$$\sum \int_{\Delta x_i} f(x)\varphi(x)\,dx$$

tend vers une limite fixe, ainsi que nous allons le prouver, ce sera la définition de l'intégrale

$$\int_{A}^{B} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Le champ d'intégration D formé par la somme des éléments Δx_i se compose évidemment d'une somme d'intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... d'un seul tenant, séparés les uns des autres par des points singuliers. A une autre décomposition de AB en éléments infiniment petits correspond un champ analogue D′ et nous devons montrer que la différence

$$\int_{D'} f(x)\varphi(x)\,dx - \int_{D} f(x)\varphi(x)\,dx$$

est infiniment petite. Or soit

$$D'' = D + d = D' + d'$$

le champ formé par la réunion de D et de D′. Il suffira de prouver que la différence

$$\int_{D''} - \int_{D} = \int_{d},$$

est infiniment petite ; car la même démonstration étant applicable à $\int_{D''} - \int_{D'}$, $\int_{D'} - \int_{D}$ sera la différence de deux infiniment petits.

217. Le domaine d se compose d'une suite de domaines partiels d_k respectivement contenus dans les éléments Δx_k ;

chacun de ces derniers, tel que d_k, est lui-même formé par une série de domaines d'un seul tenant, $\alpha_{k1}\beta_{k1}, \ldots, \alpha_{km}\beta_{km}$, séparés les uns des autres par des points singuliers. Appliquant à chacun d'eux le second théorème de la moyenne, il viendra

$$\int_d f(x)\varphi(x)\,dx$$
$$= \sum\left[f(\alpha_{kl}+0)\int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}}\varphi(x)\,dx + f(\beta_{kl}-0)\int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}}\varphi(x)\,dx\right].$$

Soit L le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle AB. Le module de la somme ci-dessus ne pourra surpasser

$$L\sum\left[\left|\int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}}\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}}\varphi(x)\,dx\right|\right].$$

Or chacune des deux parties de cette dernière somme est infiniment petite.

En effet, l'intégrale

$$\int_A^B \varphi(x)\,dx$$

étant déterminée, par hypothèse, l'intégrale

$$\int_D \varphi(x)\,dx$$

ne subira plus que des accroissements infiniment petits si l'on subdivise les éléments Δx_k par de nouveaux points de division choisis d'une manière quelconque.

Introduisons tout d'abord comme nouveaux points de division les points extrêmes α_{k1} et β_{km} de chacun des domaines d_k. Le champ d'intégration D pourra se trouver accru de quelques éléments; appelons D_1 ce qu'il devient par cette adjonction.

Soient maintenant $\alpha_{kp}\xi_{kp}$ ceux des intervalles $\alpha\xi$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx$$

est positive; $\alpha_{kn}\xi_{kn}$ ceux pour lesquels elle est négative. Si nous ajoutons tous les points α_{kp} et ξ_{kp} aux points de division précédents, le champ d'intégration D_1 se trouvera accru des éléments $\alpha_{kp}\xi_{kp}$, et l'intégrale correspondante se trouvera accrue de

$$\sum\int_{\alpha_{kp}}^{\xi_{kp}} f(x)\,dx.$$

Ajoutons encore les nouveaux points de division α_{kn} et ξ_{kn}; nous obtiendrons un accroissement négatif,

$$\sum\int_{\alpha_{kn}}^{\xi_{kn}} f(x)\,dx.$$

Ces deux accroissements sont infiniment petits, par hypothèse. Il en sera de même de leur différence, laquelle est évidemment égale à la somme

$$\sum\left|\int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}} f(x)\,dx\right|,$$

étendue à tous les éléments $\alpha\xi$.

En introduisant comme nouveaux points de division d'abord ceux des points β et ξ pour lesquels l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

est positive, puis ceux pour lesquels elle est négative, on trouvera de même que

$$\sum\left|\int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}} \varphi(x)\,dx\right|$$

est infiniment petit.

218. Ayant établi, par ce qui précède, que l'intégrale

$$\int_{A}^{B} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim\sum\int_{\Delta x_i} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

est déterminée, il est aisé d'achever la démonstration du théorème.

Appliquant, en effet, à chacune des intégrales partielles le second théorème de la moyenne, la somme du second membre pourra se mettre sous la forme

$$(1)\quad \sum\left[f(x_i+0)\int_{x_i}^{\xi_i}\varphi(x)\,dx+f(x_{i+1}-0)\int_{\xi_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)\,dx\right].$$

Cette somme n'est étendue qu'aux éléments Δx_i; mais on peut y ajouter, sans altérer sa limite, des termes analogues correspondant aux éléments Δx_k; car la somme des modules de ces termes ne pourra surpasser

$$\mathrm{L}\sum\left[\left|\int_{x_k}^{\xi_k}\varphi(x)\,dx\right|+\left|\int_{\xi_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)\,dx\right|\right],$$

expression dont les deux termes ont zéro pour limite.

La somme (1) étant maintenant étendue à tous les éléments Δx, remplaçons chacune des intégrales qui y figurent par la différence de deux intégrales ayant B pour limite supérieure; elle prendra la forme suivante

$$\begin{aligned}f(\mathrm{A}+0)\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}&+\sum[f(x_{i+1}-0)-f(x_i+0)]\int_{\xi_i}^{\mathrm{B}}\\&+\sum[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\int_{x_i}^{\mathrm{B}}\\&=f(\mathrm{A}+0)\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}+[f(\mathrm{B}-0)-f(\mathrm{A}+0)]\mu,\end{aligned}$$

μ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\mathrm{B}}\varphi(x)\,dx,$$

et la démonstration s'achèvera comme au n° **215**.

219. Supposons enfin le champ infini, du côté des x positifs, par exemple. L'intégrale

$$\int_{\mathrm{A}}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\lim_{\mathrm{B}=\infty}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

sera déterminée; en effet, si l'on y change B en C, son accroissement pourra être mis sous la forme

$$\int_B^C f(x)\varphi(x)\,dx = f(B+0)\int_B^\xi \varphi(x)\,dx + f(C-0)\int_\xi^C \varphi(x)\,dx.$$

Il est infiniment petit; car les deux intégrales le sont, et $f(B+0)$ et $f(C-0)$ ont un module au plus égal à L.

On aura d'ailleurs, en appliquant le second théorème de la moyenne à l'intégrale prise de A à B,

$$\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = f(A+0)\int_A^\xi \varphi(x)\,dx + f(B-0)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.$$

On peut ajouter au second membre le terme

$$[f(\infty)-f(B-0)]\int_B^\infty \varphi(x)\,dx,$$

dont la limite pour $B=\infty$ est nulle. Cela posé, le second membre de l'équation pourra s'écrire

$$f(A+0)\int_A^\infty \varphi(x)\,dx + [f(B-0)-f(A+0)]\int_\xi^\infty \varphi(x)\,dx + [f(\infty)-f(B-0)]\int_B^\infty \varphi(x)\,dx.$$

La somme des deux derniers termes est le produit de $f(\infty)-f(A+0)$ par une quantité μ, intermédiaire entre les deux intégrales $\int_\xi^\infty$ et $\int_B^\infty$. Mais, l'intégrale $\int_\xi^\infty$ étant une fonction continue de sa limite inférieure, on pourra trouver une quantité η intermédiaire entre ξ et B, telle que l'on ait

$$\mu = \int_\eta^\infty \varphi(x)\,dx,$$

et, par suite,

$$\int_{A}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = f(A+0)\int^{\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$+[f(\infty)-f(A+0)]\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$= f(A+0)\int_{A}^{\eta}\varphi(x)\,dx + f(\infty)\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

220. Les théorèmes que nous établirons dans la suite de ce Chapitre sur les fonctions à variation bornée sont d'une nature telle que, s'ils sont vrais pour deux fonctions f_1, f_2, ils le seront évidemment encore pour leur différence. Nous pouvons donc, tout en les énonçant dans leur généralité, admettre dans les démonstrations que la fonction varie toujours dans le même sens, de manière qu'on puisse lui appliquer le théorème précédent.

221. Théorème. — *Soit $f(\alpha)$ une fonction à variation bornée entre* A *et* B.

Soit, d'autre part, $\varphi(\alpha, n)$ une fonction de α et du paramètre n, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° *L'intégrale $\int_{A}^{b}\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, où b est un nombre quelconque compris dans l'intervalle* AB, *a son module inférieur à une quantité fixe* L, *indépendante de b et de n;*

2° *Si n tend vers ∞, cette même intégrale tend uniformément vers une limite fixe* G, *pour les diverses valeurs de b comprises dans un intervalle quelconque contenu dans* AB, *mais dont le point* A *soit exclu.*

Pour ces mêmes valeurs de b l'intégrale

$$\int_{A}^{b} f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

tendra uniformément vers $G f(A \pm 0)$ *(le signe $+$ devant être adopté si $B > A$, et le signe $-$ si $B < A$).*

Les deux cas se traitent exactement de même. La seule différence qui existe entre eux est que, $A+\lambda$ désignant un nombre compris entre A et B, on a

$$\lim_{\lambda=0} f(A+\lambda) = \begin{cases} f(A+0), & \text{si} \quad B > A, \\ f(A-0), & \text{si} \quad B < A. \end{cases}$$

Nous pourrons donc nous borner au cas où $B > A$.

Posons

$$f(\alpha) = f(A+0) + \psi(\alpha).$$

La nouvelle fonction $\psi(\alpha)$ variera toujours dans le même sens, et l'on aura

$$\psi(A+0) = 0.$$

Cela posé, on a

$$\int_A^b f(\alpha)\,\varphi\,d\alpha = f(A+0)\int_A^b \varphi\,d\alpha + \int_A^b \psi(\alpha)\,\varphi\,d\alpha.$$

Si n tend vers ∞, le premier terme tend uniformément vers $G f(A+0)$. Il suffit donc de montrer que le second tend uniformément vers zéro.

Soit $A+\lambda$ un nombre arbitraire compris entre A et B ; on pourra décomposer l'intégrale en deux autres

$$\int_A^b = \int_A^{A+\lambda} + \int_{A+\lambda}^b.$$

Appliquons à chacune d'elles le théorème de la moyenne ; il viendra pour la valeur de l'intégrale cherchée

$$\psi(A+0)\int_A^{\xi} \varphi\,d\alpha + \psi(A+\lambda-0)\int_{\xi}^{A+\lambda} \varphi\,d\alpha$$
$$+ \psi(A+\lambda+0)\int_{A+\lambda}^{\xi_1} \varphi\,d\alpha + \psi(b-0)\int_{\xi_1}^{b} \varphi\,d\alpha,$$

ξ étant compris entre A et $A+\lambda$ et ξ_1 entre $A+\lambda$ et b.

Le premier terme est nul, et chacun des trois autres tendra uniformément vers zéro, si l'on choisit d'abord λ suffisamment petit, puis n suffisamment grand.

En effet, lorsque λ tend vers zéro, $\psi(A+\lambda-0)$ et $\psi(A+\lambda+0)$ tendent vers zéro, et les intégrales qui les multiplient restent finies; car l'intégrale

$$\int_{\xi}^{A+\lambda} \varphi\, d\alpha,$$

par exemple, est la différence de deux intégrales

$$\int_{A}^{A+\lambda} \varphi\, d\alpha - \int_{A}^{\xi} \varphi\, d\alpha,$$

dont chacune a son module $< L$, par hypothèse.

D'autre part, $\psi(b-0)$ est fini, et l'intégrale

$$\int_{\xi_1}^{b} \varphi\, d\alpha = \int_{A}^{b} \varphi\, d\alpha - \int_{A}^{\xi_1} \varphi\, d\alpha$$

tend uniformément vers zéro, quels que puissent être b et ξ_1, lorsque, après avoir assigné à λ une valeur déterminée, on fait croître n indéfiniment; car b et ξ_1 étant compris dans l'intervalle de $A+\lambda$ à B, les deux intégrales du second membre tendent uniformément vers la même limite G.

222. *Remarque*. — Si la fonction $f(\alpha)$ dépend d'un paramètre x, la convergence de l'intégrale $\int_{A}^{b} f(\alpha)\varphi\, d\alpha$ vers sa limite sera évidemment uniforme par rapport à ce paramètre, si $f(A+\lambda)$ converge uniformément vers sa limite $f(A\pm 0)$, lorsque λ tend vers zéro.

Toutefois, si f, au lieu de varier toujours dans le même sens, comme nous l'avons admis, était la différence de deux fonctions non décroissantes f_1 et f_2, il faudrait, pour la démonstration de ce dernier point, que chacune de ces deux fonctions, prise isolément, convergeât uniformément vers sa limite.

223. Corollaire. — *On aura plus généralement, en désignant par x une quantité comprise entre* $A+b-B$ *et* b,

$$\lim_{n=\infty}\int_x^b f(\beta)\,\varphi(\beta+A-x,n)\,d\beta = G\,f(x\pm 0),$$

pourvu que la fonction $f(\beta)$ ait une variation bornée entre x et b.

En effet, posons

$$\beta + A - x = \alpha.$$

Cette intégrale deviendra

$$\int_A^{b+A-x} f(\alpha + x - A)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

Or $b+A-x$ est compris entre A et B, d'après les hypothèses précédentes; on aura donc pour la limite de cette intégrale

$$G\,f(A+x-A\pm 0) = G\,f(x\pm 0).$$

D'ailleurs, l'intégrale convergera uniformément vers sa limite lorsque x varie, pourvu qu'il reste en deçà de b et que, dans les limites où il se meut, $f(x)$ reste continue (222).

224. *Applications.* — On satisfera aux conditions du théorème précédent, en supposant $A=0$, B quelconque, $\varphi(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{\alpha}$.

En effet, supposons d'abord B positif. Soient b un nombre quelconque compris entre 0 et B, $m\pi$ le plus grand multiple de π contenu dans bn; on aura, en posant $n\alpha = \beta$,

$$\int_0^b \frac{\sin n\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \int_0^{bn} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta = \left(\int_0^{\pi} + \ldots + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \ldots + \int_{m\pi}^{bn}\right)\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Ces intégrales partielles successives ont des signes alternatifs; en effet, le facteur $\sin\beta$ change de signe en passant d'une intégrale à la suivante. De plus, elles vont en décroissant en valeur numérique; car, si l'on compare entre eux les éléments qui correspondent à la même valeur absolue de $\sin\beta$, l'autre facteur $\frac{1}{\beta}$ décroît d'une intégrale à la suivante. *A fortiori*, la dernière intégrale $\int_{m\pi}^{bn}$, qui ne contient qu'une portion des éléments de l'intégrale $\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}$, sera moindre en valeur absolue que celle qui la précède.

L'intégrale $\int_0^{bn}$ aura donc le signe de son premier terme $\int_0^{\pi}$ et un module moindre.

Mais on a

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta\right| < \int_0^{\pi} d\beta < \pi;$$

donc

$$\left|\int_0^{bn}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta\right| < \pi.$$

D'autre part, si b se meut dans un intervalle compris entre o et B, mais d'où le point zéro soit exclu, il ne pourra s'abaisser au-dessous d'un nombre positif fixe λ. Les diverses intégrales $\int_0^{bn}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta$, correspondant aux diverses valeurs de b, auront donc leur limite supérieure au moins égale à λn, nombre qui tend vers ∞ avec n; elles tendront donc vers une limite commune

$$G = \int_0^{\infty}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta,$$

si cette intégrale est déterminée. Nous avons vu (98) qu'il en est ainsi, et qu'on a

$$G = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons supposé B et, par suite, b positifs; s'ils sont négatifs, on n'aura qu'à changer β en $-\beta$ pour retomber sur l'intégrale précédente, changée de signe. Les conditions du théorème subsisteront encore; mais on aura

$$G = -\frac{\pi}{2}.$$

225. Théorème. — *Soient a, b deux quantités fixes quelconques et x une quantité variable, telles que l'on ait $a < x < b$; soit enfin $f(x)$ une fonction à variation bornée dans l'intervalle ab; on aura*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\beta) \frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x} d\beta = \frac{\pi}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

En effet, l'intégrale considérée est la différence des deux suivantes :

$$\int_x^b \quad \text{et} \quad \int_x^a,$$

qui convergent respectivement vers

$$\frac{\pi}{2} f(x+0) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} f(x-0) \quad (\mathbf{223}).$$

Tant que $f(x)$ restera continue, cette expression se réduira à $\pi f(x)$. Chacune des deux intégrales partielles, et par suite l'intégrale totale, convergera d'ailleurs vers sa limite d'une manière uniforme (**223**).

226. La formule précédente reste applicable si l'intervalle ab s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. On aura, dans ce cas, pour toute valeur de x,

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) \frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x} d\beta.$$

Mais on a

$$\frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x} = \int_0^n \cos\mu(\beta - x)\, d\mu.$$

L'intégrale précédente deviendra donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^n f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\mu$$

$$= \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=\infty}} \int_a^b d\beta \int_0^n f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\mu$$

$$= \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=\infty}} \int_0^n d\mu \int_a^b f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta$$

$$= \int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta$$

$$- \lim_{a=-\infty} \int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{a} f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta$$

$$- \lim_{b=\infty} \int_0^n d\mu \int_b^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta.$$

Si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta)|\, d\beta$$

est finie et déterminée, les deux termes complémentaires tendent vers zéro; car leurs modules sont au plus égaux à

$$\int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{a} |f(\beta)|\, d\beta = n \int_{-\infty}^{a} |f(\beta)|\, d\beta$$

et

$$\int_0^n d\mu \int_b^{\infty} |f(\beta)|\, d\beta = n \int_b^{\infty} |f(\beta)|\, d\beta.$$

et pour $a = -\infty$, $b = \infty$, les intégrales du second membre tendent vers zéro.

On aura donc

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \lim_{n=\infty}\int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta$$
$$= \int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta.$$

Cette formule est due à Fourier.

227. On peut encore satisfaire aux conditions de l'énoncé du n° **221** en posant $A = 1$, $B = -1$, $\varphi(\alpha, n) = X'_n + X'_{n+1}$, X'_n désignant la dérivée de l'intégrale définie

$$X_n(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\psi)^n\,d\psi,$$

et l'on aura, dans ce cas, $G = -2$.

On a, en effet, d'après cette définition,

$$X_n(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi = 1,$$

$$\int_1^b (X'_n + X'_{n+1})\,d\alpha = X_n(b) + X_{n+1}(b) - X_n(1) - X_{n+1}(1)$$
$$= -2 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(b+\sqrt{b^2-1}\cos\psi)^n(1+b+\sqrt{b^2-1}\cos\psi)\,d\psi.$$

Pour les valeurs de b comprises entre -1 et $+1$, cette dernière intégrale aura pour limite supérieure de son module

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[b^2 + (1-b^2)\cos^2\psi]^{\frac{n}{2}}[(1+b)^2 + (1-b^2)\cos^2\psi]^{\frac{1}{2}}\,d\psi$$
$$= \frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^{\pi}[1-(1-b^2)\sin^2\psi]^{\frac{n}{2}}(1+\cos^2\psi + b\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi$$
$$< \frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^{\pi}[1-(1-b^2)\sin^2\psi]^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}\,d\psi.$$

Cette expression est évidemment inférieure, pour toute valeur positive de n, à la quantité finie

$$\frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{2}\,d\psi = \sqrt{2(1+b)} \overline{\underset{<}{=}} 2.$$

En outre, elle tend uniformément vers zéro, lorsque n tend vers ∞, pour toutes les valeurs de b comprises entre $1-\lambda$ et -1, quelque petite que soit la constante λ.

En effet, nous allons déterminer pour n une valeur indépendante de b, et à partir de laquelle cette expression soit toujours inférieure à une quantité quelconque ε.

Si $1+b<\frac{\varepsilon^2}{2}$, cette condition sera satisfaite, quel que soit n. Si $1+b>\frac{\varepsilon^2}{2}$, $1-b$ étant d'ailleurs $\overline{\underset{>}{=}}\lambda$, et $1+b<2$, l'expression ci-dessus sera plus petite que la suivante :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\sin^2\psi\right)^{\frac{n}{2}} d\psi.$$

Décomposons le champ d'intégration en trois parties, s'étendant respectivement de o à γ, de γ à $\pi-\gamma$ et de $\pi-\gamma$ à π, γ désignant une quantité arbitraire. Négligeons $\sin^2\psi$ dans la première et la troisième intégrale et remplaçons-le dans la seconde par sa valeur minimum $\sin^2\gamma$. Il viendra, pour limite supérieure du module cherché,

$$\frac{2}{\pi}\left[2\gamma+\left(1-\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{n}{2}}(\pi-2\gamma)\right].$$

En disposant convenablement de γ, nous pourrons rendre le premier terme inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$; puis, en prenant n assez grand, rendre le second terme également $<\frac{1}{2}\varepsilon$.

On aura donc, en désignant par $f(\alpha)$ une fonction à varia-

tion bornée entre -1 et $+1$,

$$\lim_{n=\infty}\int_{1}^{-1} f(\alpha)(X'_n + X'_{n+1})\,d\alpha = -2f(1-0).$$

228. L'intégrale X_n, que nous venons de considérer, se réduit, si n est entier, à un polynôme entier en α; car, en développant le binôme $(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\cos\psi)^n$, on voit que les puissances impaires du radical ne figureront que dans les termes de degré impair en $\cos\psi$. Mais l'intégrale de chacun de ces termes est nulle. En effet, à deux valeurs supplémentaires de l'angle ψ correspondent dans l'intégrale $\int_0^\pi \cos^{2k+1}\psi\,d\psi$ des éléments égaux et contraires qui se détruisent.

Nous verrons plus loin que les polynômes auxquels nous arrivons ici ne sont autre chose que les polynômes X_n de Legendre.

II. — Séries trigonométriques.

229. Soit $f(x)$ une fonction arbitraire de x. Cherchons à la représenter, pour les valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, par un développement de la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_n\cos nx + \ldots \\ \qquad\qquad + B_1\sin x + B_2\sin 2x + \ldots + B_n\sin nx + \ldots. \end{cases}$$

Le second membre de cette égalité admettant évidemment la période 2π, le développement, supposé exact dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, subsistera pour toute valeur de x, si $f(x)$ admet également la période 2π; dans le cas contraire, il cessera de représenter $f(x)$ en dehors de cet intervalle.

La forme du développement étant assignée *a priori,* le problème se réduit à déterminer les valeurs numériques des coefficients A et B.

Ce calcul repose sur les formules suivantes :

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}=0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}=0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2nx}{4n}\right)_{-\pi}^{\pi}=\pi,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right)_{-\pi}^{\pi}=\pi,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}\sin 2nx\,dx=0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m-n)x+\cos(m+n)x}{2}dx=0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2}dx=0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}dx=0.
\end{aligned}\right.
$$

Pour déterminer A_0, intégrons l'équation (1) de $-\pi$ à $+\pi$; chacun des termes du second membre, sauf le premier, donnera une intégrale nulle, en vertu des relations précédentes, et l'on aura simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\,dx=2\pi A_0,$$

d'où

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\beta)\,d\beta.$$

Pour déterminer A_n, multiplions l'équation (1) par $\cos nx$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$; il viendra, en vertu des relations (2),

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\pi A_n,$$

d'où

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

On trouvera de même, en multipliant l'équation (1) par $\sin nx$ et intégrant de $-\pi$ à $+\pi$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \pi B_n,$$

d'où

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta.$$

Substituant dans l'équation (1) ces valeurs des coefficients, il viendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta &+ \sum_{n=1}^{n=\infty}\cos nx\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta \\ &+ \sum_{n=1}^{n=\infty}\sin nx\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta \end{aligned}\right.$$

ou, en multipliant par π et réunissant toutes les intégrales en une seule,

$$(4)\qquad \pi f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}\cos n(\beta - x)\right].$$

230. Le procédé dont nous nous sommes servi, d'après Fourier, pour établir cette formule, donne lieu à de graves critiques :

1° Nous avons intégré le second membre de l'équation (1) en faisant la somme des intégrales de ses termes, ce qui n'est légitime que s'il est uniformément convergent. Nous n'avons donc pas prouvé que, en dehors du système de valeurs que nous avons déterminé pour les coefficients A et B, il ne puisse en exister d'autres donnant également une représen-

tation de la fonction $f(x)$. Nous pouvons seulement affirmer que, s'il en existe, le développement qu'ils fournissent ne peut être uniformément convergent.

2° Nous avons trouvé la forme que doivent avoir les coefficients du développement de $f(x)$, en supposant que ce développement soit possible; mais rien ne justifie *a priori* cette hypothèse : l'exactitude de la formule (3) n'est donc aucunement établie.

Cette objection capitale ne peut évidemment être levée qu'en calculant directement la valeur du second membre de la formule, pour vérifier si elle est égale à $\pi f(x)$.

231. A cet effet, nous remarquerons que la série, arrêtée aux termes en $\sin px$ et $\cos px$, aura pour valeur

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\, d\beta \left[\tfrac{1}{2} + \sum_1^p \cos n(\beta - x)\right].$$

Mais la somme entre parenthèses est égale à

$$\frac{1}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}\left[\sin\frac{\beta - x}{2} + \sum_1^p 2\sin\frac{\beta - x}{2}\cos n(\beta - x)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}\left\{\sin\frac{\beta - x}{2} + \sum_1^p\left[\sin\frac{2n+1}{2}(\beta - x) - \sin\frac{2n-1}{2}(\beta - x)\right]\right\}$$

$$= \frac{\sin\frac{2p+1}{2}(\beta - x)}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}.$$

On aura donc

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\frac{\sin\frac{2p+1}{2}(\beta - x)}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}\, d\beta,$$

et la somme de la série cherchée sera la limite de S_p lorsque p tend vers ∞.

Cette limite est aisée à trouver lorsque $f(x)$ n'a qu'une variation bornée entre $-\pi$ et $+\pi$. En effet, supposons d'abord $x > -\pi$, mais $< \pi$. Faisant, pour abréger,

$$\frac{2p+1}{2} = n, \qquad f(\beta)\frac{\beta - x}{2\sin\frac{1}{2}(\beta - x)} = F(\beta),$$

l'intégrale S_p pourra se mettre sous la forme

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\beta)\frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x}\,d\beta.$$

Or le facteur $\dfrac{\beta - x}{2\sin\frac{1}{2}(\beta - x)}$ reste fini dans le champ de l'intégration, et n'a qu'une variation bornée, de même que $f(\beta)$; donc $F(\beta)$ n'a qu'une variation bornée, et l'on aura (225)

$$\lim S_p = \frac{\pi}{2}[F(x+0) + F(x-0)] = \frac{\pi}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

car le facteur $\dfrac{\beta - x}{2\sin\frac{1}{2}(\beta - x)}$ a pour limite l'unité, quand β tend vers x.

Si $f(x)$ est continue, cette expression se réduit à $\pi f(x)$. D'ailleurs, S_p tendant uniformément vers sa limite quand x varie, la série de Fourier sera uniformément convergente.

232. Ces résultats seraient en défaut si x était égal à l'une des limites $\pm\pi$; car le facteur $\dfrac{\beta - x}{2\sin\frac{1}{2}(\beta - x)}$ deviendrait infini à l'autre limite de l'intégration; mais il est aisé de trouver, dans ce cas, la limite de S_p.

Soit, par exemple, $x = -\pi$. L'intégrale

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\frac{\sin\frac{2p+1}{2}(\beta + \pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\beta + \pi)}\,d\beta$$

se décompose en deux autres, ayant pour limites $-\pi$ et zéro, zéro et $+\pi$. On trouve, par la méthode précédente, que la première a pour limite $\frac{\pi}{2}f(-\pi+0)$. Pour évaluer la seconde, posons $\beta = \pi - \alpha$. Elle se réduit à

$$\int_0^\pi f(\pi - \alpha)\frac{\sin\frac{2p+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha$$

$$= \int_0^\pi f(\pi - \alpha)\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{\sin\frac{2p+1}{2}\alpha}{\alpha}d\alpha,$$

et aura pour valeur

$$\frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon=0}\left[f(\pi-\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right] = \frac{\pi}{2}f(\pi - 0).$$

On aura donc, dans ce cas,

$$\lim S_p = \frac{\pi}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi - 0)].$$

Si $x = +\pi$, on arrivera, par un procédé tout semblable, au même résultat.

233. Considérons une fonction $F(x)$ donnée seulement dans une portion de l'intervalle de $-\pi$ à π. On pourra la représenter dans cette étendue par une infinité de séries trigonométriques différentes. Concevons, en effet, une fonction $f(x)$, égale à $F(x)$ dans la région considérée et prenant des valeurs arbitrairement choisies dans le reste de l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$. Développons-la en série de Fourier. Cette série représentera $F(x)$ dans la région où cette fonction est donnée.

Supposons, par exemple, que $F(x)$ soit donnée dans l'intervalle de zéro à π. Soit $f(x)$ une fonction égale à $F(x)$

dans cet intervalle, et définie de zéro à $-\pi$ par la condition $f(-x)=f(x)$. Appliquons la formule (3) à cette fonction. Les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta$ s'annuleront, car les éléments correspondant à des valeurs de β égales et de signe contraire se détruisent mutuellement.

Ces éléments s'ajouteront, au contraire, dans les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$, qui se réduiront à

$$2\int_0^{\pi} f(\beta)\,d\beta,\quad 2\int_0^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$$

ou, comme $f(x)=\mathrm{F}(x)$ entre zéro et π, à

$$2\int_0^{\pi} \mathrm{F}(\beta)\,d\beta,\quad 2\int_0^{\pi} \mathrm{F}(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

On aura donc entre zéro et π

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(x)=f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{F}(\beta)\,d\beta \\ +\frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi}\mathrm{F}(\beta)\cos n\beta\,d\beta. \end{aligned}\right.$$

234. Si l'on avait, au contraire, déterminé $f(x)$, pour les valeurs négatives de x, par la condition

$$f(-x)=-f(x),$$

les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$ se seraient annulées, et les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta$ se seraient réduites à $2\int_0^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta = 2\int_0^{\pi}\mathrm{F}(\beta)\sin n\beta\,d\beta$. La fonction $\mathrm{F}(x)$ sera donc représentée, toujours dans l'inter-

valle de zéro à π, par une série de sinus

$$(6)\qquad F(x) = f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \sin nx \int_{0}^{\pi} F(\beta)\sin n\beta\, d\beta.$$

On remarquera toutefois que, pour la valeur $x = 0$, la fonction $f(x)$, définie par les conditions précédentes, offrira une discontinuité si $F(x)$ ne s'annule pas pour $x = 0$. Aussi, pour $x = 0$, la série aura-t-elle pour valeur, non $F(0)$, mais $\dfrac{f(+0)+f(-0)}{2}$, c'est-à-dire zéro. Il en est de même pour $x = \pi$.

235. Les développements (3), (5), (6) sont valables, le premier de $-\pi$ à $+\pi$, les deux suivants de zéro à $+\pi$. Mais on en déduit aisément d'autres développements applicables de $-l$ à $+l$ ou de zéro à $+l$, l désignant une quantité quelconque.

Posons, en effet, dans ces formules

$$x = \frac{\pi y}{l}, \qquad \beta = \frac{\pi\alpha}{l},$$

$$f\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \varphi(y), \qquad F\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \Phi(y);$$

elles deviendront

$$\varphi(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\frac{n\pi y}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\frac{n\pi y}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$\Phi(y) = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

et seront évidemment applicables, la première de $-l$ à $+l$, les autres de zéro à l, pourvu que $\varphi(y)$ et $\Phi(y)$ aient une variation limitée dans les intervalles ci-dessus. Les séries cesseront d'ailleurs en général de représenter ces fonctions : 1° aux points de discontinuité; ; 2° aux limites du champ d'intégration.

III. — Fonctions de Laplace.

236. L'équation aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

admet comme solution un polynôme U homogène de degré n en x, y, z et contenant $2n+1$ coefficients arbitraires.

Substituons, en effet, dans le premier membre de l'équation, un polynôme de degré n à coefficients indéterminés. En écrivant que le résultat est identiquement nul, nous obtiendrons $\frac{(n-1)n}{2}$ équations de conditions linéaires et homogènes entre les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients. Il restera donc $2n+1$ arbitraires dans la solution.

Posons

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\theta;$$

il viendra

$$U = \rho^n Y_n,$$

Y_n étant une fonction homogène et de degré n en $\sin\theta \cos\psi$, $\sin\theta \sin\psi$, $\cos\theta$. Ces fonctions Y_n portent le nom de *fonctions de Laplace.* Elles satisfont à une équation différentielle qu'il est aisé de former.

En effet, l'équation (1), transformée en coordonnées polaires, devient (*Calcul différentiel,* n° 139)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Substituant pour V la quantité $U = \rho^n Y_n$ et supprimant le facteur commun ρ^{n-2}, il viendra

$$(2) \quad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\psi^2} + \cot\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta} + n(n+1)Y_n = 0.$$

237. Soient

x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires de deux points;

ρ, θ, ψ et ρ', θ', ψ' leurs coordonnées polaires;

r leur distance mutuelle;

enfin

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')$$

le cosinus de l'angle de leurs rayons vecteurs.

La quantité $\frac{1}{r}$, considérée comme fonction de x, y, z, satisfera, comme nous l'avons vu (191), à l'équation (1). Mais on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma + \rho'^2}},$$

ou, en développant en série suivant les puissances de $\frac{\rho}{\rho'}$ (*Calcul différentiel*, n° 273) et posant, pour abréger,

$$X_n(\cos\gamma) = P_n,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho'}\left(P_0 + P_1\frac{\rho}{\rho'} + \ldots + P_n\frac{\rho^n}{\rho'^n} + \ldots\right).$$

Pour que cette expression satisfasse à l'équation (1) quel que soit ρ', il faudra évidemment que chaque terme y satisfasse séparément. Donc $P_n\rho^n$ est une solution de l'équation (1).

D'ailleurs l'expression

$$P_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\frac{d^n(\cos^2\gamma - 1)^n}{d\cos\gamma^n}$$

montre que P_n est de la forme

$$A_n\cos^n\gamma + A_{n-2}\cos^{n-2}\gamma + \ldots.$$

Remplaçant $\cos\gamma$ par sa valeur $\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho\rho'}$, puis ρ^2 par sa valeur $x^2+y^2+z^2$, $P_n\rho^n$ deviendra évidemment une fonction entière et homogène de degré n en x, y, z. Donc P_n est une fonction de l'espèce Y_n.

238. Supposons $\rho' < \rho$; le point (x', y', z') sera intérieur à une sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine; et la fonction U, étant harmonique et continue, la valeur U′ qu'elle prend au point x', y', z' sera donnée (209) par la formule

$$4\pi U' = \mathbf{S}\left(U\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N} - \frac{1}{r}\frac{\delta U}{\delta N}\right)d\sigma,$$

l'intégrale étant prise sur la surface de la sphère.

Cela posé, nous aurons en coordonnées polaires

$$U = \rho^n Y_n, \qquad U' = \rho'^n Y'_n$$

(Y'_n désignant la valeur de Y_n au point x', y', z').

Développant, d'autre part, $\frac{1}{r}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\rho'}{\rho}$, qui est < 1, on aura

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(P_0 + P_1\frac{\rho'}{\rho} + \ldots + P_n\frac{\rho'^n}{\rho^n} + \ldots\right).$$

Enfin, N désignant la normale intérieure à la sphère, on a $\delta\rho = -\delta N$, et par suite

$$\frac{\delta U}{\delta N} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\delta\rho}{\delta N} = -\frac{\partial U}{\partial\rho} = -n\rho^{n-1}Y_n,$$

$$\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta N} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho} = \frac{P_0}{\rho^2} + \frac{2P_1}{\rho^3}\rho' - \ldots + \frac{(n+1)P_n\rho'^n}{\rho^{n+2}} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation, et remplaçant en

outre $d\sigma$ par sa valeur $\rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$, il viendra

$$4\pi\rho'^n Y'_n = \mathsf{S}\left[(n+1)P_0 + (n+2)P_1\frac{\rho'}{\rho} + \ldots \right.$$
$$\left. + (2n+1)P_n\frac{\rho'^n}{\rho^n} + \ldots\right] Y_n \rho^n \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Cette égalité contenant l'indéterminée ρ', on aura, en identifiant les coefficients de ses diverses puissances, les relations fondamentales

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathsf{S}\, Y_n P_m \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 0, \text{ si } m \gtrless n, \\ \mathsf{S}\, Y_n P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \dfrac{4\pi}{2n+1} Y'_n. \end{cases}$$

239. Soit $f(\theta, \psi)$ une fonction arbitraire des deux angles θ et ψ; proposons-nous de la développer dans l'intervalle de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, et de $\psi = 0$ à $\psi = 2\pi$, en une série de la forme

$$(4)\qquad f(\theta, \psi) = Y_0 + \ldots + Y_n + \ldots.$$

On obtiendra aisément, par ce qui précède, chaque terme du développement.

Multiplions, en effet, par $P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ et intégrons dans les limites ci-dessus. Il viendra, en raison des équations (3),

$$(5)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \psi) P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n.$$

Y'_n étant calculé par cette formule, on n'aura qu'à y remplacer θ', ψ' par θ, ψ pour obtenir Y_n.

L'expression ainsi calculée est bien une fonction de Laplace. En effet, P_n est évidemment symétrique en θ, ψ et θ', ψ'. C'est donc une fonction de Laplace par rapport à θ', ψ'. Donc $P_n \rho'^n$ sera une fonction homogène et de degré n en x', y', z', satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2} = 0.$$

Il est clair que, multipliée par la quantité constante $f(\theta, \psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi$, elle y satisfera encore. Chacun des éléments de l'intégrale double, multiplié par ρ'^n, vérifiant ainsi l'équation, leur somme jouira de la même propriété.

240. Il reste à vérifier si la série de fonctions Y_n ainsi calculées est bien égale à $f(\theta, \psi)$ ou, ce qui revient au même, si la série

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots$$

est égale à $f(\theta', \psi')$ dans tout le champ considéré.

Or on a, d'après l'équation (5),

$$\begin{aligned} Y'_0 + \ldots + Y'_n &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \psi)\sum_0^n (2k+1)\, P_k \sin\theta\, d\theta\, d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{S} f(\theta, \psi)\sum_0^n (2k+1)\, P_k\, d\sigma, \end{aligned}$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface d'une sphère de rayon 1, définie par les équations

$$x = \sin\theta\cos\psi, \qquad y = \sin\theta\sin\psi, \qquad z = \cos\theta.$$

Il reste à trouver la limite de cette expression pour $n = \infty$.

241. Nous la transformerons d'abord en remplaçant les variables θ, ψ par un autre système de coordonnées polaires λ, μ, choisies de telle sorte que le nouvel axe des z aboutisse au point (θ', ψ').

La fonction $f(\theta, \psi)$ sera transformée en une fonction de λ et de μ, que nous représenterons par $F(\lambda, \mu)$. La fonction $P_n = X_n(\cos\gamma)$ deviendra $X_n(\cos\lambda)$, car γ, distance angulaire du point (θ', ψ') au point variable θ, ψ, n'est évidemment autre chose que λ. L'élément $d\sigma$ sera égal à $\sin\lambda\, d\lambda\, d\mu$. Enfin les limites de l'intégrale seront 0 et π pour λ, 0 et 2π pour μ.

L'intégrale à évaluer deviendra donc

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\lambda, \mu)\sum_0^n (2k+1) X_k(\cos\lambda)\sin\lambda\, d\lambda\, d\mu$$

ou, en posant $\cos\lambda = x$, $F(\lambda, \mu) = \Phi(x, \mu)$,

$$(6)\qquad \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(x, \mu)\sum_0^n (2k+1) X_k\, dx\, d\mu.$$

242. La sommation par rapport à k peut être effectuée comme il suit.

On a, par définition,

$$(7)\qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \alpha^n X_n,$$

et, en prenant les dérivées par rapport à x et par rapport à α,

$$(8)\qquad \alpha(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_0^\infty \alpha^n X'_n,$$

$$(9)\qquad (x-\alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_0^\infty n\alpha^{n-1} X_n.$$

La comparaison des équations (8) et (9) donne

$$(x-\alpha)\sum_0^\infty \alpha^n X'_n = \alpha\sum_0^\infty n\alpha^{n-1} X_n,$$

d'où, en égalant les termes en α^n,

$$(10)\qquad xX'_n - X'_{n-1} = nX_n.$$

D'autre part, l'équation (8), multipliée par $1 - 2\alpha x + \alpha^2$ et comparée à (7), donne

$$\alpha\sum \alpha^n X_n = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)\sum \alpha^n X'_n,$$

et, en égalant les termes en x^{n+1},

$$(11) \qquad X_n = X'_{n+1} - 2xX'_n + X'_{n-1}.$$

De (10) et (11) on déduira, par l'élimination de X'_n,

$$(2n+1)X_n = X'_{n+1} - X'_{n-1}.$$

Cette formule subsistera encore pour $n=0$, en y remplaçant X'_{-1} par zéro; on aura également $X'_0 = 0$, car X_0 est une constante.

Changeant, dans la formule précédente, n en $n-1$, $n-2$, ..., et ajoutant les résultats, il viendra

$$\sum_0^n (2k+1)X_k = \sum_0^n (X'_{k+1} - X'_{k-1}) = X'_{n+1} + X'_n.$$

243. L'intégrale (6) deviendra donc

$$(12) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \Phi(x,\mu)(X'_{n+1} + X'_n)\,dx\,d\mu.$$

Or, si l'on admet : 1° que, pour chaque valeur de μ prise dans l'intervalle de 0 à 2π, la fonction $\Phi(x,\mu)$ n'ait qu'une variation bornée entre -1 et $+1$; 2° que, pour ces diverses valeurs de μ, $\Phi(1-\varepsilon,\mu)$ tende uniformément vers sa limite $\Phi(1-0,\mu)$ lorsque la quantité positive ε décroît indéfiniment, on aura (**227**)

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x,\mu)(X'_{n+1} + X'_n)\,dx = 2\Phi(1-0,\mu) + R_\mu,$$

R_μ désignant un reste qui tend uniformément vers zéro pour $n=\infty$.

L'intégrale (6) se réduira donc à

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 2[\Phi(1-0,\mu)\,d\mu + R_\mu\,d\mu],$$

et si n tend vers ∞, R_μ tendant uniformément vers zéro, son

intégrale $\int_0^{2\pi} R_\mu \, d\mu$ tendra vers zéro. Il viendra donc

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(1 - 0, \mu) \, d\mu.$$

244. Cela posé, si la fonction $f(\theta, \varphi) = \Phi(x, \mu)$ est continue aux environs du point (θ', φ'), $\Phi(1 - \varepsilon, \mu)$, qui représente la valeur de la fonction $f(\theta, \varphi)$ pour un point infiniment voisin de (θ', φ'), convergera uniformément, quel que soit μ, vers la valeur constante $f(\theta', \varphi')$. On aura donc

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') \, d\mu = f(\theta', \varphi').$$

On arrive donc à ce résultat :

Le développement (4) *d'une fonction arbitraire* $f(\theta, \varphi)$ *en série de Laplace est applicable pour tout point de la sphère* (θ', φ'), *tel :* 1° *que la fonction* f *soit continue aux environs de ce point;* 2° *que sa variation soit bornée le long de tout grand cercle qui passe par ce point.*

D'ailleurs il est clair que ce développement sera uniformément convergent sur toute région de la sphère où ces deux conditions seront satisfaites.

245. Dans le cas particulier où la fonction f ne dépend pas de ψ, la formule (5) deviendra

$$Y'_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \, P_n \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Or P_n, étant une fonction entière de

$$\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi'),$$

pourra être mis sous la forme

$$k_0 + k_1 \cos(\psi - \psi') + \ldots + k_n \cos n(\psi - \psi'),$$

$k_0, k_1, \ldots, k_n$ étant des fonctions entières de $\cos\theta \cos\theta'$ et

$\sin\theta \sin\theta'$. Intégrant par rapport à ψ, tous les termes donneront une intégrale nulle, sauf le premier, dont l'intégrale est $2\pi k_0$. On aura donc

$$Y'_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)\, k_0 \sin\theta\, d\theta,$$

expression indépendante de ψ'.

Donc Y'_n, qui est une fonction entière et homogène de degré n en $\cos\theta'$, $\sin\theta' \cos\psi'$, $\sin\theta' \sin\psi'$, se réduira à une fonction entière de $\cos\theta'$ seulement, lorsqu'on aura tenu compte de la relation

$$(\sin\theta' \sin\psi')^2 + (\sin\theta' \cos\psi')^2 = 1 - \cos^2\theta'.$$

Cette fonction sera évidemment de la forme

$$a_n \cos^n\theta' + a_{n-2}\cos^{n-2}\theta' + \ldots;$$

par suite, Y_n sera de la forme

$$a_n \cos^n\theta + a_{n-2}\cos^{n-2}\theta + \ldots.$$

Cette fonction doit d'ailleurs satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 Y_n}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dY_n}{d\theta} + n(n+1) Y_n = 0,$$

qui se déduit de (2) en exprimant que Y_n est indépendant de ψ. Transformons cette équation en prenant pour nouvelle variable la quantité $\cos\theta = x$; il viendra

$$\frac{dY_n}{d\theta} = \frac{dY_n}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dY_n}{dx},$$

$$\frac{d^2 Y_n}{d\theta^2} = -\cos\theta \frac{dY_n}{dx} - \sin\theta \frac{d^2 Y_n}{dx^2}\frac{dx}{d\theta} = -\cos\theta \frac{dY_n}{dx} + \sin^2\theta \frac{d^2 Y_n}{dx^2}.$$

Substituant ces valeurs et remplaçant, en outre, $\cos\theta$, $\sin^2\theta$ par x, $1 - x^2$, il viendra

$$(1 - x^2)\frac{d^2 Y_n}{dx^2} - 2x \frac{dY_n}{dx} + n(n+1) Y_n = 0.$$

Substituons dans cette équation la valeur de Y_n,

$$Y_n = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots,$$

il viendra, en égalant à zéro le coefficient du terme en x^{n-2k},

$$\begin{aligned}(n-2k+2)(n-2k+1)\,a_{n-2k+2}\\ -(n-2k)(n-2k-1)\,a_{n-2k}\\ -2(n-2k)\,a_{n-2k} + n(n+1)\,a_{n-2k} = 0.\end{aligned}$$

Cette équation détermine le rapport de deux coefficients successifs a_{n-2k+2} et a_{n-2k}.

Le polynôme Y_n, défini par les conditions précédentes, est donc déterminé à un facteur constant près. Or on sait que le polynôme $X_n(x) = P_n$ satisfait à ces conditions. On aura donc

$$Y_n = A_n P_n,$$

A_n désignant un facteur constant.

Le développement de la fonction $f(\theta)$ en fonctions de Laplace prendra donc la forme

$$f(\theta) = A_0 P_0 + A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n + \ldots.$$

En prenant x pour variable et posant

$$f(\theta) = F(x),$$

il viendra

$$(13) \qquad F(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots.$$

Ce développement sera valable dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = 1$, correspondant à l'intervalle de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ (pourvu que la fonction à développer n'ait qu'une variation bornée dans cet intervalle).

246. La nature du développement étant établie par ce qui précède, on obtiendra aisément les coefficients. Multiplions l'équation (13) par X_n et intégrons de -1 à $+1$. On aura, si $m \gtrless n$,

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0.$$

Soit, en effet, pour fixer les idées, $n > m$; X_m étant un polynôme de degré inférieur à X_n, on sait (**121**) que l'intégrale ci-dessus sera nulle.

L'équation intégrée se réduira donc à

$$\int_{-1}^{+1} F(x) X_n \, dx = A_n \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx$$

et déterminera le coefficient A_n.

247. On peut aisément calculer, au moyen de l'intégration par parties, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{1}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx.$$

Posons en effet, pour abréger, $(x^2-1)^n = u$. On trouvera, par une suite d'intégrations par parties,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} u^{(n)} u^{(n)} \, dx \\ &\quad = [u^{(n-1)} u^{(n)} - u^{(n-2)} u^{(n+1)} + \ldots + (-1)^{n-1} u u^{(2n-1)}] \\ &\quad\quad + (-1)^n \int_{-1}^{+1} u u^{(2n)} \, dx, \end{aligned}$$

et comme chacun des termes intégrés s'annule aux deux limites, il vient simplement

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx &= \frac{1}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^n} dx \\ &= \frac{(-1)^n 1.2.3\ldots 2n}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \, dx. \end{aligned}$$

Mais, si l'on pose

$$x = 2z - 1,$$

il viendra

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \, dx = (-1)^n 2^{2n+1} \int_0^1 z^n (1 - z)^n \, dz$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} \mathrm{B}(n + 1, n + 1)$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(2n + 2)}$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(1.2\ldots n)^2}{1.2\ldots(2n + 1)},$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{X}_n^2 \, dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

248. Le développement d'une fonction $\mathrm{F}(x)$ suivant les polynômes X_n, auquel nous venons d'arriver, est un cas particulier d'une classe de développements plus générale, qu'on peut obtenir de la manière suivante.

Considérons l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x - z}.$$

Si l'on développe le dénominateur suivant les puissances décroissantes de x, on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{x^m} + \ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$\alpha_m = \int_a^b z^{m-1} f(z)\,dz.$$

Formons les réduites successives du développement de cette expression en fraction continue. Soit

$$\mathrm{Q}_n = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 x + \ldots + \mathrm{B}_n x^n$$

le dénominateur d'une de ces réduites. Les rapports des coef-

ficients B_0, B_1, ..., B_n seront déterminés (*Calcul différentiel*, n° 393) par les équations de condition

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_1 \quad + \ldots + \alpha_{n+1} B_n = 0,\\
&\alpha_2 B_0 + \alpha_3 B_1 \quad + \ldots + \alpha_{n+2} B_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_n B_0 + \alpha_{n+1} B_1 + \ldots + \alpha_{2n} B_n \;\; = 0,
\end{aligned}$$

et, pour qu'il existe effectivement une réduite dont le dénominateur soit d'ordre n en x, il faut et il suffit que ces équations déterminent complètement lesdits rapports.

Cette condition sera toujours satisfaite si $f(z)$ ne change pas de signe entre a et b. En effet, si nous remplaçons les quantités α par leurs valeurs, les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b f(z)\,dz[B_0 \quad + B_1 z \;\; + \ldots + B_n z^n] \quad = \int_a^b Q_n(z) f(z)\,dz,\\
&= \int_a^b f(z)\,dz[B_0 z \quad + B_1 z^2 + \ldots + B_n z^{n+1}] = \int_a^b z\,Q_n(z) f(z)\,dz,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&= \int_a^b f(z)\,dz[B_0 z^{n-1} + B_1 z^n + \ldots + B_n z^{2n-1}] = \int_a^b z^{n-1} Q_n(z) f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Ajoutons ensemble ces équations multipliées par des constantes arbitraires, nous obtiendrons la suivante, qui les résume toutes :

$$(14) \qquad 0 = \int_a^b \varpi(z)\,Q_n(z) f(z)\,dz,$$

$\varpi(z)$ désignant un polynôme arbitraire de degré $< n$.

Cela posé, soient Q et Q' deux polynômes de degré n qui satisfassent à cette condition. Tout polynôme $\lambda Q + \lambda' Q'$, où λ et λ' sont des constantes arbitraires, y satisfera également. Or on peut déterminer le rapport $\frac{\lambda'}{\lambda}$ de manière à annuler dans ce polynôme le coefficient de z^n. Posant alors en parti-

culier $\varpi(z) = \lambda Q + \lambda' Q'$, il viendra

$$\int_a^b (\lambda Q + \lambda' Q')^2 f(z)\, dz = 0.$$

Or cette intégrale a tous ses éléments de même signe; elle ne peut donc s'annuler que s'ils sont tous nuls, d'où

$$\lambda Q + \lambda' Q' = 0.$$

Les deux polynômes Q et Q' sont donc égaux à un facteur constant près.

249. L'équation $Q_n(z) = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre a et b. En effet, si elle admettait une racine réelle c hors de cet intervalle, ou une racine double α, ou un couple de racines imaginaires $\alpha \pm \beta i$, on aurait

$$Q_n(z) = MN,$$

M désignant un facteur de la forme $z - c$, ou $(z-\alpha)^2$, ou $(z-\alpha)^2 + \beta^2$, et N un polynôme de degré $< n$. Posant $\varpi(z) = N$ dans l'équation (14), il viendrait

$$0 = \int_a^b MN^2 f(z)\, dz,$$

résultat absurde, car l'intégrale a tous ses éléments de même signe.

250. Soit maintenant $F(z)$ une fonction quelconque de z; proposons-nous de la développer en une série de la forme

$$F(z) = A_0 Q_0(z) + A_1 Q_1(z) + \ldots + A_n Q_n(z) + \ldots$$

[$Q_0(z)$ désignant une constante, égale à 1, par exemple].

Pour déterminer un coefficient quelconque, tel que A_n, multiplions l'équation précédente par $Q_n(z) f(z)$ et intégrons entre a et b. On aura

$$\int_a^b Q_m(z)\, Q_n(z) f(z)\, dz = 0, \quad \text{si } (m \gtrless n)$$

En effet, soit, par exemple, $m < n$. Cette équation sera un cas particulier de (14), obtenu en posant

$$\varpi(z) = Q_m(z).$$

L'équation intégrale se réduira donc à

$$\int_a^b Q_n(z) f(z) F(z)\, dz = A_n \int_a^b Q_n^2(z) f(z)\, dz$$

et déterminera A_n.

On doit toutefois remarquer que cette analyse n'établit pas la légitimité du développement, laquelle restera à démontrer dans chaque cas.

251. Si nous posons en particulier $f(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, l'équation (14) se réduit à

$$\int_{-1}^{1} \varpi(z)\, Q_n(z)\, dz = 0.$$

Or on sait que les polynômes X_n satisfont à cette équation. Elle détermine d'ailleurs $Q_n(z)$ à un facteur constant près. On a donc ce résultat :

Les polynômes X_n *sont, à des facteurs constants près, les dénominateurs des réduites de l'intégrale*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{x - z} = \log \frac{x+1}{x-1}.$$

CHAPITRE V.

INTÉGRALES COMPLEXES.

I. — Intégrales des fonctions monodromes.

252. Soit $f(z)$ une fonction analytique de la variable complexe z. Si cette variable, partant d'une valeur initiale donnée, décrit une ligne rectifiable L, on pourra suivre la variation de $f(z)$ tout le long de cette ligne pourvu qu'on ne soit pas arrêté par la rencontre d'un point critique.

Nous avons donné dans ce cas la définition de l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ (t. I, n° 193).

Mais cette définition suppose essentiellement l'absence de point critique. On admettait donc que tout le long de la ligne L la fonction $f(z)$ reste continue ainsi que sa dérivée.

Nous continuerons à poser en principe que, sur tout le parcours de la ligne d'intégration (ses extrémités exceptées), il ne doit exister aucun point critique; mais nous admettrons que ses extrémités a et b puissent être critiques.

Soient, dans ce cas, $a+\varepsilon$ un point de la ligne L infiniment voisin du point a; $b-\varepsilon'$ un point de cette ligne infiniment voisin du point b; L_1 la partie de L comprise entre les deux points $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon'$. Nous définirons l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ par la formule

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \int_{L_1} f(z)\,dz,$$

à la condition que le second membre ait une limite déterminée.

De même, supposons que la ligne L s'étende jusqu'à l'infini. Prenons sur cette ligne un point p, et soit L_1 la portion de L comprise entre a et p. On pourra déterminer pour chaque position du point p l'intégrale

$$\int_{L_1} f(z)\,dz,$$

et, si cette expression tend vers une limite déterminée lorsque le point p s'éloigne à l'infini en suivant la ligne L, nous définirons l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ par l'équation

$$\int_L f(z)\,dz = \lim \int_{L_1} f(z)\,dz.$$

253. Supposons, par exemple, que, la variable z étant assujettie à la seule restriction de rester dans l'intérieur d'un contour C, la fonction $f(z)$ n'admette dans ce domaine qu'un seul point critique b, déterminé de position. Admettons, en outre, que, lorsque z tend vers b, de telle sorte qu'aux environs de ce point l'argument de $z - b$ reste compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1, on ait constamment

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{|z-b|^\alpha},$$

M désignant une constante et α un exposant < 1.

Soit L une ligne quelconque intérieure à C et partant d'un point donné a pour aboutir à b, de telle sorte que, dans la portion de cette ligne infiniment voisine de b, l'argument de $z - b$ reste compris entre λ_0 et λ_1. *L'intégrale*

$$\int_L f(z)\,dz$$

aura une valeur déterminée et indépendante de la ligne particulière choisie pour L.

En effet, supposons d'abord que, dans le voisinage de b, on ait pris pour L une ligne droite L_0 faisant l'angle φ_0 avec

l'axe des x. On aura sur cette ligne

$$z = b + \rho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),$$

φ_0 restant constant et ρ tendant vers zéro.

Soient z_0, z_1 deux points de cette ligne, ρ_0, ρ_1 les deux valeurs correspondantes de ρ. On aura

$$\int_{z_0 z_1} f(z)\,dz = \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(z)(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)\,d\rho.$$

Cette intégrale tend vers zéro avec ρ_0 et ρ_1; car, d'après nos hypothèses, son module ne peut surpasser

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{M}{\rho^\alpha}\,d\rho = \frac{M}{1-\alpha}(\rho_0^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}),$$

quantité infiniment petite. Donc $\int_{L_0} f(z)\,dz$ a une valeur déterminée.

Soit maintenant L_1 une autre ligne arbitraire issue de a et aboutissant à b. Traçons autour du point b comme centre un cercle de rayon ρ infiniment petit. Soient $z_0 = (\rho, \varphi_0)$ et $z_1 = (\rho, \varphi_1)$ ses points d'intersection avec L_0 et L_1 (*fig.* 10).

Fig. 10.

Les deux lignes d'intégration $a z_0 z_1$ et $a z_1$ étant évidemment équivalentes, on aura

$$\int_{a z_1} f(z)\,dz = \int_{a z_0} f(z)\,dz + \int_{z_0 z_1} f(z)\,dz.$$

Faisons tendre ρ vers zéro. L'intégrale $\int_{az_0}$ aura pour limite $\int_{L_0}$; et l'intégrale suivant l'arc de cercle $z_0 z_1$ tendra vers zéro. On a, en effet, sur cette ligne

$$z = b + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ρ étant constant, et φ variant de φ_0 à φ_1. Donc

$$(1) \qquad \int_{z_0 z_1} f(z)\,dz = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(z)\,\rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Le module de cette intégrale a pour limite supérieure

$$\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{M}{\rho^\alpha}\rho\,d\varphi\right| = M\rho^{1-\alpha}|\varphi_1 - \varphi_0| \overline{\gtrless} M\rho^{1-\alpha}(\lambda_1 - \lambda_0),$$

quantité infiniment petite.

Donc l'intégrale $\int_{az_1}$ tend vers une limite déterminée, égale à $\int_{L_0}$. D'ailleurs cette limite représente, par définition, l'intégrale $\int_{L_1}$. Notre proposition est donc établie.

254. Nous nous sommes astreint à ne considérer dans ce qui précède, parmi les lignes L aboutissant au point b, que celles où l'argument de $z - b$ reste compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1. Mais il est clair que cette restriction pourra être levée si l'on est en mesure d'établir que l'intégrale (1) reste infiniment petite, quels que puissent être φ_0 et φ_1.

Cette circonstance se présentera si la fonction $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = (z - b)^{-\alpha}\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant monodrome et bornée dans l'intérieur de C [M désignera, dans ce cas, le maximum de $|\psi(z)|$].

Soit en effet

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2k\pi + r,$$

r étant $< 2\pi$. L'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(z)\,\rho(-\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi$$

peut se décomposer dans la somme des suivantes

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} + \int_{\varphi_0+2\pi}^{\varphi_0+4\pi} + \ldots + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}.$$

Or, lorsque z décrit le cercle, $f(z)$ se reproduit, multiplié par le facteur $e^{-2\alpha\pi i}$. Si donc on désigne par I l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi},$$

on aura

$$\int_{\varphi_0+2\pi}^{\varphi_0+4\pi} = e^{-2\alpha\pi i}\,\mathrm{I}, \quad \ldots, \quad \int_{\varphi_0+2m\pi}^{\varphi_0+2(m+1)\pi} = e^{-2m\alpha\pi i}\,\mathrm{I}, \quad \ldots,$$

et par suite

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \mathrm{I}(1 + e^{-2\alpha\pi i} + \ldots + e^{-2(k-1)\alpha\pi i}) + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}$$
$$= \frac{e^{-2k\alpha\pi i} - 1}{e^{-2\alpha\pi i} - 1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}.$$

Or les deux intégrales du second membre ont un module moindre que $M\rho^{1-\alpha}2\pi$. D'autre part $|e^{-2k\alpha\pi i} - 1| \leqq 2$. Donc

$$\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right| \leqq \left(\frac{2}{|e^{-2\alpha\pi i} - 1|} + 1\right)M\rho^{1-\alpha}2\pi,$$

quantité infiniment petite.

255. On peut formuler des propositions toutes semblables aux précédentes pour les intégrales prises suivant des lignes qui s'étendent jusqu'à l'infini.

Soit $f(z)$ une fonction analytique n'ayant aucun point critique dans la région du plan extérieure à un contour donné C, et telle que pour toutes les valeurs de z dont le module est suffisamment grand, et l'argument compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1, on ait constamment

$$|f(z)| < \frac{M}{|z^\alpha|},$$

M étant une constante, et α un exposant positif > 1.

Soit L une ligne quelconque extérieure à C partant d'un point donné a pour aboutir à l'infini, de telle sorte que, lorsque z parcourt cette ligne, son argument finisse par rester compris entre λ_0 et λ_1.

L'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ *aura une valeur déterminée et indépendante du choix de la ligne* L.

Enfin la restriction que l'argument de z reste compris entre deux limites fixes pourra être levée, si l'on a

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{z^\alpha},$$

$\psi(z)$ restant monodrome et bornée à l'extérieur de C.

Soit, en effet, b un point arbitrairement choisi dans l'intérieur de C. Posons $z = \frac{1}{u-b}$. Lorsque z décrit C, la nouvelle variable u décrit un contour correspondant Γ. Lorsque z se meut en dehors de C, u décrit l'intérieur de Γ; il tend vers b lorsque z tend vers ∞; enfin, si l'argument de z est compris entre λ_0 et λ_1, celui de $u-b$, qui lui est égal et contraire, sera compris entre les deux nombres $-\lambda_0$ et $-\lambda_1$.

Cela posé, faisons décrire à z une ligne quelconque L et à u une ligne correspondante Λ; on aura

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_\Lambda f\left(\frac{1}{u-b}\right)\frac{du}{(u-b)^2},$$

et la première intégrale tendra vers une valeur déterminée

lorsque L s'allonge jusqu'à l'infini, si la seconde tend vers une valeur déterminée lorsque Λ s'allonge de telle sorte que son extrémité se rapproche de b. C'est ce qui aura lieu en effet, en vertu des théorèmes précédemment démontrés, car, si l'on a

$$|f(z)| < \frac{M}{|z^\alpha|}, \qquad \alpha > 1,$$

on en déduit

$$\left| f\left(\frac{1}{u-b}\right) \frac{1}{(u-b)^2} \right| < \frac{M}{|u-b|^{2-\alpha}}, \qquad 2-\alpha < 1,$$

et si

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{z^\alpha}, \qquad \alpha > 1,$$

on aura

$$f\left(\frac{1}{u-b}\right) \frac{1}{(u-b)^2} = \frac{\psi\left(\frac{1}{u-b}\right)}{(u-b)^{2-\alpha}}, \qquad 2-\alpha < 1,$$

ψ étant bornée et monodrome dans Γ.

256. On peut compléter les résultats ci-dessus par la remarque suivante, qui nous sera souvent utile.

Soit $f(z)$ une fonction de z telle que $(z-b)f(z)$ tende uniformément vers une limite fixe M lorsque $z-b$ tend vers zéro (ou vers ∞), pour toutes les valeurs de son argument. L'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise sur un arc de cercle de rayon ρ ayant b pour centre et correspondant à un angle au centre $\varphi_1 - \varphi_0$, tendra vers $iM(\varphi_1 - \varphi_0)$ lorsque ρ tendra vers zéro (ou vers ∞).

On a en effet sur le cercle considéré

$$f(z) = \frac{M+\delta}{z-b},$$

δ étant un infiniment petit; et d'autre part

$$z-b = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$dz = \rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = i(z-b)\,d\varphi.$$

Donc

$$\int f(z)\,dz = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\mathrm{M}+\delta)\,i\,d\varphi.$$

Le premier terme a pour valeur $i\mathrm{M}(\varphi_1 - \varphi_0)$ et le second a pour limite zéro; car son module ne peut surpasser $\eta|\varphi_1 - \varphi_0|$, η étant un infiniment petit, égal au maximum de $|\delta|$.

257. Soit $f(z)$ une fonction monodrome dans tout le plan (ou tout au moins dans la région du plan que nous nous bornerons à considérer). Si elle présente des points critiques, ceux-ci auront une position fixe et resteront critiques quel que soit le chemin suivi pour les atteindre (t. I, n° **351**).

Ces points pourront être de nature très variée, comme le montrent les exemples suivants.

Nous donnerons le nom de *pôles* aux points critiques de la fonction $f(z)$ qui sont des points ordinaires pour $\dfrac{1}{f(z)}$. Tels seraient, par exemple, les points critiques d'une fonction rationnelle de z.

Aux environs d'un semblable point a, $\dfrac{1}{f(z)}$ est développable par la série de Taylor. En outre, le terme constant doit s'annuler, car autrement le point ne serait pas critique : on aura donc aux environs de ce point

$$f(z) = \frac{1}{C_m(z-a)^m + C_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots}$$

et, en effectuant la division,

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une série de puissances entières et positives de $z-a$.

Le nombre m, nécessairement entier, se nomme l'*ordre de multiplicité* du pôle a.

La fonction $f(z)$ devient infinie au pôle $z = a$; mais elle reste évidemment finie et continue, ainsi que sa dérivée, pour toute autre valeur de z suffisamment voisine de a. Les pôles sont donc des points critiques isolés.

258. On donne le nom de *points singuliers essentiels* aux points critiques des fonctions monodromes autres que les pôles.

Pour en donner un exemple, considérons la fonction

$$u = e^{\frac{1}{z-a}}.$$

Elle est toujours finie et déterminée, ainsi que ses dérivées, sauf pour $z = a$. En ce point elle devient indéterminée. En effet, soient u_0 un nombre quelconque autre que zéro, $\log u_0$ un de ses logarithmes choisi à volonté. L'équation

$$e^{\frac{1}{z-a}} = u_0$$

a une infinité de racines, données par la formule

$$\frac{1}{z-a} = \log u_0 + 2k\pi i,$$

$$z = a + \frac{1}{\log u_0 + 2k\pi i}.$$

Comme on peut prendre k aussi grand qu'on veut, on voit qu'il existe des points aussi rapprochés qu'on voudra de a et pour lesquels la fonction prend la valeur donnée u_0 choisie arbitrairement.

Soit d'ailleurs

$$z = a + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

on aura

$$u = e^{\frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi)}.$$

Si z tend vers a, ρ tendra vers zéro. Si donc $\cos\varphi$ reste positif et plus grand qu'un nombre fixe λ, le module de u,

$e^{\frac{1}{\rho}\cos\varphi}$, croîtra indéfiniment. Il tendra au contraire vers zéro si $\cos\varphi$ reste $< -\lambda$.

259. Passons à la fonction

$$u = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

Elle devient infinie pour toute valeur de z de la forme $\frac{1}{k\pi}$, k étant un entier. En outre, elle devient indéterminée pour $z = 0$.

Les points $z = \frac{1}{k\pi}$ sont des pôles. Posons, en effet,

$$z = \frac{1}{k\pi} + h;$$

il viendra

$$\frac{1}{z} = \frac{k\pi}{1 + k\pi h} = k\pi - k^2\pi^2 h + \ldots,$$

$$\frac{1}{u} = \sin\frac{1}{z} = (-1)^{k-1}\sin(k^2\pi^2 h - \ldots),$$

expression développable suivant les puissances entières et positives de la quantité $h = z - \frac{1}{k\pi}$.

Le point critique $z = 0$ est d'une nature toute différente. Soient en effet u_0 un nombre quelconque autre que zéro, v l'une des racines de l'équation

$$\sin v = \frac{1}{u_0}.$$

L'équation

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = u_0 = \frac{1}{\sin v}$$

aura une infinité de racines, données par les formules

$$z = \frac{1}{v + 2k\pi}, \qquad z = \frac{1}{-v + (2k+1)\pi}.$$

Parmi ces racines, il en existe qui sont plus rapprochées de zéro que toute quantité donnée.

Ce résultat rappelle celui que nous avions trouvé pour le point critique de l'exemple précédent. Mais nous devons signaler ici cette circonstance nouvelle que le point critique n'est plus isolé; car tout cercle décrit de ce point comme centre renferme toujours une infinité de pôles, quelque petit que soit son rayon.

260. On formerait aisément des fonctions plus complexes, possédant une infinité de points critiques essentiels. Les points limites de cet ensemble seront de nouveaux points critiques essentiels, qui pourront eux-mêmes être en nombre infini, et ainsi de suite. On peut même, ainsi que nous allons le montrer, construire des fonctions douées de lignes critiques, dont tous les points soient critiques.

261. Soit L un arc de courbe continue ayant pour équation

$$z = \varphi(t) + i\psi(t),$$

où le paramètre t varie de t_0 à T.

Supposons que, dans cet intervalle, les fonctions φ et ψ admettent des dérivées, de telle sorte que la courbe ait une tangente en chaque point.

Soit $\frac{p}{q}$ l'une des fractions irréductibles moindres que $T - t_0$; et soit z_{pq} le point de L qui correspond à

$$t = t_0 + \frac{p}{q}.$$

Considérons l'expression

$$f(x) = \sum_{p,q} \frac{c_{pq}}{z_{pq} - z},$$

les coefficients c_{pq} désignant des constantes positives telles

que la série double

$$\Sigma c_{pq} \qquad (p=1, 2, \ldots, \infty;\ q=1, 2, \ldots, \infty)$$

ait une somme finie S.

La série $f(z)$ ainsi définie sera convergente et représentera une fonction uniforme de z, synectique aux environs de tout point non situé sur L.

Soient, en effet :

ζ une valeur particulière de z;
Δ la distance du point ζ à la ligne L;
δ une quantité quelconque moindre que Δ.

Pour toutes les valeurs de z, comprises dans un cercle de rayon $\Delta - \delta$ décrit autour de ζ, on aura

$$|z_{pq} - z| \overline{\gtrless} \delta,$$

et les modules des termes de $f(z)$ seront au plus égaux à ceux de la série convergente

$$\sum \frac{c_{pq}}{\delta}.$$

La série $f(z)$ est donc absolument et uniformément convergente dans le cercle considéré.

Il en est de même de la série dérivée

$$f'(z) = \sum \frac{c_{pq}}{(z_{pq} - z)^2};$$

car les modules de ses termes sont moindres que les termes de la série convergente

$$\sum \frac{c_{pq}}{\delta^2}.$$

Donc $f(z)$ est synectique dans le cercle considéré.

Tous les points de L sont critiques pour cette fonction. Chacun d'eux est en effet un point limite de l'ensemble des points z_{pq}. Mais chacun de ceux-ci est critique, car nous allons montrer que, si z s'approche indéfiniment de l'un de

ces points, tel que z_{ik}, en suivant la normale à la ligne L, $f(z)$ tendra vers l'infini.

Supposons, en effet, les termes de la série $f(z)$ rangés dans un ordre déterminé. On pourra décomposer cette série en deux autres

$$\sum \frac{c_{\alpha\beta}}{z_{\alpha\beta} - z} + \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{z_{\gamma\delta} - z},$$

la première formée des μ premiers termes de $f(z)$ et la seconde contenant tous les suivants.

L'entier μ est supposé assez grand pour que le terme $\frac{c_{ik}}{z_{ik} - z}$ figure dans la première somme.

Soit ε la distance des points z_{ik} et z. Le module de ce terme sera $\frac{c_{ik}}{\varepsilon}$.

Soit, en second lieu, η la plus courte distance du point z_{ik} aux autres points $z_{\alpha\beta}$; chacune des distances $|z_{\alpha\beta} - z|$ sera au moins égale à

$$|z_{\alpha\beta} - z_{ik}| - |z_{ik} - z| = \eta - \varepsilon.$$

La somme des modules des termes de la première somme, autres que celui considéré le premier, sera donc au plus égale à

$$\sum \frac{c_{\alpha\beta}}{\eta - \varepsilon} < \frac{S}{\eta - \varepsilon}.$$

Enfin chacune des distances $|z_{\gamma\delta} - z|$ sera au moins égale à ε; d'où

$$\left| \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{z_{\gamma\delta} - z} \right| \leqq \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{\varepsilon}.$$

On aura donc

$$|f(z)| \geqq \frac{c_{ik}}{\varepsilon} - \frac{S}{\eta - \varepsilon} - \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{\varepsilon} \geqq \frac{1}{\varepsilon}\left(c_{ik} - \sum c_{\gamma\delta} - \frac{S\varepsilon}{\eta - \varepsilon}\right).$$

On pourra prendre μ assez grand, puis ε assez petit, pour que $\Sigma c_{\gamma\delta}$, puis $\frac{S\varepsilon}{\eta - \varepsilon}$ deviennent aussi petits qu'on voudra.

Le terme entre parenthèses tendra donc vers c_{ik} et $f(z)$ vers ∞ lorsque ε tend vers zéro.

262. Les fonctions non monodromes peuvent offrir des points critiques encore plus variés. Nous nous bornerons à signaler :

1° *Les points critiques algébriques* ou *branchements algébriques*. Ce sont les points a aux environs desquels chaque branche de la fonction est développable en série suivant les puissances entières et croissantes de $(z-a)^{\frac{1}{r}}$, r étant un entier (le développement pouvant d'ailleurs contenir au début des termes à exposants négatifs). Aux diverses valeurs du radical $(z-a)^{\frac{1}{r}}$ correspondront r branches de la fonction, qui forment un cycle et se permutent circulairement lorsque la variable tourne autour du point critique.

2° *Les points critiques logarithmiques* où les branches de la fonction admettent des développements de la forme précédente, mais complétés par l'adjonction d'un terme logarithmique $A\log(z-a)$. Une rotation de z autour du point a accroissant ce terme de la constante $A.2\pi i$, chaque cycle contiendra une infinité de branches.

3° Les points critiques où chaque branche de la fonction admet un développement de la forme

$$(z-a)^{\alpha}[A+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots],$$

α n'étant pas rationnel. Chaque cycle contiendra encore une infinité de branches correspondant aux diverses déterminations de $(z-a)^{\alpha}$.

263. Revenons aux points critiques isolés des fonctions monodromes. Aux environs d'un semblable point, la fonction admet un développement que nous allons établir, en nous appuyant sur le lemme suivant, connu sous le nom de *théorème de Laurent :*

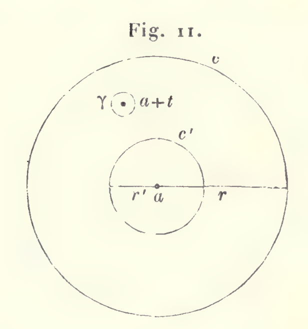
Soit $f(z)$ une fonction synectique dans la couronne cir-

culaire comprise entre deux cercles c, c' de rayons r, r' ayant un centre commun a; et soit $a+t$ un point quelconque intérieur à cette couronne; $f(a+t)$ sera représentée par une série convergente de la forme

$$f(a+t)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathrm{A}_m t^m.$$

Soient, en effet, c et c' (*fig.* 11) les deux cercles qui li-

Fig. 11.



mitent la couronne; γ un cercle infiniment petit entourant le point $a+t$. On aura (t. I, n° 204)

$$f(a+t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz$$

ou, comme $f(z)$ est synectique entre les cercles c, c', γ,

$$f(a+t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz.$$

Dans la première intégrale, on peut écrire

$$\frac{1}{z-a-t}=\frac{1}{z-a}+\frac{t}{(z-a)^2}+\ldots$$
$$+\frac{t^{n-1}}{(z-a)^n}+\frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}$$

et, dans la seconde,

$$\frac{1}{z-a-t}=-\frac{1}{t}-\frac{z-a}{t^2}-\ldots-\frac{(z-a)^{n-1}}{t^n}-\frac{(z-a)^n}{t^n(z-a-t)}.$$

Substituant ces valeurs, il viendra

$$f(a+t)=\sum_{-n}^{n-1} A_m t^m + R_n + R'_n,$$

en posant, pour abréger,

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{t^n f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-a-t)}, \quad R'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{(z-a)^n f(z)\,dz}{t^n(z-a-t)},$$

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}},$$

cette dernière intégrale devant être prise sur le cercle c si $m \geqq 0$, sur le cercle c' si $m < 0$. Mais on peut supprimer cette différence et prendre toujours l'intégrale sur le cercle extérieur c, car la fonction à intégrer est synectique entre les deux cercles.

Faisons tendre n vers ∞; il est aisé de voir que R_n et R'_n tendront vers zéro. En effet, sur c, on a

$$|z-a| = r > |t|,$$

et, en désignant par M le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle c,

$$|R_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{|t|^n M}{r^n[r-|t|]}\,2\pi r,$$

d'où

$$\lim R_n = 0.$$

On a, au contraire, sur c'

$$|z-a| = r' < |t|,$$

et, en désignant par M′ le maximum de $|f(z)|$ sur c',

$$|R'_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{r'^n M'}{|t|^n[|t|-r']}\,2\pi r',$$

$$\lim R'_n = 0.$$

On a donc, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$f(a+t)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_m t^m.$$

264. Ce développement de $f(a+t)$ en série, suivant les puissances positives et négatives de t, ne peut d'ailleurs s'effectuer que d'une seule manière.

Supposons, en effet, qu'on ait obtenu, par un procédé quelconque, un autre développement

$$f(a+t)=\sum B_m t^m.$$

En le comparant au précédent, il viendra

$$\sum (B_m - A_m) t^m = 0.$$

Divisons cette identité par t^{n+1} et intégrons le long du cercle c. Chaque terme aura pour intégrale indéfinie une fonction rationnelle, qui reprend sa valeur primitive lorsque l'on revient au point de départ. Son intégrale définie est donc nulle. Il y a exception pour le terme en $\frac{1}{t}$ lequel a pour coefficient $B_n - A_n$, et pour intégrale indéfinie $(B_n - A_n)\log t$. Son intégrale le long du cercle sera $(B_n - A_n) 2\pi i$. On aura donc

$$(B_n - A_n) 2\pi i = 0, \qquad \text{d'où} \qquad B_n = A_n.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit n, les deux développements seront identiques.

265. On peut incidemment déduire du théorème de Laurent la conséquence suivante :

Série de Fourier. — *Soit $f(z)$ une fonction de z satisfaisant à la relation*

$$f(z+2\omega)=f(z)$$

et qui n'ait aucun point critique dans la bande comprise entre deux droites parallèles L, L′, *faisant avec l'axe des x un angle égal à l'argument de 2ω. On aura dans cette bande*

$$(2) \qquad f(z)=\frac{1}{2\omega}\int_l \left[1+2\sum_1 \cos\frac{m\pi}{\omega}(\alpha - z)\right] f(\alpha)\, d\alpha,$$

l désignant une droite de longueur 2ω *parallèle à* L *et* L′, *et située arbitrairement dans la bande.*

Posons, en effet,

$$e^{\frac{\pi i z}{\omega}} = u, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{\omega}{\pi i}\log u.$$

Lorsque z se déplace sur une parallèle quelconque aux droites L, L′, son affixe croît de la quantité $2\omega t$, t restant réel et variant de $-\infty$ à $+\infty$. Ce changement multiplie u par le facteur $e^{2\pi i t}$, quantité dont le module est 1 et l'argument $2\pi t$. La variable u, ayant son module constant, tournera sur un cercle ayant son centre à l'origine, et fera une révolution complète chaque fois que z aura crû de 2ω.

A chaque valeur de z contenue dans la bande située entre L et L′ correspondra évidemment pour u un point de la couronne circulaire comprise entre les cercles C et C′, respectivement correspondants à L et à L′. Chaque point de la couronne correspondra d'ailleurs à une infinité de points z, différant les uns des autres de multiples de 2ω; mais à tous ces points correspond une même valeur de $f(z)$, en vertu de la périodicité admise. Donc $f(z)$, regardé comme fonction de u, sera monodrome dans la couronne considérée. Il est d'ailleurs évident qu'elle n'y a pas de point critique. On aura donc, en appliquant le théorème de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m u^m = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{\frac{m\pi i z}{\omega}},$$

A_m désignant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{u^{m+1}}\,du$$

prise le long d'un cercle arbitraire c concentrique à C, C′ et contenu dans la couronne.

Substituant à u sa valeur en z, cette intégrale se transforme

évidemment en

$$\frac{1}{2\omega}\int_l f(z)e^{-\frac{m\pi i z}{\omega}}\,dz,$$

l représentant un tronçon d'amplitude 2ω pris sur la droite correspondante à c.

On aura donc, en remplaçant la variable de sommation z par une autre lettre α, afin d'éviter la confusion,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\omega}\int_l f(\alpha)e^{-\frac{m i\pi\alpha}{\omega}}\,d\alpha\, e^{\frac{m i\pi z}{\omega}} \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_l \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{m i\pi}{\omega}(z-\alpha)} f(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}$$

Il ne restera plus, pour obtenir la formule (2), qu'à remplacer les exponentielles par leurs valeurs en sinus et cosinus.

Ce développement d'une fonction en série trigonométrique a déjà été établi au Chapitre IV, mais dans des conditions toutes différentes. Il ne s'appliquait alors qu'aux valeurs réelles de la variable ; en revanche, il laissait plus de latitude pour la nature de la fonction $f(z)$.

266. Soit maintenant a un point critique isolé d'une fonction monodrome $f(z)$. De a comme centre, on peut décrire un cercle c ne contenant aucun autre point critique. Soit $z = a + t$ un point quelconque autre que a pris dans ce cercle. On pourra tracer un cercle c' concentrique à c et auquel z soit extérieur. Entre ces deux cercles $f(z)$ sera synectique, et l'on aura, en vertu du théorème de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m t^m = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m (z-a)^m,$$

ce développement restant convergent dans tout le cercle c (le point a excepté).

Si la série précédente est limitée du côté des puissances négatives, le point a sera un pôle ; sinon, ce sera un point

critique essentiel. La série peut également être limitée du côté des puissances positives. Dans l'un ou l'autre cas, on pourra généralement déterminer par des procédés directs (notamment par la méthode des coefficients indéterminés) les coefficients de la série, et spécialement celui du terme en $\frac{1}{z-a}$.

Ce dernier coefficient se nomme le *résidu* de $f(z)$ par rapport au point critique a. Il offre une importance particulière, résultant du théorème suivant :

267. Théorème. — *Soient $f(z)$ une fonction monodrome dans une certaine région du plan; k un contour fermé sans point multiple, tracé dans cette région et ne contenant dans son intérieur que des points critiques isolés a, a', ... On aura*

$$\int_k f(z)\,dz = 2\pi i(A_{-1} + A'_{-1} + \ldots),$$

A_{-1}, A'_{-1}, ... *désignant les résidus relatifs à ces points critiques, et l'intégrale étant prise dans le sens direct.*

Entourons, en effet, ces points critiques par des cercles infiniment petits c, c', ... La fonction $f(z)$ étant synectique dans la région comprise entre ces cercles et le contour k, on aura (t. I, n° 203)

$$\int_k f(z)\,dz = \int_c f(z)\,dz + \int_{c'} f(z)\,dz + \ldots.$$

Mais on a, aux environs du point a,

$$f(z) = \Sigma A_m (z-a)^m.$$

Intégrons cette série le long du cercle c. Chacun de ses termes aura pour intégrale indéfinie une fonction rationnelle de z et son intégrale définie sera nulle. Il y a exception pour le terme $A_{-1}(z-a)^{-1}$, dont l'intégrale indéfinie

sera $A_{-1}\log(z-a)$, et l'intégrale définie $2\pi i A_{-1}$. On a donc

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i A_{-1}.$$

On trouve de même

$$\int_{c'} f(z)\,dz = 2\pi i A'_{-1}, \qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$\int_k f(z)\,dz = 2\pi i(A_{-1} + A'_{-1} + \ldots).$$

268. Ce théorème fournit une méthode féconde pour le calcul ou la transformation des intégrales définies.

Soit, par exemple, $f(z)$ une fonction jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est monodrome et n'a d'autres points critiques que des pôles dans toute la région du plan située au-dessus de l'axe des x;

2° Si elle a des points critiques b, b', ... situés sur cet axe, ces points seront isolés, et $f(z)$ pourra, aux environs de l'un quelconque d'entre eux, tel que b, se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{B_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta_2}} + \ldots + \rho,$$

β_1, β_2, ... étant des constantes réelles au moins égales à 1 et le reste ρ étant tel que l'on ait

$$\lim(z-b)\rho = 0, \qquad \text{pour} \qquad z = b;$$

3° Enfin elle peut également se mettre sous la forme

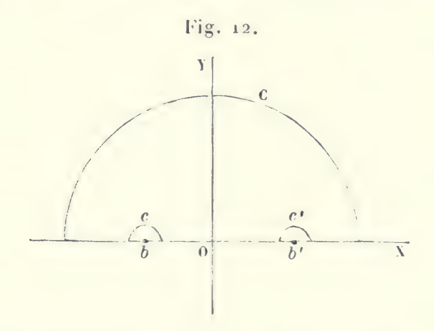
$$M_1 z^{\mu_1} + M_2 z^{\mu_2} + \ldots + \sigma,$$

μ_1, μ_2, ... étant au moins égaux à -1, et le reste σ étant tel que l'on ait

$$\lim z\sigma = 0, \qquad \text{pour} \qquad z = \infty.$$

Intégrons cette fonction le long d'un contour formé (*fig.* 12) : 1° d'un demi-cercle C de rayon infini R, ayant pour centre l'origine et pour diamètre inférieur l'axe des x; 2° de ce diamètre, à l'exception des portions avoisinant les points critiques b, b', ... auxquelles on substituera des demi-cercles c, c', ..., décrits de ces points critiques comme centres, avec des rayons infiniment petits r, r', ...

Fig. 12.



L'intégrale prise suivant ce contour est égale (267) à $2\pi i \Sigma A$, ΣA représentant la somme des résidus relatifs aux points critiques contenus dans le contour.

Or cette intégrale se compose : 1° des intégrales $\int_C$, $\int_c$, $\int_{c'}$, ..., prises suivant les demi-cercles; 2° de l'intégrale $\int_L$, prise suivant les portions rectilignes du contour. On aura donc

$$\int_L = 2\pi i \Sigma A - \int_c - \int_{c'} - \cdots - \int_C.$$

Cherchons ce que devient cette équation, lorsque R tend vers ∞ et r, r', ... vers zéro.

L'intégrale $\int_L$ a pour limite, par définition, la valeur principale de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, et, par suite, cette intégrale elle-même, si elle a une valeur finie et déterminée.

La somme ΣA s'étendra à tous les pôles situés au-dessus de l'axe des x. Chacun des termes qui la composent se calculera par un développement en série facile à effectuer.

Enfin les intégrales $\int_c, \int_{c'}, \ldots, \int_C$ sont aisées à calculer. On a, par exemple,

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c \left[\frac{B_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta_2}} + \ldots + \rho\right] dz.$$

Or on a (256)

$$\int_c \rho\,dz = 0.$$

D'autre part, si $\beta_1 > 1$,

$$\int_c \frac{B_1\,dz}{(z-b)^{\beta_1}} = \left[\frac{B_1}{1-\beta_1}\,\frac{1}{(z-b)^{\beta_1-1}}\right]_{b-r}^{b+r}$$
$$= \frac{B_1}{1-\beta_1}\left(1-e^{-\pi i(\beta_1-1)}\right)\frac{1}{r^{\beta_1-1}},$$

et, si $\beta_1 = 1$,

$$\int_c \frac{B_1\,dz}{z-b} = [B_1 \log(z-b)]_{b-r}^{b+r} = -B_1\pi i.$$

L'intégrale de ce terme sera donc nulle, si β_1 est un entier impair > 1 (car on aura, dans ce cas, $1-e^{-\pi i(\beta_1-1)} = 0$); égale à une constante, si $\beta_1 = 1$, et, enfin, de la forme $\frac{K}{r^{\beta_1-1}}$ dans tous les autres cas.

On peut calculer de même l'intégrale de chacun des autres termes $\frac{B_2\,dz}{(z-b)^{\beta_2}}, \ldots$ La somme de toutes ces intégrales se réduira à zéro ou à une constante, si toutes les quantités β_1, β_2, ... sont des entiers impairs. Dans le cas contraire, il est clair que, en faisant tendre r vers zéro, l'intégrale $\int_c f(z)\,dz$ tendra vers ∞, et, par suite, la valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ sera elle-même infinie ou indéterminée.

On peut calculer de même chacune des intégrales $\int_{c'}, \ldots$.

On a enfin

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C M_1(z^{\mu_1} + \ldots + \sigma)\,dz.$$

D'ailleurs (256),

$$\int_C \sigma\,dz = 0.$$

D'autre part, si $\mu_1 > -1$,

$$\int_C M_1 z^{\mu_1}\,dz = \left(\frac{M_1}{\mu_1+1} z^{\mu_1+1}\right)_R^{-R} = \frac{M_1}{\mu_1+1}(e^{\pi i(\mu_1+1)} - 1)R^{\mu_1+1},$$

et si $\mu_1 = -1$,

$$\int_C M_1 \frac{dz}{z} = (M_1 \log z)_R^{-R} = M_1 \pi i.$$

L'intégrale sera donc nulle si μ_1 est un entier impair > -1; constante, si $\mu_1 = -1$; de la forme KR^{μ_1+1}, dans tous les autres cas.

Donc $\int_C f(z)\,dz$ se réduira à zéro ou à une constante si μ_1, μ_2, ... sont des entiers impairs. Dans le cas contraire, elle tendra vers ∞ en même temps que R, et la valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ sera infinie ou indéterminée.

269. Posons, comme application,

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z},$$

a étant compris entre 0 et 1.

Cette fonction n'a aucun pôle au-dessus de l'axe des x. Elle a sur cet axe deux points critiques, 0 et -1 (*fig.* 13). On aura donc

$$\text{val. princ.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = -\int_c - \int_{c'} - \int_C.$$

Or $zf(z)$ a évidemment pour limite zéro, pour $z=0$ et pour $z=\infty$. Donc les intégrales $\int_{c'}$ et $\int_{C}$ sont nulles.

On a, d'autre part,

$$\frac{z^{a-1}}{1+z}=\frac{(-1)^{a-1}}{1+z}+\rho,$$

$(1+z)\rho$ s'annulant pour $z=-1$, et, par suite,

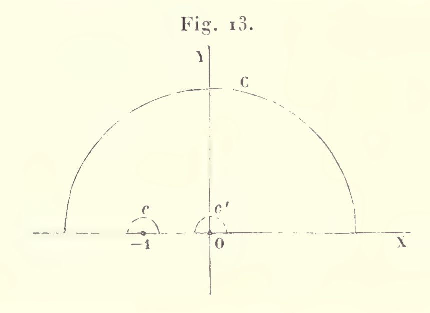
$$\int_{c}=-(-1)^{a-1}\pi i;$$

d'où

(4) $$\text{val. princ.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=(-1)^{a-1}\pi i.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de préciser celle des branches de la fonction z^{a-1} que nous considérons. Nous

Fig. 13.



choisirons celle qui, pour les valeurs réelles et positives de z, est réelle et positive. On aura, d'après cela,

$$z^{a-1}=\rho^{a-1}[\cos(a-1)\varphi+i\sin(a-1)\varphi],$$

ρ désignant le module de z et φ celui de ses arguments qui est compris entre 0 et π. En particulier,

$$(-1)^{a-1}=\cos(a-1)\pi+i\sin(a-1)\pi=-\cos a\pi-i\sin a\pi.$$

Cela posé, l'intégrale $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$, que nous désignerons par I, est finie et déterminée, et ses éléments sont tous réels.

Soit, d'autre part, $(-1)^{a-1}K$ la valeur principale de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$; K aura également tous ses éléments réels et l'équation (4) deviendra

$$I + (-1)^{a-1}K = (-1)^{a-1}\pi i$$

ou

$$I - (\cos a\pi + i\sin a\pi)K = -\pi i(\cos a\pi + i\sin a\pi).$$

Séparons la partie réelle de la partie imaginaire, il viendra

$$I - K\cos a\pi = \pi\sin a\pi,$$
$$K\sin a\pi = \pi\cos a\pi;$$

d'où

$$K = \pi\cot a\pi, \qquad I = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

270. Soit, en second lieu, $f(z)$ une fonction qui satisfasse aux conditions du n° 268 et qui, de plus, tende vers zéro pour $z = \infty$.

Considérons l'intégrale $\int e^{iz}f(z)\,dz$, prise suivant le même contour que dans l'application précédente. On aura encore

$$\text{val. princ.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz}f(z)\,dz = 2\pi i\Sigma A - \int_c - \int_{c'} - \cdots - \int_C.$$

Les intégrales $\int_c, \int_{c'}, \cdots$ pourront se calculer comme tout à l'heure, car la fonction e^{iz} pouvant être développée suivant les puissances croissantes de $z-b$, si $f(z)$ peut être mis sous la forme (3), il en sera évidemment de même de $e^{iz}f(z)$.

Quant à l'intégrale $\int_C$, elle aura pour limite zéro. Soit, en effet, μ le maximum du module de $f(z)$ sur le demi-cercle de rayon R. On aura sur ce demi-cercle

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

φ variant de o à π. On en déduit

$$|e^{iz}| = |e^{i\text{R}\cos\varphi - \text{R}\sin\varphi}| = e^{-\text{R}\sin\varphi}$$

et

$$|dz| = ds = \text{R}\,d\varphi;$$

on aura donc

$$\left|\int_{\text{C}} e^{iz} f(z)\,dz\right| \overline{\overline{<}} \int_0^\pi \mu e^{-\text{R}\sin\varphi}\,\text{R}\,d\varphi \overline{\overline{<}} 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\text{R}\sin\varphi}\,\text{R}\,d\varphi.$$

Or, entre o et $\frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi \overline{\overline{>}} \frac{2\varphi}{\pi}\cdot$ Le module cherché sera donc moindre que

$$2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\text{R}\varphi}\,\text{R}\,d\varphi = 2\mu \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\text{R}}).$$

Or, pour $\text{R} = \infty$, μ tend vers zéro, ainsi que $e^{-\text{R}}$; donc cette expression tend vers zéro.

271. Soit, par exemple,

$$f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}\cdot$$

Cette fonction a un pôle $z = ai$ au-dessus de l'axe des x et n'a aucun point critique sur cet axe. De plus, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2}\,dx$ est finie et déterminée. Elle aura donc pour valeur $2\pi i\text{A}$, A désignant le résidu de $\frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}$ par rapport au pôle ai. Or, si nous posons $z = ai + h$, cette expression devient

$$\frac{e^{-a}(1 + ih + \ldots)}{2aih + h^2} = \frac{e^{-a}}{2ai}\frac{1}{h} + \ldots.$$

Donc

$$\text{A} = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

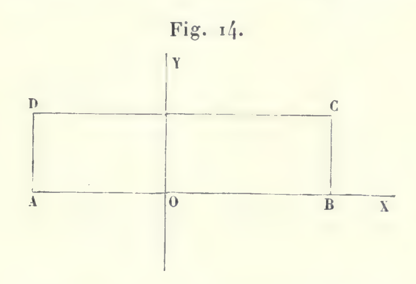
Séparons encore, dans cette équation, la partie réelle de la partie imaginaire; il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{a^2 + x^2}\, dx = 0.$$

272. Considérons, comme troisième application, la fonction e^{-z^2}. Intégrons-la suivant le rectangle ABCD (*fig*. 14).

Fig. 14.



La fonction e^{-z^2} restant finie et monodrome, l'intégrale sera nulle; d'où la condition

$$(5) \qquad \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0.$$

Supposons que les longueurs $OA = p$, $OB = q$ croissent indéfiniment, la hauteur BC conservant, au contraire, une longueur constante a.

L'intégrale $\int_{AB}$ aura évidemment pour limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Dans l'intégrale $\int_{BC}$, posons $z = q + it$; la nouvelle variable t sera réelle et variera de 0 à a. On a donc

$$\int_{BC} e^{-z^2}\, dz = \int_{0}^{a} e^{-(q+it)^2}\, i\, dt = e^{-q^2}\int_{0}^{a} e^{-2qit}\, e^{t^2}\, i\, dt.$$

Son module aura, pour limite supérieure,

$$e^{-q^2}\int_0^a e^{a^2}\,dt = a e^{a^2} e^{-q^2},$$

quantité qui tend vers zéro pour $q=\infty$. Donc

$$\lim \int_{BC} = 0.$$

Posant $z=-p+it$ dans $\int_{DA}$, on trouvera de même

$$\lim \int_{DA} = 0.$$

Enfin, dans l'intégrale $\int_{CD}$, posons $z=ai+t$; t variera de $+\infty$ à $-\infty$, et l'on aura

$$\lim \int_{CD} e^{-z^2}\,dz = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(ai+t)^2}\,dt.$$

L'équation (5) deviendra donc

$$\sqrt{\pi} + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(ai+t)^2}\,dt = 0,$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a^2} e^{-t^2}(\cos 2at - i\sin 2at)\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Divisant par e^{a^2} et séparant les parties réelles des parties imaginaires, il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos 2at\,dt = e^{-a^2}\sqrt{\pi},$$

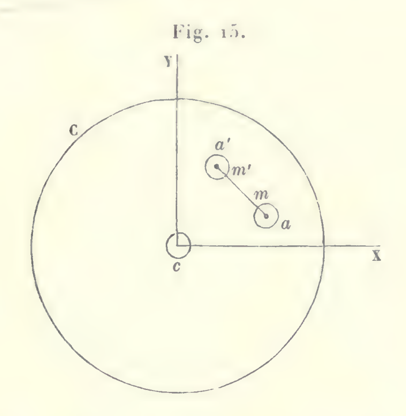
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sin 2at\,dt = 0.$$

273. Considérons, en dernier lieu, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}} \quad (n \text{ entier positif}).$$

Intégrons-la le long d'un cercle c (*fig.* 15) de rayon r infiniment petit, décrit autour de l'origine.

Fig. 15.



L'intégrale sera égale au produit de $2\pi i$ par le résidu de la fonction correspondant au pôle $z = 0$. Mais on a, en se tenant à celle des valeurs du radical qui se réduit à 1 pour $z = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots,$$

$X_1, \ldots, X_n, \ldots$ désignant les polynômes de Legendre (*Calcul différentiel,* 273). Divisant par z^{n+1}, on trouvera évidemment pour résidu X_n. On aura donc

$$X_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z^{n+1} \sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

274. Le radical $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$ s'annule pour les deux valeurs de z qui ont pour affixe $a = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $a' = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Entourons ces points par des cercles γ et γ' de rayons infiniment petits ρ et ρ'; joignons ces cercles par une droite mm' dirigée suivant la ligne des centres et considérons le contour K formé par la droite mm', le cercle γ', la droite $m'm$ et le cercle γ. Soit, enfin, C un cercle de rayon infini tracé autour de l'origine.

La fonction à intégrer reste monodrome dans l'espace compris entre les contours C, K et c. On sait, en effet, que le radical change de signe lorsqu'on tourne autour d'un des points critiques a et a'; mais, tant qu'on ne traverse pas la ligne mm', on ne pourra tourner autour d'un de ces points sans envelopper l'autre en même temps, ce qui donne un nombre pair de changements de signe.

On aura donc

$$\int_{C} = \int_{c} + \int_{K} = \int_{c} + \int_{mm'} + \int_{\gamma'} + \int_{m'm} + \int_{\gamma}.$$

275. Or les intégrales $\int_{C}$, $\int_{\gamma'}$, $\int_{\gamma}$ ont évidemment pour limite zéro (**256**).

D'autre part, les intégrales $\int_{mm'}$ et $\int_{m'm}$ sont égales; car, aux points correspondants, la fonction à intégrer est la même, sauf le signe, qui est changé par suite de la révolution opérée autour d'un point critique, et la différentielle dz a également changé de signe, le sens de l'intégration étant renversé.

Les points m et m' tendant d'ailleurs vers a et a', ces intégrales ont pour limite commune l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

prise en ligne droite de a à a', et le radical devant être pris avec la valeur qu'il possède sur le côté droit de la ligne aa'.

Changeons de variable en posant $z = x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi$. Il est clair que, lorsque z parcourra aa', $\cos\varphi$ variera de $+1$ à -1, et φ de zéro à π. On aura d'ailleurs

$$dz = -\sqrt{x^2 - 1}\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \pm\sqrt{1 - x^2}\sin\varphi.$$

Donc

$$(6)\quad X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c} = -\frac{1}{\pi i}\int_{aa'} = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}.$$

276. Il reste à déterminer le signe à donner à l'intégrale. Faisons l'hypothèse particulière $x = 1$, il viendra

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\ldots,$$

et, par suite, $X_n(1) = 1$. Quant à l'intégrale du second membre, elle devient

$$\pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi = \pm 1.$$

C'est donc le signe + qu'on devra prendre.

Supposons, au contraire, $x = -1$. On aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\ldots.$$

Donc $X_n(-1) = (-1)^n$. L'intégrale définie devient, d'autre part,

$$\pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(-1)^{n+1}} = \pm(-1)^{n+1}.$$

Il faudra donc prendre le signe —.

On voit donc que le signe à prendre dépend de la valeur de x. Cherchons comment il varie avec x.

Il est tout d'abord évident que ce signe ne peut varier que lorsque x passe par une valeur qui annule les deux membres de l'équation (6), ou rend l'un d'eux discontinu.

Or X_n est continu et ne s'annule que pour des points isolés, qu'on pourra toujours éviter dans le passage d'une valeur de x à une autre. Quant à l'intégrale du second membre, elle ne pourra devenir discontinue que si son dénominateur s'annule dans le champ de l'intégration. Il faut et il suffit pour cela que $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ soit réel et compris entre -1 et $+1$, et, par suite, que $\frac{x^2}{x^2-1}$ soit réel et < 1. Cela n'aura lieu que si x^2 est réel et négatif. L'axe Oy sera donc la ligne de démarcation entre les valeurs de x pour lesquelles on doit

prendre le signe $+$, et celles pour lesquelles on doit prendre le signe $-$.

Si x est purement imaginaire, la relation (6) est d'ailleurs illusoire, car la fonction à intégrer devient infinie dans le champ de l'intégration, et de telle sorte que l'intégrale est en réalité indéterminée. Ce défaut de la méthode provient de ce que la droite aa' passant dans ce cas par l'origine des coordonnées, qui est un point critique de la fonction $\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}$, il ne saurait être question d'intégrer suivant cette ligne.

277. Si, dans l'expression

$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

nous changeons de variable en posant $z=\frac{1}{t}$, d'où $dz=-\frac{dt}{t^2}$, il viendra évidemment

$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{-t^n\,dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

C désignant un cercle de rayon infini.

La nouvelle fonction à intégrer restant monodrome entre le cercle C et le contour K, on aura

$$\int_C = \int_K = 2\int_{aa'}.$$

Dans cette dernière intégrale, posons, comme tout à l'heure,

$$t = x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi;$$

il viendra

$$\int_{aa'}\frac{-t^n\,dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \pm i\int_0^\pi \left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi,$$

et, par suite,

$$X_n = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi.$$

Pour $x = 1$, il faudra prendre le signe $+$. Ce signe devra d'ailleurs être maintenu, quel que soit x, car les deux membres de l'équation sont toujours continus.

278. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}} = \pm \pi X_n,$$

que nous venons de considérer tout à l'heure, nous fournit l'exemple d'une intégrale définie, dépendant d'un paramètre x, et qui change brusquement de valeur lorsque x passe lui-même par une valeur pour laquelle l'intégrale cesse d'être déterminée. C'est là un phénomène très habituel.

C'est ainsi que l'intégrale

$$\int_K \frac{f(z)}{z - x}\,dz,$$

où $f(z)$ désigne une fonction synectique dans l'extérieur du contour fermé K, est égale à zéro si le point x est extérieur à K, et à $2\pi i f(x)$ s'il est intérieur; elle est indéterminée si x est sur K.

279. Considérons plus généralement l'intégrale

$$\int_L \frac{F(z, x)}{G(z, x)}\,dz,$$

où L désigne une ligne continue sans point multiple, F et G des fonctions entières.

Donnons à x une valeur particulière ξ; et soient $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les racines de l'équation

$$(7) \qquad G(z, \xi) = 0.$$

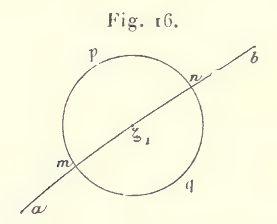
Chacune d'elles variera, comme on sait, d'une façon continue avec ξ. Si aucune d'elles n'est située sur la ligne L, l'intégrale considérée aura pour les valeurs de x voisines de ξ une valeur déterminée, et représentera une fonction synectique

de x, dont les dérivées successives pourront s'obtenir par la dérivation sous le signe $\int$.

280. Supposons, au contraire, que, pour $x = \xi$, l'une des racines ζ_1, ζ_2, ..., par exemple ζ_1, soit située sur L. Admettons d'ailleurs que ζ_1 ne coïncide pas avec les extrémités a, b de la ligne L, et que ce soit une racine simple de l'équation (7), de telle sorte qu'on ait $\frac{\partial}{\partial \zeta_1} G(\zeta_1, \xi) \gtrless 0$.

L'intégrale $\int_L$ sera indéterminée; mais, si l'on remplaçait la partie mn de L voisine de ζ_1 par un arc de courbe peu différent mpn ou mqn (*fig.* 16), on obtiendrait deux nou-

Fig. 16.



velles lignes $ampnb = L_1$, $amqnb = L_2$, le long desquelles l'intégrale aurait une valeur déterminée. Entre ces deux lignes, la fonction $\frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)}$ admet un seul point critique $z = \zeta_1$, aux environs duquel on a

$$F(z, \xi) = F(\zeta_1, \xi) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(z - \zeta_1) + \ldots,$$

$$G(z, \xi) = \frac{\partial G}{\partial \zeta_1}(z - \zeta_1) + \ldots.$$

Ce point est donc un pôle, auquel correspond le résidu

$$A = \frac{F(\zeta_1, \xi)}{\frac{\partial}{\partial \zeta_1} G(\zeta_1, \xi)},$$

et l'on aura

$$\int_{L_2} \frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)} dz - \int_{L_1} \frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)} dz = 2\pi i A.$$

D'ailleurs chacune de ces deux intégrales $\int_{L_2}$, $\int_{L_1}$ variera d'une façon continue avec x (aux environs de $x = \xi$).

A chaque valeur de x infiniment voisine de ξ correspond une quantité z_1, racine de l'équation

$$G(z, x) = 0,$$

et infiniment voisine de ζ_1. Supposons que x varie de telle sorte que lorsqu'il franchit la valeur ξ, z_1, qui franchit au même instant la valeur ζ_1, passe de la région *mqn* à la région *mpn*. L'intégrale s'accroîtra brusquement de la quantité $2\pi i A$. Considérons, en effet, deux valeurs x', x'' de x infiniment voisines l'une de l'autre et comprenant entre elles la valeur ξ. Pour $x = x'$, z_1 étant situé dans la région *mqn*, il n'existe aucun point critique entre les lignes L et L_1; on aura donc

$$\int_{L} \frac{F(z, x')}{G(z, x')} dz = \int_{L_1} \frac{F(z, x')}{G(z, x')} dz,$$

et à la limite, l'intégrale du second membre variant d'une façon continue,

$$\lim_{x'=\xi} \int_{L} \frac{F(z, x')}{G(z, x')} dz = \int_{L_1} \frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)} dz.$$

Pour $x = x''$, z_1 étant situé dans la région *mpn*, ce sont les intégrales suivant L et L_2 qui seront égales, et l'on aura

$$\lim_{x''=\xi} \int_{L} \frac{F(z, x'')}{G(z, x'')} dz = \int_{L_2} \frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)} dz.$$

L'intégrale $\int_{L} \frac{F(z, x)}{G(z, x)} dz$ éprouvera donc, d'un côté à l'autre de la valeur $x = \xi$, une discontinuité égale à $2\pi i A$.

281. Remarquons toutefois que $x = \xi$ n'est pas un point critique pour la fonction analytique que représentait l'intégrale. Car si l'on suppose que la ligne L, au lieu de rester fixe, se déforme progressivement au moment où elle serait près d'être atteinte par le point variable z_1, l'intégrale prise suivant cette ligne mobile restera continue, ainsi que ses dérivées. Or on peut toujours éviter la rencontre entre la ligne variable et les points z_1, z_2, ..., racines de l'équation $G(z, x) = 0$, sauf dans les deux cas suivants :

1° L'un des points z_1, z_2, ... tend vers l'une des extrémités a, b de la ligne L (lesquelles restent fixes);

2° Deux racines z_1, z_2, situées de part et d'autre de L, tendent à se confondre en une seule racine double.

On voit donc qu'à la condition de déformer à propos la ligne L d'intégration, l'intégrale $\int_L$, considérée comme fonction du paramètre x, ne peut avoir de points critiques que pour les valeurs de x pour lesquelles on a

$$G(a, x) = 0 \quad \text{ou} \quad G(b, x) = 0,$$

ou simultanément

$$G(z, x) = 0, \qquad \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} = 0.$$

II. — Intégrale de Cauchy.

282. Soient $f(z)$ une fonction qui dans l'intérieur d'un contour fermé K n'admette d'autres points critiques que des pôles; $\varphi(z)$ une autre fonction synectique dans l'intérieur de ce contour; nous allons nous proposer d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Pour cela, cherchons d'abord à déterminer les points critiques de la fonction $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ situés dans l'intérieur de K.

Soit a un point quelconque intérieur à K; $\varphi(z)$ étant synectique, on aura aux environs de ce point

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \ldots .$$

D'autre part, si a n'est ni un zéro ni un pôle pour $f(z)$, on aura un développement de la forme

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots, \qquad A_0 \gtrless 0,$$

d'où

$$f'(z) = A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots$$

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = [\varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \ldots]\frac{A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots}{A_0 + A_1(z-a) + \ldots}$$
$$= \lambda_0 + \lambda_1(z-a) + \ldots .$$

Donc a est un point ordinaire pour $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Supposons au contraire que a soit un zéro de $f(z)$, et soit m son ordre de multiplicité; on aura un développement de la forme

$$f(z) = (z-a)^m[A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots],$$

et, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots}{A_0 + A_1(z-a) + \ldots}$$
$$= \frac{m}{z-a} + \mu_0 + \mu_1(z-a) + \ldots,$$

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m\varphi(a)}{z-a} + \lambda_0 + \lambda_1(z-a) + \ldots .$$

Le point a est donc un pôle pour la fonction $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, et le résidu correspondant est $m\varphi(a)$.

Enfin, si le point a était un pôle de $f(z)$ d'ordre de multiplicité m, on aurait un développement de la forme

$$f(z) = (z-a)^{-m}[A_0 + A_1(z-a) + \ldots],$$

et l'on verrait de même que a est un pôle pour $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, et que le résidu correspondant est $-m\varphi(\alpha)$.

Cela posé, on sait (267) que l'intégrale cherchée est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles de $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ contenus dans l'intérieur de K. Si donc la fonction $f(z)$ admet dans l'intérieur de K les zéros $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ avec des ordres de multiplicité $m_1, \ldots, m_i, \ldots$ et les pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ avec des ordres de multiplicité $\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$, on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum m_i\,\varphi(a_i) - \sum \mu_k\,\varphi(\alpha_k).$$

Si les zéros et les pôles sont tous simples, on aura

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum \varphi(a_i) - \sum \varphi(\alpha_k).$$

On peut s'en tenir à cette dernière formule, car la précédente s'en déduit en supposant que plusieurs zéros ou plusieurs pôles, primitivement distincts, viennent à coïncider.

283. Supposons, en particulier, $\varphi(z) = z^\mu$; il viendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{z^\mu f'(z)}{f(z)}dz = \sum a_i^\mu - \sum \alpha_k^\mu.$$

Soit en second lieu $\varphi(z) = 1$. Chacun des termes $\varphi(a_i)$, $\varphi(\alpha_k)$ se réduisant à l'unité, nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{M} - \mathrm{N},$$

M désignant le nombre des zéros a_i et N le nombre des pôles α_k (comptés chacun avec son ordre de multiplicité).

284. *Remarque.* — Soient $z = x + yi$, $f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$; on aura

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \log(\mathrm{P} + \mathrm{Q}i) + \text{const.}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2) + i \operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} + \text{const.}\end{aligned}$$

En intégrant suivant le contour K, le logarithme arithmétique reprend la même valeur aux deux limites. D'autre part, arc tang $\frac{Q}{P}$ se sera accru de $(k-k')\pi$, k désignant le nombre de fois que $\frac{Q}{P}$ passe du positif au négatif en devenant infini, et k' le nombre des passages inverses du négatif au positif. On aura donc

$$(2) \qquad M - N = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{k-k'}{2}.$$

285. *Application.* — Soit

$$f(z) = z^n + a z^{n-1} + \ldots = 0$$

le premier membre d'une équation algébrique. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

donnera le nombre des racines contenues dans l'intérieur de K, car la fonction $f(z)$ n'a aucun pôle (à distance finie).

Pour obtenir le nombre total des racines, nous prendrons pour K un cercle de rayon infini. L'intégrale sera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{n z^{n-1} + a(n-1) z^{n-2} + \ldots}{z^n + a z^{n-1} + \ldots}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{n\,dz}{z}(1+\varepsilon),$$

ε étant infiniment petit pour z infini. On aura donc à la limite

$$\int_K \frac{n\varepsilon\,dz}{z} = 0.$$

D'autre part,

$$\int_K \frac{n\,dz}{z} = 2\pi i n.$$

Le nombre des racines est donc égal à n, degré de l'équation.

286. Formule de Lagrange. — *Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions synectiques dans l'intérieur d'un certain con-*

tour K; x *un point intérieur à ce contour;* α *une constante assez petite pour que la condition*

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| < 1$$

soit satisfaite pour tous les points du contour K.

Ces suppositions admises, l'équation

$$z = x + \alpha f(z)$$

admettra une racine unique a *dans l'intérieur du contour, et* $\varphi(a)$ *sera donné par la série convergente*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(x) + \alpha f(x)\varphi'(x) + \ldots \\ &\quad + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)^n \varphi'(x)] + \ldots . \end{aligned}\right.$$

La fonction

$$\mathrm{F}(z) = z - x - \alpha f(z)$$

n'ayant pas de pôles dans le contour, le nombre des racines $a, a_1, \ldots$ intérieures au contour sera donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)}\,dz,$$

et, plus généralement, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{K}} \frac{\varphi(z)\,\mathrm{F}'(z)\,dz}{\mathrm{F}(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{K}} \frac{\varphi(z)[1-\alpha f'(z)]}{\mathrm{F}(z)}\,dz$$

sera égale à $\sum \varphi(a)$.

Pour évaluer cette intégrale, dont la première n'est qu'un cas particulier, développons en série le facteur

$$\frac{1}{\mathrm{F}(z)} = \frac{1}{z - x - \alpha f(z)} = \sum_0^\infty \frac{[\alpha f(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}.$$

Cette progression géométrique étant uniformément con-

vergente sur K, on aura, en intégrant terme à terme,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty \alpha^n \int \frac{\varphi(z)[1-\alpha f'(z)][f(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\{\varphi(x)[f(x)]^n[1-\alpha f'(x)]\}$$

$$= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)[f(x)]^n$$

$$-\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x)[f(x)^{n-1}f'(x)]$$

$$= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{d}{dx}\varphi(x)[f(x)]^n - n\varphi(x)[f(x)]^{n-1}f'(x)\right\}$$

$$= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)]^n\varphi'(x).$$

Dans le cas particulier où la fonction φ se réduit à l'unité, cette expression se réduit à 1. Il n'y a donc qu'une racine a dans l'intérieur du contour, et l'expression précédente de I donnera la valeur de $\varphi(a)$. Le théorème est donc établi

287. Théorème. — *Soit* $S(z, u, v, \ldots)$ *un élément de fonction analytique dépendant de plusieurs variables* z, u, v, ... *et tel que l'équation*

$$S(z, 0, 0, \ldots) = 0$$

admette une racine nulle, de l'ordre n *de multiplicité.*

Pour un système de valeurs infiniment petites donné à u, v, ... : 1° *l'équation*

$$S(z, u, v, \ldots) = 0$$

admettra n *racines infiniment petites;* 2° *ces racines satisferont à une équation de la forme*

$$F = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

où $p_1, \ldots, p_n$ *sont des fonctions de* $u, v, \ldots$, *synectiques aux environs du point* $(0, 0, \ldots)$; 3° *enfin, on aura identiquement*

$$S(z, u, v, \ldots) = FG,$$

G *étant un nouvel élément de fonction analytique qui ne s'annule plus pour* $z = u = v = \ldots = 0$.

Mettons en évidence parmi ceux des termes de la série S qui sont indépendants de $u, v, \ldots$ celui dont le degré en z est le moins élevé; on pourra écrire

$$S = az^n + \sum A_{\alpha\beta\gamma\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots = az^n + T,$$

les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ satisfaisant dans chacun des termes de la série T à l'inégalité

$$\alpha + (n+1)(\beta + \gamma + \ldots) \overline{\gtrless} n + 1.$$

En effet, dans ceux de ces termes où $\beta, \gamma, \ldots$ sont nuls à la fois, α est au moins égal à $n + 1$.

Soit d'ailleurs ρ une quantité fixe, moindre que le rayon de convergence de l'élément S.

La série S et sa dérivée partielle

$$\frac{\partial S}{\partial z} = naz^{n-1} + \sum \alpha A_{\alpha\beta\gamma\ldots} z^{\alpha-1} u^\beta v^\gamma \ldots = naz^{n-1} + \frac{\partial T}{\partial z}$$

étant absolument convergentes pour $z = u = v = \ldots = \rho$, les sommes

$$\sigma = \sum |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}| \rho^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}, \qquad \sigma' = \sum \alpha |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}| \rho^{\alpha-1+\beta+\gamma+\cdots}$$

seront finies.

Nous allons établir qu'on peut assigner une quantité fixe λ telle que pour tous les systèmes de valeurs des variables ε, $u, v, \ldots$ qui satisfont aux inégalités

$$\varepsilon \overline{\gtrless} \lambda, \qquad |u| \overline{\gtrless} \rho\varepsilon^{n+1}, \qquad |v| \overline{\gtrless} \rho\varepsilon^{n+1}, \qquad \ldots,$$

1° l'équation $S(z, u, v, \ldots) = 0$ n'ait aucune racine dont

le module soit $\overline{\overline{<}} \rho\lambda$ et $\overline{\overline{>}} \rho\varepsilon$; 2° elle ait n racines de module $< \rho\varepsilon$.

Donnons, en effet, à z une valeur quelconque, dont le module $\rho\eta$ soit compris dans l'intervalle de $\rho\lambda$ à $\rho\varepsilon$; le premier terme de $S(z, u, v, \ldots)$ aura pour module

$$|a|\rho^n \eta^n.$$

Quant au module du reste T, il sera au plus égal à

$$\sum |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|(\rho\eta)^\alpha(\rho\varepsilon^{n+1})^{\beta+\gamma+\ldots}$$
$$\overline{\overline{<}} \sum |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\eta^{\alpha+(n+1)(\beta+\gamma+\ldots)}.$$

Si l'on suppose $\lambda < 1$ (d'où $\eta < 1$), cette quantité sera au plus égale à

$$\sum |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\eta^{n+1} = \sigma\eta^{n+1}.$$

On aura donc

$$|S(z, u, v, \ldots)| \overline{\overline{>}} |a|\rho^n\eta^n - \sigma\eta^{n+1} \overline{\overline{>}} \eta^n[|a|\rho^n - \sigma\eta].$$

Si donc λ est choisi moindre que $\frac{|a|\rho^n}{\sigma}$, il en sera de même *a fortiori* pour η, et $S(z, u, v, \ldots)$ ne sera pas nul.

288. Notre premier point étant ainsi établi, cherchons le nombre des racines de l'équation $S(z, u, v, \ldots) = 0$, dont le module est moindre que $\rho\lambda$ (et, par suite, moindre que $\rho\varepsilon$). Ce nombre est exprimé par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial S}{\partial z}}{S}\, dz,$$

prise suivant un cercle C de rayon $\rho\lambda$ décrit autour de l'origine comme centre. Or, d'après ce qui précède, on a pour tout point de ce cercle

$$|T| \overline{\overline{<}} \sigma\lambda^{n+1}$$

et, par suite,

$$S = az^n + T = az^n\left(1 + \frac{T}{az^n}\right) = az^n(1+\theta),$$

θ étant une quantité dont le module est au plus égal à

$$\frac{\sigma\lambda^{n+1}}{|a|(\rho\lambda)^n} = \frac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}.$$

On voit de la même manière qu'on aura

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| &\leqq \Sigma\alpha|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|(\rho\lambda)^{\alpha-1}(\rho\lambda^{n+1})^{\beta+\gamma\ldots}\\ &\leqq \Sigma\alpha|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha-1+\beta+\gamma+\ldots}\lambda^{\alpha-1+(n+1)(\beta+\gamma+\ldots)}\\ &\leqq \sigma'\lambda^n\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial z} = naz^{n-1}\left(1 + \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{naz^{n-1}}\right) = naz^{n-1}(1+\theta'),$$

θ' étant une quantité de module au plus égal à

$$\frac{\sigma'\lambda^n}{n|a|(\rho\lambda)^{n-1}} = \frac{\sigma'\lambda}{n|a|\rho^{n-1}}.$$

L'intégrale à calculer sera donc égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{n\,dz}{z}\,\frac{1+\theta'}{1+\theta} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{n\,dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\theta'-\theta}{1+\theta}\,\frac{n\,dz}{z}.$$

Le premier terme a pour valeur n. Quant au second, il sera nul, si son module est < 1; car on sait d'avance que la valeur de l'intégrale cherchée est un nombre entier. Or ce module est au plus égal à

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\frac{\sigma'\lambda}{n|a|\rho^{n-1}} + \frac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}}{1 - \frac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}}\,2\pi n = \frac{(\sigma'\rho + n\sigma)\lambda}{|a|\rho^n - \sigma\lambda},$$

quantité qui sera < 1, si l'on suppose

$$\lambda < \frac{|a|\rho^n}{\sigma'\rho + (n+1)\sigma}.$$

Si nous supposons que $|u|, |v|, \ldots$ tendent simultanément vers zéro, on pourra faire décroître en même temps la quantité ε jusqu'à zéro. Les n racines $z_1, \ldots, z_n$ de module $< \rho\varepsilon$, dont nous venons d'établir l'existence, tendront donc vers zéro; les autres racines au contraire, ayant leur module $> \rho\lambda$, resteront finies.

La première partie du théorème est donc démontrée.

289. Pour établir la seconde, nous remarquerons que la somme s_k des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines infiniment petites sera représentée (283) par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^k \frac{\partial S}{\partial z}}{S}\,dz.$$

C'est une fonction de $u, v, \ldots$ qui a une valeur unique et finie tant que les modules de ces variables ne surpasseront pas $\rho\lambda^{n+1}$. De plus, elle est synectique, car cette intégrale admet des dérivées partielles du premier et du second ordre, finies et déterminées, lesquelles peuvent s'obtenir sans difficulté par la dérivation sous le signe $\int$.

Cela posé, les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ de l'équation $F = 0$, qui a pour racines $z_1, \ldots, z_n$, s'expriment comme on sait par des polynômes entiers en $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ce seront donc des fonctions de $u, v, \ldots$, synectiques dans le domaine considéré.

290. Considérons enfin l'intégrale

$$I' = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial S}{\partial z}}{S}\,\frac{dz}{z - z'}.$$

Elle aura une valeur unique et déterminée, ainsi que ses dérivées partielles par rapport à $u, v, \ldots$, et au nouveau paramètre z', tant que $|u|, |v|, \ldots$ ne surpasseront pas $\rho\lambda^{n+1}$ et

que $|z'|$ sera $< \rho\lambda$. Ce sera donc une fonction synectique à l'intérieur de ce domaine.

Sa valeur sera d'ailleurs égale à la somme des résidus relatifs aux pôles z', z_1, ..., z_n de la fonction à intégrer. Si nous supposons $|u|$, $|v|$, ... au plus égaux à $\rho\varepsilon^{n+1}$ et $|z'| \overline{\gtrless} \rho\varepsilon$, le pôle z' sera distinct des autres, et le résidu correspondant sera égal à la valeur de $\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z}$ pour $z = z'$.

D'autre part, α_i désignant l'ordre de multiplicité du pôle z_i, le résidu correspondant sera $\frac{\alpha_i}{z_i - z'}$. On aura donc

$$I' = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{z=z'} + \sum \frac{\alpha_i}{z_i - z'} = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=z'}$$

et, en changeant z' en z et désignant par I ce que devient I' par ce changement,

$$\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial z} = I.$$

Intégrant cette équation, par rapport à z, il viendra

$$\log\frac{S}{F} = \int I\,dz,$$

$$S = F e^{\int I dz} = FG,$$

G désignant comme I une fonction de z, u, v, ... synectique aux environs de l'origine, et qui d'ailleurs ne s'annule pas en ce point.

Nous avons supposé, dans la démonstration précédente, que la quantité z' (actuellement remplacée par z) a son module $< \rho\lambda$, mais $> \rho\varepsilon$; or ε est arbitraire et peut être choisi aussi petit qu'on veut. L'égalité

$$S = FG$$

subsistera donc pour toutes les valeurs de z dont le module est $< \rho\lambda$, sans être nul. D'ailleurs, étant vraie pour z infiniment petit, elle le sera encore à la limite pour $z = 0$.

III. — Théorèmes généraux sur les fonctions monodromes.

291. On est convenu de dire qu'une fonction analytique $f(z)$ a pour $z = \infty$ un point ordinaire, un pôle, un point singulier essentiel, etc., suivant que le point $z = 0$ est un point ordinaire, un pôle, etc., pour la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

D'après cette définition, une fonction entière a généralement, pour $z = \infty$, un point singulier essentiel; ce sera un pôle si la fonction se réduit à un polynôme entier; un point ordinaire, si elle se réduit à une constante.

292. Théorème. — *Une fonction $f(z)$ uniforme sans points singuliers essentiels, même à l'infini, est une fonction rationnelle.*

En effet, elle ne peut avoir une infinité de pôles; car, ces points étant isolés, il ne peut en exister qu'un nombre borné dans un cercle de rayon donné décrit autour de l'origine. Elle admettrait donc des pôles dont le module surpasserait toute quantité donnée; $f\left(\frac{1}{z}\right)$ admettrait donc des pôles plus voisins de l'origine que toute quantité donnée; le point $z = 0$ serait donc un point singulier essentiel, et $z = \infty$ serait un point singulier essentiel pour $f(z)$.

Soient donc a, b, ... les pôles de $f(z)$ en nombre borné. On aura un développement de la forme

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + f_1(z),$$

$f_1(z)$ admettant les mêmes points critiques que $f(z)$, sauf a, qui est devenu un point ordinaire. On pourra poser de même

$$f_1(z) = \frac{B_n}{(z-b)^n} + \ldots + \frac{B_1}{z-b} + f_2(z)$$

et ainsi de suite. On aura finalement

$$f(z) = S + \varphi(z),$$

S désignant une somme de fractions simples et $\varphi(z)$ une fonction entière.

D'ailleurs ∞ est, par hypothèse, un pôle pour $f(z)$. Or c'est évidemment un point ordinaire pour chacun des termes de S; c'est donc un pôle pour $\varphi(z)$, qui devra, par suite, se réduire à un polynôme.

293. Théorème. — *Une fonction entière $f(z)$, dont le module reste constamment inférieur à un nombre fixe* M, *est nécessairement une constante.*

En effet, $f(z)$ admet un développement par la série de Maclaurin

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \ldots + \frac{z^n f^n(0)}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

convergent dans tout le plan. Soit d'ailleurs C un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre; on aura (t. I, n° 205)

$$f^n(0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

d'où

$$\left|\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R \leqq \frac{M}{R^n},$$

et, comme on peut prendre R aussi grand qu'on veut, on aura à la limite

$$\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n} = 0,$$

pour toute valeur de n; et, par suite,

$$f(z) = f(0) = \text{const.}$$

294. On peut déduire, de la proposition précédente, une propriété importante des points critiques essentiels.

Théorème. — *Soit a un point critique essentiel de $f(z)$,*

isolé des autres points essentiels que peut posséder cette fonction, et soit A un nombre quelconque. Il existera aux environs du point a une infinité de valeurs de z pour lesquelles on aura

$$|z-a|<\varepsilon, \qquad |f(z)-A|<\eta,$$

quelque petits que soient ε *et* η.

Traçons, en effet, autour de a un cercle C d'un rayon ρ assez petit pour qu'il ne renferme aucun autre point critique essentiel et considérons la fonction

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}.$$

Ses points critiques dans le cercle seront les suivants :

1° Le point critique essentiel a;

2° Des pôles, aux points où $f(z)=A$.

Si ces pôles sont en nombre infini, ils convergeront vers le point limite a, et l'on aura, pour une infinité de valeurs de z,

$$|z-a|<\varepsilon, \qquad f(z)-A=0.$$

Le théorème sera donc démontré.

Si ces pôles sont un nombre fini, on pourra réduire ρ suffisamment pour que C n'en contienne plus aucun, et $\varphi(z)$, n'ayant plus qu'un seul point critique a dans ce cercle, pourra être développée, d'après la formule de Laurent, en une double série

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty A_m(z-a)^m+\sum_1^\infty B_m(z-a)^{-m}.$$

La première série sera convergente dans le cercle C, et si $|z-a|<\rho'$, ρ' étant une quantité moindre que ρ, son module ne pourra surpasser la constante fixe

$$K=\sum_0^\infty |A_m|\rho'^m.$$

La seconde est une fonction entière de $\frac{1}{z-a}$, car elle converge dans tout l'intérieur de C (sauf au point a pour lequel $\frac{1}{z-a}$ est infini) et *a fortiori* en dehors de C, où $\left|\frac{1}{z-a}\right|$ est moindre qu'à l'intérieur. On pourra donc, d'après le théorème précédent, assigner à la variable une valeur telle que son module surpasse un nombre quelconque M.

La valeur correspondante de $|z-a|$ sera $< \rho'$, si M est assez grand, car, lorsque $|z-a| \overline{\gtrless} \rho'$, $|\varphi(z)|$ ne peut surpasser la constante fixe

$$\sum_1^\infty |B_m| \rho'^{-m}.$$

On aura donc à la fois

$$|z-a| < \rho'$$

et

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{1}{f(z)-A}\right| > M - K,$$

d'où

$$|f(z) - A| < \frac{1}{M-K}$$

et, par suite, en prenant ρ' assez petit et M assez grand,

$$|z-a| < \varepsilon, \qquad |f(z) - A| < \eta.$$

Ayant trouvé un premier point z qui satisfasse à ces conditions, on pourra trouver de même un second point z_1 satisfaisant aux conditions

$$|z_1 - a| < |z-a|, \quad |f(z_1) - A| < |f(z) - A|,$$

et ainsi de suite.

M. Picard a démontré [1] qu'il existe au plus deux valeurs

---

(1) *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*; 1880).

(finies ou infinies) de A pour lesquelles les relations

$$|z-a|<\varepsilon, \qquad f(z)-A=0$$

n'aient pas une infinité de solutions. Nous nous bornerons à énoncer ce résultat.

La proposition que nous venons d'établir s'appliquerait évidemment à tout point critique essentiel qui serait la limite d'une suite de points critiques essentiels de l'espèce que nous avons considérée.

295. Une fonction entière peut ne s'annuler pour aucune valeur de la variable, ou admettre au contraire des zéros simples ou multiples, en nombre fini ou infini. Mais, dans tous les cas, ces zéros forment un système de points isolés (t. I, n° 339).

Réciproquement, nous allons établir la proposition suivante :

Théorème de M. Weierstrass. — *Étant donné un système quelconque de points isolés $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, on pourra construire une fonction entière dont ces points soient les zéros.*

Nous supposerons provisoirement que l'origine $z=0$ ne fait pas partie de la série des zéros donnés $a_0, a_1, \ldots$. Si le nombre de ceux-ci est fini, le produit

$$\left(1-\frac{z}{a_0}\right)\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\cdots$$

satisfera à la question. Si ce nombre est infini, le produit ci-dessus, contenant une infinité de facteurs, pourra devenir divergent, ce qui rendrait la solution illusoire. Mais on peut la modifier ainsi qu'il suit :

Remarquons tout d'abord que les points $a_0, a_1, \ldots$ étant isolés, il n'en existe qu'un nombre limité dans une portion finie quelconque du plan, et notamment dans un cercle de rayon donné décrit autour de l'origine. On pourra donc

ordonner les quantités a_0, a_1, ... suivant l'ordre de grandeur de leur module. Si plusieurs de ces quantités ont même module ou même sont égales (ce qui arrivera si l'on veut donner des zéros multiples à la fonction), on pourra les disposer dans l'ordre qu'on voudra. En tout cas, on aura évidemment

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Cela posé, considérons le produit infini

$$P(z) = \prod_0^\infty e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

où M_0, M_1, ..., M_n, ... désignent des polynômes en z.

Nous allons montrer que ces polynômes peuvent toujours être déterminés de telle sorte que le produit ci-dessus soit convergent et représente une fonction entière, satisfaisant aux conditions requises.

On a

$$e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = e^{M_n + \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} = e^{M_n - \int_0^z \frac{dz}{a_n - z}},$$

la ligne L d'intégration entre o et z pouvant être choisie arbitrairement. Mais on a

$$\int_0^z \frac{dz}{a_n - z} = \int_0^z \left[\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{a_n^n} + \frac{z^n}{a_n^n(a_n - z)}\right] dz$$
$$= \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^n}{na_n^n} + \int_0^z \frac{z^n\,dz}{a_n^n(a_n - z)}.$$

Si donc nous posons

$$M_n = \frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{na_n^n}, \qquad \psi_n = -\int_0^z \frac{z^n\,dz}{a_n^n(a_n - z)},$$

nous aurons

$$e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = e^{\psi_n}.$$

Les polynômes M_n étant ainsi déterminés, nous aurons satisfait à la question. Considérons en effet l'ensemble des valeurs de z dont le module ne surpasse pas un nombre donné ρ, et soit $|a_\mu|$ le dernier terme de la suite $|a_0|, |a_1|, \ldots$ qui ne surpasse pas ρ. On aura

$$P(z) = \prod_0^\mu e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\sum_{\mu+1}^\infty \psi_n}.$$

Or, dans le domaine considéré, on a $|z| \overline{\gtrless} \rho$, et pour les valeurs de n plus grandes que μ on a, d'autre part,

$$|a_n| \overline{\gtrless} |a_{\mu+1}| > \rho$$

et, par suite,

$$|\psi'_n| = \left| - \frac{z^n}{a_n^n (a_n - z)} \right| \overline{\gtrless} \frac{\rho^n}{|a_{\mu+1}|^n (|a_{\mu+1}| - \rho)}.$$

Le terme général de la série $\sum \psi'_n$ a donc son module moindre que le terme général d'une progression géométrique convergente et indépendante de z; la série sera donc uniformément convergente dans le domaine considéré. La série $\sum \psi_n$ sera convergente dans ce même domaine, car on a

$$|\psi_n| = \left| \int_0^z \psi'_n \, dz \right| \overline{\gtrless} \frac{\rho^n}{|a_{\mu+1}|^n (|a_{\mu+1}| - \rho)} l,$$

l désignant la longueur de la ligne d'intégration. Or le second membre est encore le terme général d'une progression géométrique convergente.

La série $\sum_{\mu+1}^\infty \psi_n$ sera donc, dans le domaine considéré, une fonction synectique, ayant pour dérivée $\sum_{\mu+1}^\infty \psi'_n$; il en sera de

même de l'exponentielle

$$e^{\sum_{\mu+1}^{\infty} \psi_n},$$

qui d'ailleurs ne s'annulera pas dans ce domaine.

Mais, d'autre part, l'autre facteur de $P(z)$ est une fonction entière, qui ne s'annule qu'aux points $a_0, \ldots, a_\mu$. Donc $P(z)$ est synectique dans ce domaine et admet les zéros ci-dessus à l'exclusion de tout autre.

Comme on peut faire croître indéfiniment le nombre ρ, on voit que $P(z)$ est bien une fonction entière, dont les zéros sont les points $a_0, \ldots, a_n, \ldots$.

296. Nous avons supposé que le point $z = 0$ ne faisait pas partie de la série des zéros donnés. Si l'on voulait obtenir une fonction pour laquelle ce point fût un zéro d'ordre m, il suffirait de construire par la méthode précédente une fonction admettant les autres zéros de la suite et de la multiplier par z^m.

297. Ayant ainsi construit une fonction entière $f(z)$ ayant les zéros demandés, proposons-nous de trouver l'expression générale des fonctions entières qui jouissent de cette propriété.

Soit $f_1(z) = Q f(z)$ l'une d'elles. Le quotient Q n'aura évidemment ni zéros ni points critiques à distance finie. Son logarithme n'aura donc pas de points critiques à distance finie, et sera une fonction entière. En la désignant par U, on aura

$$f_1(z) = e^U f(z).$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction de la forme ci-dessus jouira de la propriété demandée, le facteur e^U ne pouvant devenir ni nul ni infini.

298. On donne le nom de *fonctions méromorphes* aux fonctions dont tous les points critiques situés à distance finie sont des pôles.

Soient $F(z)$ une semblable fonction; $a_0, a_1, \ldots$ ses pôles; $\mu_0, \mu_1, \ldots$ leurs degrés de multiplicité. On peut construire une fonction entière $f(z)$ ayant ces points pour zéros, avec les mêmes degrés de multiplicité. La fonction $F(z)f(z)=\varphi(z)$, n'ayant plus de point critique à distance finie, sera une fonction entière. La fonction

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

sera donc le quotient de deux fonctions entières.

299. Les fonctions entières et les fonctions méromorphes rentrent comme cas particulier dans la catégorie des fonctions monodromes, dont tous les points critiques, situés à distance finie, sont isolés. Proposons-nous de déterminer l'expression générale de ces dernières fonctions.

Soient $f(z)$ une semblable fonction; a l'un de ses points critiques. On aura, comme nous avons vu (266), aux environs de ce point,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} A_m (z-a)^m \\ &= \sum_{0}^{\infty} A_m (z-a)^m + \sum_{1}^{\infty} A_{-m} (z-a)^{-m} \\ &= \varphi(z) + \psi(z). \end{aligned}$$

Chacune des deux séries partielles $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ peut contenir un nombre de termes limité ou illimité; mais, dans ce dernier cas, elle sera convergente aux environs du point a.

La série $\psi(z)$ sera même convergente dans tout le plan (le point a excepté).

D'autre part, il est clair que a n'est plus un point critique pour la fonction $\varphi(z)$. La nature de la singularité que présente la fonction $f(z)$ en ce point est donc caractérisée par la seconde fonction partielle $\psi(z)$.

300. Théorème de M. Mittag-Leffler. — *Étant donnée une suite quelconque de points isolés* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *et une série de fonctions correspondantes* $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ *de la forme*

$$\psi_n = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_{m,n}(z - a_n)^{-m},$$

on pourra toujours construire une fonction monodrome $f(z)$ *ayant pour points critiques* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *et telle que l'on ait*

$$f(z) = \varphi_0 + \psi_0 = \ldots = \varphi_n + \psi_n = \ldots,$$

φ_n *étant une fonction pour laquelle* a_n *ne soit plus un point critique.*

On satisfera évidemment à la question en posant

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\psi_n - P_n),$$

si $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ désignent des polynômes en z, choisis de telle sorte que la série $f(z)$ et la série dérivée

$$f'(z) = \sum (\psi'_n - P'_n)$$

soient uniformément convergentes dans toute région finie du plan qui ne contient aucun des points critiques $a_0, \ldots, a_n, \ldots$.

Cherchons à déterminer les polynômes P, de manière à satisfaire à cette condition.

Soient ζ le maximum du module de z dans la région considérée; $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les modules des quantités $a_0, \ldots, a_n, \ldots$; nous les supposerons rangés par ordre de grandeur croissante, de telle sorte qu'on ait

$$\lim \alpha_n = \infty \quad \text{pour} \quad n = \infty.$$

Traçons autour de chaque point critique a_n, et dans ses environs, un cercle c_n, dont le rayon R_n ne surpasse pas d'ailleurs une quantité constante, que nous désignerons par ρ.

On pourra assigner à n une valeur finie k, à partir de laquelle on ait constamment $\alpha_n - \rho - \zeta > 1$. Il résulte de cette inégalité que le cercle de rayon ζ, décrit de l'origine comme centre, ne coupe pas le cercle de rayon ρ décrit de a_n comme centre. Mais le premier de ces cercles contient le point z, le second contient le cercle c_n; donc z sera en dehors du cercle c_n (si $n \gtreqless k$).

Cela posé, on aura évidemment

$$f(z) = \sum_0^{k-1} (\psi_n - P_n) + \sum_k^{\infty} (\psi_n - P_n).$$

La première somme ne contient qu'un nombre limité de termes, dont chacun est uniformément convergent dans toute région qui ne contient aucun des points $a_0, a_1, \ldots$ (car la série ψ_n procédant suivant les puissances entières et positives de la variable $\frac{1}{z - a_n}$, sa convergence est uniforme); donc elle est uniformément convergente, ainsi que sa dérivée, de quelque façon qu'on choisisse les polynômes P.

Passons à l'examen de la seconde somme.

La fonction ψ_n étant convergente dans la couronne comprise entre le cercle c_n et un second cercle C de rayon infini, et le point z étant d'ailleurs dans cette couronne, on aura, comme dans la démonstration du théorème de Laurent,

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi_n(u)\,du}{u - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \frac{\psi_n(u)}{u - z}\,du.$$

La fonction $\psi_n(u)$ et, par suite, la fonction $\frac{u\,\psi_n(u)}{u - z}$ tendant évidemment vers zéro pour $u = \infty$, la première intégrale sera nulle (256), et l'on aura simplement

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \frac{\psi_n(u)}{u - z}\,du \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \psi_n(u)\,du\left[\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \ldots + \frac{z^{\mu-1}}{u^{\mu}} + \frac{z^{\mu}}{u^{\mu}(u - z)}\right], \end{aligned}$$

μ étant un entier que nous nous réservons de déterminer en fonction de n.

Les premiers termes de cette intégrale donnent un polynôme en z de degré $\mu - 1$. En le prenant pour P_n, il viendra

$$\psi_n - P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n}\frac{z^\mu}{u^\mu(u-z)}\psi_n u\,du,$$

$$\psi'_n - P'_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n}\left[\frac{\mu z^{\mu-1}}{u^\mu(u-z)} + \frac{z^\mu}{u^\mu(u-z)^2}\right]\psi_n(u)\,du.$$

Le module de u sur le cercle c_n est évidemment $\overline{\gtrless}\,\alpha_n - \rho$. Soient M_n le maximum du module de $\psi_n(u)$ sur ce même cercle; λ_n un entier positif satisfaisant à l'inégalité

$$(n + 2\lambda_n) M_n \rho < (\alpha_n - \rho)^{\lambda_n}.$$

On rendra les séries

$$\sum(\psi_n - P_n), \quad \sum(\psi'_n - P'_n)$$

convergentes en posant

$$\mu = n + 2\lambda_n.$$

On a, en effet,

$$\sum|\psi_n - P_n| \overline{\gtrless} \sum\frac{1}{2\pi}\,\frac{\zeta^\mu M_n . 2\pi\rho}{(\alpha_n - \rho)^\mu(\alpha_n - \rho - \zeta)}$$

$$\overline{\gtrless} \sum\frac{\zeta^n}{(\alpha_n - \rho)^n}\,\frac{K_n}{n + 2\lambda_n},$$

K_n désignant le facteur

$$\left(\frac{\zeta^2}{\alpha_n - \rho}\right)^{\lambda_n}\frac{1}{\alpha_n - \rho - \zeta}$$

et

$$\sum|\psi'_n - P'_n| \overline{\gtrless} \sum\frac{\zeta^n}{(\alpha_n - \rho)^n} K'_n,$$

K'_n désignant le facteur

$$K'_n = K_n\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{(\alpha_n - \rho - \zeta)(n + 2\lambda_n)}\right].$$

Les deux séries ci-dessus sont convergentes; car, si n tend vers ∞, K_n, K'_n, $\frac{\zeta}{\alpha_n - \rho}$ tendent vers zéro. La racine $n^{\text{ième}}$ du terme général tend donc vers zéro.

L'uniformité de la convergence résulte d'ailleurs de ce fait que ces dernières séries ont leurs termes indépendants de z.

301. Ayant ainsi construit une fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions demandées, on obtiendra évidemment la fonction la plus générale qui satisfasse à ces mêmes conditions en lui ajoutant une fonction entière quelconque.

302. Théorème. — *Toute fonction u qui a n valeurs pour chaque valeur de z et qui n'offre à distance finie que des points critiques algébriques est racine d'une équation algébrique de degré n, dont les coefficients sont des fonctions méromorphes de z.*

Ces coefficients se réduiront à des fonctions rationnelles, si la fonction n'a que des points critiques algébriques, même en tenant compte du point $z = \infty$.

Soient, en effet, u_0, u_1, ..., u_{n-1} les n branches de la fonction. Un point quelconque a deviendra un point ordinaire ou un pôle pour l'une quelconque d'entre elles, telle que u_0, si l'on prend pour variable indépendante une puissance fractionnaire de $z - a$, telle que $(z-a)^{\frac{1}{q}} = Z$. On pourra donc, aux environs de ce point, développer u_0 en série convergente, suivant les puissances entières de Z. Le développement pourra d'ailleurs commencer par des puissances négatives, si le point considéré est un pôle pour u_0.

Soit donc

$$u_0 = AZ^\alpha + BZ^\beta + \ldots.$$

Si z tourne $1, 2, \ldots, q-1$ fois autour du point a, Z se reproduira, multiplié par les diverses racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

En les désignant par $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{q-1}$, nous obtiendrons $q-1$ autres branches de la fonction, représentées par les séries

$$\begin{aligned} u_1 &= A\theta^\alpha Z^\alpha + B\theta^\beta Z^\beta + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{q-1} &= A\theta^{(q-1)\alpha} Z^\alpha + B\theta^{(q-1)\beta} Z^\beta + \ldots . \end{aligned}$$

Élevons ces égalités à la puissance k, k étant un entier quelconque, et ajoutons les résultats. Il viendra

$$u_0^k + u_1^k + \ldots + u_{q-1}^k = \mathcal{A} Z^\lambda + \mathcal{B} Z^\mu + \ldots .$$

D'ailleurs le premier membre ne change pas, si l'on y change Z en θZ. Donc il en sera de même du second; donc les exposants λ, μ, ... seront tous des multiples de q; donc, enfin, la somme $u_0^k + \ldots + u_{q-1}^k$ sera développable en série convergente, suivant les puissances croissantes de la quantité $Z^q = z - a$.

Tout autre cycle de branches associées u_q, u_{q+1}, ... donnerait évidemment un résultat analogue. Donc la somme S_k des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des diverses branches de la fonction u est une fonction monodrome de z, pour laquelle le point a est un point ordinaire ou un pôle. Ce point a étant d'ailleurs quelconque, S_k sera une fonction méromorphe.

Supposons enfin que $z = \infty$ soit un point ordinaire ou, plus généralement, un point critique algébrique pour la fonction u. Chacune des branches $u_0, \ldots, u_{n-1}$ sera développable aux environs de ce point, suivant les puissances entières et croissantes d'une puissance fractionnaire de $\frac{1}{z}$, telle que $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{q}} = Z$; et un raisonnement identique au précédent montre que ∞ est un point ordinaire ou un pôle de S_k. Donc S_k, n'ayant pour points critiques que des pôles, sera rationnel en z.

Cela posé, les quantités $u_0, \ldots, u_{n-1}$ sont les racines de l'équation

$$(u - u_0) \ldots (u - u_{n-1}) = 0,$$

dont les coefficients, s'exprimant en fonction rationnelle et entière des sommes $S_1, \ldots, S_k, \ldots$, seront des fonctions méromorphes (ou des fractions rationnelles) de z en même temps que ces dernières.

303. Théorème. — *Si l'équation en u est irréductible, on pourra, en faisant décrire à la variable z un contour fermé convenable, passer de la branche u_0 à l'une quelconque des autres branches $u_1, \ldots, u_{n-1}$.*

Supposons, en effet, qu'on ne pût passer de la branche u_0 qu'aux branches $u_1, \ldots, u_m$, mais non aux branches suivantes $u_{m+1}, \ldots$; les branches $u_0, u_1, \ldots, u_m$ seraient évidemment permutées exclusivement entre elles, quel que fût le chemin suivi par la variable z. Et l'on verrait, comme tout à l'heure, que les coefficients de l'équation

$$(u - u_0)\ldots(u - u_m) = 0$$

seraient des fonctions méromorphes (ou des fractions rationnelles) de z. L'équation en u admettrait donc un facteur de même forme et de degré moindre.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Des périodes.

304. On dit qu'une fonction $f(u)$ est *périodique* et admet la période 2ω, si elle satisfait à la relation

$$f(u+2\omega)=f(u).$$

Si $f(u)$ admet plusieurs périodes, 2ω, $2\omega'$, ..., $2\omega^n$, elle admettra évidemment pour période toute quantité de la forme

$$2m\omega+2m'\omega'+\ldots,$$

m, m', ... étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Si toutes ces quantités sont différentes, on dira que les $n+1$ périodes 2ω, $2\omega'$, ... sont *distinctes*. Dans le cas contraire, ce seront des fonctions linéaires, à coefficients entiers de n nouvelles périodes 2Ω, $2\Omega'$, ..., $2\Omega^{n-1}$.

En effet, il existe entre elles, par hypothèse, une équation linéaire à coefficients entiers

$$(1) \qquad 2a\omega+2a'\omega'+\ldots=0.$$

Soit a le plus petit (en valeur absolue) de ceux des coefficients a, a', ... qui ne sont pas nuls. On aura

$$a'=aq'+r', \qquad a''=aq''+r'', \qquad \ldots,$$

q', q'', ... étant des entiers, et r', r'' des restes inférieurs à a en valeur absolue.

Posons

$$2\omega + 2q'\omega' + 2q''\omega'' + \ldots = 2\omega_1.$$

Il est clair : 1° que $2\omega_1$ est une période; 2° que 2ω, $2\omega'$, ... s'expriment par des fonctions linéaires, à coefficients entiers de $2\omega_1$, $2\omega'$, ... Ces nouvelles périodes sont liées par la relation

$$2a\omega_1 + 2r'\omega' + \ldots = 0,$$

où les coefficients, sauf le premier, sont moindres en valeur absolue que dans l'équation (1). Par une suite d'opérations analogues, on arrivera finalement à un système de périodes 2Ω, $2\Omega'$, ... liées par une équation où tous les coefficients soient nuls, sauf le premier. Celle des nouvelles périodes, $2\Omega^n$ par exemple, qui figure seule dans l'équation, sera donc nulle, et disparaîtra des formules, qui donneront 2ω, $2\omega'$, ..., $2\omega^n$ en fonction de 2Ω, $2\Omega'$, ..., $2\Omega^{n-1}$.

305. Théorème. — *Toute fonction admettant plus de deux périodes distinctes, ou deux périodes distinctes dont le rapport soit réel, admet une période de module moindre que toute quantité donnée.*

Supposons d'abord que nous ayons trois périodes distinctes

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha' + \beta' i, \qquad 2\omega'' = \alpha'' + \beta'' i.$$

Nous aurons, quels que soient les entiers m, m', m'', la période

$$2m\omega + 2m'\omega' + 2m''\omega'' = m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + (m\beta + m'\beta' + m''\beta'')i.$$

Soient M une limite supérieure des modules des quantités α, α', α'', β, β', β'', et k un entier arbitraire. Donnons à chacun des entiers m, m', m'' la suite des valeurs 0, 1, ..., k. Pour chacun de ces systèmes de valeurs, en nombre $(k+1)^3$, on aura

$$|m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha''| \leqq 3Mk,$$
$$|m\beta + m'\beta' + m''\beta''| \leqq 3Mk.$$

Soit n le plus grand entier moindre que $(k+1)^{\frac{3}{2}}$. Partageons l'intervalle de $-3Mk$ à $3Mk$ en n intervalles égaux, d'amplitude $\frac{6Mk}{n}$; chacune des deux quantités

$$m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'', \quad m\beta + m'\beta' + m''\beta''$$

tombera dans l'un ou l'autre de ces intervalles, et le nombre des hypothèses distinctes qu'on pourra faire à ce sujet sera n^2. Ce nombre étant moindre que $(k+1)^3$, il existera nécessairement deux systèmes différents m_1, m'_1, m''_1 et m_2, m'_2, m''_2, tels que $m_1\alpha + m'_1\alpha' + m''_1\alpha''$ et $m_1\beta + m'_1\beta' + m''_1\beta''$ tombent respectivement dans les mêmes intervalles que $m_2\alpha + m'_2\alpha' + m''_2\alpha''$ et $m_2\beta + m'_2\beta' + m''_2\beta''$. On aura, par suite,

$$|(m_2 - m_1)\alpha + (m'_2 - m'_1)\alpha' + (m''_2 - m''_1)\alpha''| \leqq \frac{6Mk}{n},$$

$$|(m_2 - m_1)\beta + (m'_2 - m'_1)\beta' + (m''_2 - m''_1)\beta''| \leqq \frac{6Mk}{n},$$

d'où l'on conclut l'existence d'une période

$$2\Omega = (m_2 - m_1)2\omega + (m'_2 - m'_1)2\omega' + (m''_2 - m''_1)2\omega'',$$

de module moindre que

$$\frac{6Mk}{n}\sqrt{2},$$

expression qu'on peut rendre plus petite que toute quantité donnée en prenant k assez grand, car n est d'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport à k.

306. Admettons en second lieu qu'on ait deux périodes distinctes 2ω, $2\omega'$, dont le rapport r soit réel. Il sera incommensurable, puisque les périodes sont distinctes. Posons

$$1 = qr + r_1, \qquad r = q_1 r_1 + r_2, \qquad \ldots,$$

$q, q_1, \ldots$ étant des entiers, et $r_1, r_2, \ldots$ une suite illimitée de restes dont chacun soit au plus égal en valeur absolue à

la moitié du précédent. Multipliant ces égalités par 2ω, il viendra

$$2\omega = 2q\omega' + 2r_1\omega, \qquad 2\omega' = q_1 2r_1\omega + 2r_2\omega, \qquad \dots$$

Nous obtiendrons donc une suite de périodes $2r_1\omega$, $2r_2\omega$, ... dont les modules décroissent indéfiniment.

307. Corollaire. — *Une fonction analytique uniforme ne peut avoir plus de deux périodes distinctes, ni deux périodes distinctes dont le rapport soit réel, à moins de se réduire à une constante.*

Car les points pour lesquels la fonction reprend la même valeur étant isolés (t. I, nº 339), il ne peut y avoir de période infiniment petite.

Dans l'étude que nous allons faire des fonctions à plusieurs périodes, nous supposerons toujours qu'il s'agisse de fonctions analytiques uniformes, et même méromorphes. Elles auront donc deux périodes

$$2\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad 2\omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 i,$$

dont le rapport

$$\tau = \frac{\alpha_2 + \beta_2 i}{\alpha_1 + \beta_1 i} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} i$$

sera un nombre complexe. Sa partie imaginaire aura le signe du déterminant $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

308. Avant de procéder à cette étude, il nous faut établir quelques propositions relatives aux substitutions linéaires. On donne ce nom à l'opération qui consiste à remplacer $2\omega_1$, $2\omega_2$ par de nouvelles quantités

$$2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

Cette opération S se représente par la notation

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $ad - bc = D$ se nomme le *déterminant de la substitution*. On doit le supposer différent de zéro.

Le rapport τ' des nouvelles périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ sera donné par la formule

$$\begin{aligned}\tau' &= \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\\ &= \frac{(a\alpha_1+b\alpha_2)(c\alpha_1+d\alpha_2)+(a\beta_1+b\beta_2)(c\beta_1+d\beta_2)+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathrm{D}i}{(a\alpha_1+b\alpha_2)^2+(a\beta_1+b\beta_2)^2}\end{aligned}$$

Sa partie imaginaire a le même signe que dans τ, ou le signe contraire, suivant que D est positif ou négatif.

On peut passer réciproquement de $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ à $2\omega_1$, $2\omega_2$ par la substitution inverse

$$2\omega_1 = \frac{2d\omega'_1 - 2b\omega'_2}{\mathrm{D}}, \qquad 2\omega_2 = \frac{-2c\omega'_1 + 2a\omega'_2}{\mathrm{D}}$$

de déterminant $\frac{1}{\mathrm{D}}$.

Si a, b, c, d sont entiers et $\mathrm{D} = \pm 1$, la substitution inverse aura aussi ses coefficients entiers, et les deux formules

$$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2, \qquad 2m'_1\omega'_1 + 2m'_2\omega'_2$$

(m_1, m_2, m'_1, m'_2 entiers) représenteront la même suite de quantités. On dira dans ce cas que les deux systèmes de périodes ($2\omega_1$, $2\omega_2$) et ($2\omega'_1$, $2\omega'_2$) sont *équivalents*. L'équivalence sera *propre* ou *impropre*, suivant que D sera égal à $+1$ ou à -1.

Soient $2\omega''_1$, $2\omega''_2$ un troisième système de périodes liées à $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ par les relations

$$2\omega''_1 = 2a'\omega'_1 + 2b'\omega'_2, \qquad 2\omega''_2 = 2c'\omega'_1 + 2d'\omega'_2.$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned}2\omega''_1 &= 2(aa'+cb')\omega_1 + 2(ba'+db')\omega_2,\\ 2\omega''_2 &= 2(ac'+cd')\omega_1 + 2(bc'+dd')\omega_2.\end{aligned}$$

Les deux substitutions

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{S}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

auront donc pour résultante la substitution

$$\begin{pmatrix} aa'+cb', & ba'+db' \\ ac'+cd', & bc'+dd' \end{pmatrix},$$

que nous représenterons par SS'.

En général, SS' et S'S représenteront d'après cela des substitutions différentes ; mais on aura

$$SS'S'' = S(S'S'').$$

Nous désignerons naturellement par S^2, S^3, ... les substitutions SS, SSS, ... ; par S^{-1} la substitution inverse de S ; enfin par 1 la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui laisse les périodes inaltérées.

Dorénavant, nous ne considérerons plus que des substitutions à coefficients entiers.

309. Nous donnerons le nom de *substitutions élémentaires* aux suivantes :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

m, n étant entiers et positifs. $A_2 A_1 A_2^{-1} = A_1 A_2^{-1} A_1^{-1}$

On joint souvent à cette liste la substitution

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci s'exprime au moyen des précédentes par la formule

$$B = A_2^{-1} A_1 A_2^{-1}.$$

On a réciproquement

$$A_1 = B A_2^{-1} B^{-1}.$$

Théorème. — *Toute substitution* S *à coefficients entiers est un produit de substitutions élémentaires.*

Il suffit d'établir ce théorème pour les substitutions

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dont le déterminant D est positif. Car si D était négatif, on aurait immédiatement

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = LS',$$

S' ayant pour déterminant $-$ D, qui sera positif.

On peut supposer en outre que a, b, c, d aient pour plus grand commun diviseur l'unité. Car, si m est leur plus grand commun diviseur, soit

$$a = ma', \qquad b = mb', \qquad c = mc', \qquad d = md',$$

on aura

$$S = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = MS',$$

S' étant une substitution de déterminant $\frac{D}{m^2}$, dont les coefficients n'ont plus de diviseur commun.

Supposons donc $D > 0$, et a, b, c, d sans diviseur commun; on aura

$$(2) \quad \begin{cases} S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b - a\lambda \\ c & d - c\lambda \end{pmatrix} = A_1^\lambda S_1, \\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - b\lambda & b \\ c - d\lambda & d \end{pmatrix} = A_2^\lambda S_2 \end{cases}$$

et, d'autre part,

$$(3) \quad \begin{cases} S = \begin{pmatrix} a - c\lambda & b - d\lambda \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_3 A_1^\lambda, \\ S = \begin{pmatrix} a & b \\ c - a\lambda & d - b\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = S_4 A_2^\lambda, \end{cases}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 étant des substitutions de même déterminant que S et dont les coefficients n'ont pas de diviseur commun.

Posons, d'après cela (si c n'est pas nul),

$$\begin{array}{ll} d = c\lambda_1 + d_1, & 0 < d_1 \overline{\overline{<}} |c|, \\ c = d_1\mu_1 + c_1, & 0 \overline{\overline{<}} c_1 < d_1, \\ d_1 = c_1\lambda_2 + d_2, & 0 < d_2 \overline{\overline{<}} c_1, \\ c_1 = d_2\mu_2 + c_2, & 0 \overline{\overline{<}} c_2 < d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On aura finalement

$$d_k = d', \qquad c_k = 0,$$

d' désignant le plus grand commun diviseur de c, d; et, d'après les formules (2),

$$S = TS',$$

$T = A_1^{\lambda_1} A_2^{\mu_1} \ldots A_1^{\lambda_k} A_2^{\mu_k}$ étant un produit de substitutions élémentaires, et S' une substitution de même déterminant que S, dont les coefficients n'ont pas de diviseur commun, mais de la forme plus simple

$$S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Si b' n'est pas divisible par d', posons de même

$$\begin{array}{ll} d' = b'\lambda'_1 + d'_1, & 0 < d'_1 \overline{\overline{<}} |b'|, \\ b' = d'_1\mu'_1 + b'_1, & 0 \overline{\overline{<}} b'_1 < d'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On aura, d'après les formules (3),

$$S' = S''T',$$

$T' = \ldots A_1^{\mu'_1} A_2^{\lambda'_1}$ étant un produit de substitutions élémentaires, et S'' une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} a'' & 0 \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

où d'', étant égal au plus grand commun diviseur de b', d', sera $< d'$.

Si c'' n'est pas divisible par d'', on aura de même

$$S'' = T''S''',$$

T'' étant un produit de puissances de A_1, A_2, et S''' une substitution de la forme

$$S''' = \begin{pmatrix} a''' & b''' \\ 0 & d''' \end{pmatrix},$$

où $d''' < d''$.

En continuant ces opérations, on arrivera nécessairement à une substitution réduite

$$S^i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

où l'un des coefficients β, γ, par exemple γ, sera nul, l'autre étant divisible par δ. Les coefficients n'ayant pas de diviseur commun, α sera premier à δ.

Cela posé, on aura

$$S^i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

et comme $\beta - \alpha$ et δ ont pour plus grand commun diviseur l'unité

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \Sigma\Theta,$$

Θ étant un produit de puissances de A_1, A_2 et Σ une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & 1 \end{pmatrix} = A_2^{\gamma'} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs la substitution réduite $\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, à laquelle nous arrivons, doit avoir le déterminant D; donc $\alpha' = D$.

Nous voyons donc que toute substitution S de déterminant D, et dont les coefficients n'ont pas de facteur commun, peut être mise sous la forme

$$S = T_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_2,$$

T_1 et T_2 étant des produits de puissances (positives ou négatives) des deux substitutions élémentaires A_1, A_2.

310. Soient

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix};$$

et considérons deux systèmes de périodes, $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, liées par les relations

$$(4) \qquad 2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

Posons

$$2\Omega_1 = 2a_1\omega_1 + 2b_1\omega_2, \qquad 2\Omega_2 = 2c_1\omega_1 + 2d_1\omega_2,$$
$$2\Omega'_1 = 2D\Omega_1, \qquad 2\Omega'_2 = 2\Omega_2;$$

nous aurons

$$2\omega'_1 = 2a_2\Omega'_1 + 2b_2\Omega'_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c_2\Omega'_1 + 2d_2\Omega'_2.$$

Les substitutions T_1, T_2 ayant l'unité pour déterminant, $2\Omega_1$, $2\Omega_2$ seront proprement équivalentes à $2\omega_1$, $2\omega_2$, et $2\Omega'_1$, $2\Omega'_2$ le seront à $2\omega'_1$, $2\omega'_2$. Grâce à ce remplacement des périodes initiales par d'autres équivalentes, la relation (4) qui existait entre celles-ci a pris la forme plus simple

$$2\Omega'_1 = 2D\Omega_1, \qquad 2\Omega'_2 = 2\Omega_2.$$

311. On obtiendrait une réduction analogue, quoique moins complète, en conservant les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ et remplaçant seulement $2\omega_1$, $2\omega_2$ par d'autres périodes équivalentes. Nous avons vu, en effet, au début de la démonstration précédente, qu'on a

$$S = TS',$$

S' étant de la forme

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Si, au lieu d'appliquer l'algorithme du plus grand diviseur aux coefficients d, c, ainsi que nous l'avons fait, nous avions opéré sur a, b, nous aurions pu faire disparaître le second coefficient au lieu du troisième et mettre S sous la forme TS', où

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Cette substitution ayant le déterminant D, nous aurons

$$\alpha\delta = D.$$

En outre, α, β, γ n'ont pas de facteur commun. Enfin, comme nous avons

$$S' = A_2^{\lambda}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma - \delta\lambda & \delta \end{pmatrix}$$

et que le facteur A_2^{λ} peut être fondu dans T, nous pouvons disposer de λ de manière à obtenir une substitution réduite où γ soit l'un des nombres de la suite $0, 1, \ldots, \delta - 1$ (ou, si on le préfère, un nombre choisi à volonté parmi ceux qui lui sont congrus suivant le module δ).

Soit encore ici

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix};$$

posons

$$2\Omega_1 = 2a_1\omega_1 + 2b_1\omega_2, \qquad 2\Omega_2 = 2c_1\omega_1 + 2d_1\omega_2.$$

La relation entre les périodes $2\Omega_1$, $2\Omega_2$ et $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ deviendra

$$2\omega'_1 = 2\alpha\Omega_1, \qquad 2\omega'_2 = 2\gamma\Omega_1 + 2\delta\Omega_2, \qquad (\alpha\delta = D),$$

ou

$$2D\Omega_1 = 2\delta\omega'_1, \qquad 2D\Omega_2 = -2\gamma\omega'_1 + 2\alpha\omega'_2.$$

312. Il importe de déterminer le nombre des systèmes de valeurs différents que peuvent prendre les nombres α, γ, δ d'après les conditions ci-dessus :

$$\alpha\delta = D, \qquad 0 \leqq \gamma < \delta;$$

α, γ, δ sans facteur commun.

Pour cela, décomposons D en facteurs premiers. Soit $D = p^n p'^{n'} \ldots$. On devra prendre pour δ un diviseur de D, tel que $p^m p'^{m'} \ldots$, et pour α le facteur complémentaire $p^{n-m} p'^{n'-m'} \ldots$.

On sait que chaque nombre de la suite $0, 1, \ldots, p^m p'^{m'} \ldots - 1$ est déterminé sans ambiguïté par les restes r, r', $\ldots$, qu'on

obtient en le divisant par p^m, par $p'^{m'}$, etc. Mais ce nombre ne pourra être pris pour γ que s'il n'a pas de facteur commun avec δ et α. Pour cela, il faut et il suffit :

1° Que p^m, p^{n-m}, r ne soient pas tous divisibles par p;

2° Que $p'^{m'}$, $p'^{n'-m'}$, r' ne soient pas tous divisibles par p', etc.

Si donc nous désignons par $\varphi(p^n)$ le nombre de systèmes de valeurs de m et de r, telles que l'on ait

$$0 \overline{\gtrless} m \overline{\gtrless} n, \qquad 0 \overline{\gtrless} r < p^m$$

(p^m, p^{n-m}, r sans diviseur commun), le nombre N des solutions cherchées sera

$$\varphi(p^n)\,\varphi(p'^{n'})\ldots.$$

Or si $m = n$, r pourra prendre toutes les valeurs de 0 à $p^n - 1$, en nombre p^n. Si $0 < m < n$, il ne pourra prendre que les $p^m - p^{m-1}$ valeurs moindres que p^m et non divisibles par p. Enfin, si $m = 0$, il ne peut prendre que la valeur 0. Donc

$$\varphi(p^n) = p^n + \sum_1^{n-1}(p^m - p^{m-1}) + 1 = p^n + p^{n-1} = p^n\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

et

$$N = p^n\left(1 + \frac{1}{p}\right)p'^{n'}\left(1 + \frac{1}{p'}\right)\cdots = D\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p'}\right)\cdots.$$

313. Les substitutions

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de déterminant 1 peuvent être réparties en six classes distinctes, suivant que leurs divers coefficients sont pairs ou impairs. Il résulte, en effet, de la condition $ad - bc = 1$: 1° que l'un au moins des coefficients est pair; 2° que deux coefficients situés sur la même ligne ou la même colonne ne peuvent être pairs à la fois. Les seules hypothèses admissibles

sont donc les suivantes :

I.	a, d	impairs;	b, c	pairs;
II.	a, c, d	»	b	pair;
III.	a, b, c	»	d	»
IV.	a, b, d	»	c	»
V.	b, c, d	»	a	»
VI.	b, c	»	a, d	pairs.

On a

$$S = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_1 A_1;$$

et, suivant que S appartient à la classe I, II, III, IV, V ou VI, S_1 appartiendra à la classe IV, V, VI, I, II, III.

On a de même

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} A_2 = S_2 A_2,$$

S_2 appartenant à la classe II, I, IV, III, VI ou V.

On pourra donc, suivant la classe à laquelle appartient S, mettre cette substitution sous l'une des six formes

$$T, \quad TA_2, \quad TA_1A_2, \quad TA_1, \quad TA_2A_1, \quad TA_1A_2A_1,$$

T désignant une substitution de la première classe.

Cette substitution T résulte elle-même de la composition des substitutions

$$A_1^2, \quad A_2^2 \quad \text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit, en effet,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, d \text{ impairs} \\ b, c \text{ pairs} \end{pmatrix}.$$

La relation $ad - bc = 1$ montre qu'on a

$$ad \equiv 1 \bmod 4,$$

d'où

$$a \equiv d \equiv \pm 1 \bmod 4.$$

Supposons d'abord $a \equiv 1 \bmod 4$. On pourra déterminer

sans ambiguïté une suite d'entiers pairs 2λ, 2μ, ... par les relations

$$\begin{aligned} b &= 2\lambda a + b_1, & |b_1| &< |a|, \\ a &= 2\mu b_1 + a_1, & |a_1| &< |b_1|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons de même

$$\begin{aligned} d &= 2\lambda c + d_1, \\ c &= 2\mu d_1 + c_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les entiers b, b_1, ..., c, c_1, ... seront tous pairs, et les entiers a, a_1, ..., d, d_1, ... congrus à 1 mod 4. Comme b, b_1, ... décroissent en valeur absolue, on aura finalement une quantité $b_{k+1} = 0$; et l'on aura évidemment

$$T = A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs

$$a_k d_{k+1} = 1, \qquad a_k \equiv d_{k+1} \equiv 1 \bmod 4,$$

d'où

$$a_k = d_{k+1} = 1.$$

Enfin c_k est un nombre pair; en le représentant par $2\mu_k$, on aura

$$\begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_{k+1} \end{pmatrix} = A_2^{2\mu_k}.$$

Si $a \equiv -1 \bmod 4$, on aura

$$T = B^2 \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = B^2 T',$$

et la méthode ci-dessus permettra d'exprimer T' par un produit de puissances de A_1^2 et de A_2^2.

314. Le réseau des périodes

$$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

dérivé des deux périodes fondamentales

$$2\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad 2\omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 i,$$

peut se représenter géométriquement comme il suit :

A partir d'un point quelconque A, portons bout à bout deux droites représentant $2\omega_1$ et $2\omega_2$ en grandeur et en direction. Sur ces deux droites, construisons un parallélogramme, dit *parallélogramme des périodes*. Les diverses périodes seront représentées en grandeur et en direction par les distances du point A aux points

$$A + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Ces points sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes égaux.

Nous dirons que deux nombres a, a' sont *équivalents* si la différence $a' - a$ est une période; et nous représenterons cette relation par la notation suivante

$$a' \equiv a,$$

analogue à celle usitée en Arithmétique

$$b' \equiv b \bmod m,$$

pour exprimer que la différence de deux entiers b', b est un multiple de m et qui s'énonce, comme on sait, en disant que b, b' sont *congrus* suivant le *module m*.

L'aire du parallélogramme des périodes est

$$|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

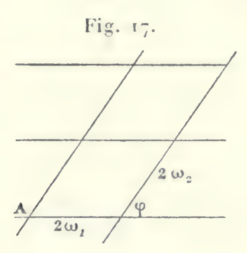
L'angle extérieur φ (*fig*. 17) représente l'argument du rapport

$$\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1}.$$

S'il est $< \pi$, la partie imaginaire de τ sera positive; sinon elle sera négative. Dans le premier cas, si l'on fait le tour du parallélogramme en s'éloignant du point A suivant la ligne $2\omega_1$, la rotation aura lieu dans le sens direct; dans le second cas, le sens sera rétrograde.

Les sommets du réseau resteront les mêmes, si l'on remplace $2\omega_1$, $2\omega_2$ par un système de périodes équivalentes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$. Il existe une infinité de semblables systèmes.

Fig. 17.



Appelons, en effet, *période primitive* toute période

$$2\omega'_1 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

où m_1, m_2 sont premiers entre eux. On pourra déterminer (d'une infinité de manières) deux nouveaux entiers n_1, n_2 premiers entre eux et satisfaisant à la relation

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

On aura ainsi une seconde période primitive

$$2\omega'_2 = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2,$$

et le couple $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ sera équivalent au couple $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Le parallélogramme formé sur $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ a pour aire

$$|(m_1 n_2 - m_2 n_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|;$$

il est donc équivalent au parallélogramme initial.

315. Par une raison de symétrie, que la suite de cette étude mettra en évidence, il convient de considérer, conjointement avec $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, une troisième période primitive $2\omega'_3$, définie par la relation

$$2\omega'_1 + 2\omega'_2 + 2\omega'_3 = 0,$$

laquelle exprime que ces trois périodes, mises bout à bout, forment un triangle fermé.

Il existe donc une infinité de triangles de périodes primi-

tives. Ils jouent tous des rôles analogues dans la théorie. Il en est un toutefois particulièrement intéressant; il peut s'obtenir comme il suit :

Prenons pour point de départ un triangle quelconque de périodes primitives, par exemple le triangle ABC formé par les périodes

$$AB = 2\omega_1, \qquad BC = 2\omega_2, \qquad CA = 2\omega_3.$$

Supposons qu'il ait un angle obtus, en B par exemple. Complétons le parallélogramme ABCD et menons sa diagonale BD; ABD sera un nouveau triangle de périodes primitives, de périmètre moindre que ABC.

Si ABD a un angle obtus, on en déduira un nouveau triangle de périmètre moindre, et ainsi de suite. Cette série d'opérations ne peut se prolonger indéfiniment, car les sommets du réseau $A + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ étant isolés, il n'en existe qu'un nombre borné dans un cercle de rayon donné décrit de A comme centre. Il n'existe donc qu'un nombre borné de périodes de module moindre que le périmètre ABC et *a fortiori* un nombre limité de triangles de périmètre moindre que ABC.

On arrivera donc nécessairement à un triangle MNP sans angle obtus. Un semblable triangle se nomme *triangle principal;* ses côtés

$$MN = 2\Omega_1, \qquad NP = 2\Omega_2, \qquad PM = 2\Omega_3$$

seront dits *périodes principales.*

Le triangle MN′P′, symétrique de MNP par rapport à l'un de ses sommets M, a pour côtés

$$-2\Omega_1, \qquad -2\Omega_2, \qquad -2\Omega_3.$$

C'est évidemment un second triangle principal.

316. Il n'en existe pas d'autre (si MNP n'est pas rectangle). Nous allons montrer, en effet, que les périodes $\pm 2\Omega_1$, $\pm 2\Omega_2$, $\pm 2\Omega_3$ sont parmi les périodes primitives, celles dont le module est minimum, ce qui les caractérise

complètement; et MNP, MN'P' sont les seuls triangles qu'on puisse construire avec ces six périodes.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que $|2\Omega_1|$ soit au plus égal à $|2\Omega_2|$ et à $|2\Omega_3|$.

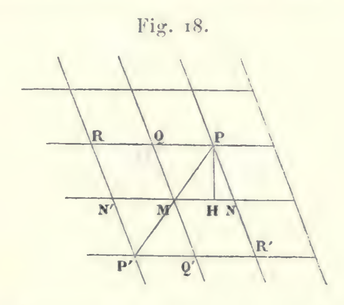
Les angles en M et en N étant aigus et au moins égaux à l'angle en P, seront au moins égaux à $\frac{\pi}{4}$. La hauteur PH du triangle, étant égale à

$$|2\Omega_2|\sin N = |2\Omega_3|\sin M,$$

sera au moins égale à $\frac{|2\Omega_2|}{\sqrt{2}}$ et à $\frac{|2\Omega_3|}{\sqrt{2}}$.

Cela posé, construisons (*fig.* 18) le réseau de parallélogrammes qui a pour sommets les points $M + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$.

Fig. 18.



Les modules des diverses périodes seront représentés par les distances de M aux sommets du réseau.

Or, parmi les sommets situés sur MN, deux seulement, N et N', correspondent à des périodes primitives, $2\Omega_1$ et $-2\Omega_1$. Quant aux sommets situés sur PQ, la perpendiculaire abaissée de M sur cette droite ayant son pied situé entre P et Q, ces deux points seront ceux qui donnent les périodes de module minimum

$$MP = -2\Omega_3 \quad \text{et} \quad MQ = 2\Omega_2.$$

Les sommets situés sur P'Q' donneront de nouvelles périodes, parmi lesquelles celles de module minimum seront

$$MP' = 2\Omega_3 \quad \text{et} \quad MQ' = -2\Omega_2.$$

Quant aux autres sommets du réseau, ils donneront des périodes dont le module est au moins égal à $2\mathrm{PH}$, quantité plus grande que $|2\Omega_2|$ et $|2\Omega_3|$, et *a fortiori* plus grande que $|2\Omega_1|$.

Notre proposition est donc établie.

Il nous reste à examiner le cas où le triangle MNP serait rectangle, en N par exemple. Dans ce cas, MQ étant perpendiculaire à PQ, la période

$$\mathrm{MR} = 2\Omega_2 - 2\Omega_1$$

et son opposée MR′ auraient le même module que MP, de sorte qu'on aurait deux nouveaux triangles principaux, MQR, MQ′R′.

317. On a souvent intérêt à choisir les périodes primitives $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, génératrices du réseau, de telle sorte que leur rapport τ' ait le coefficient s de sa partie imaginaire positif, et le plus grand possible.

Soit

$$2\omega'_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 i, \qquad 2\omega'_2 = \alpha'_2 + \beta'_2 i.$$

Ce coefficient est égal (307) à

$$\frac{\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1}{\alpha'^2_1 + \beta'^2_1} = \frac{\pm \mathrm{S}}{|2\Omega_1|^2},$$

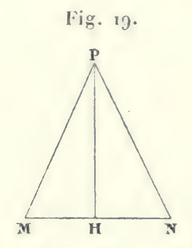
S désignant l'aire du parallélogramme $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$. Cette aire étant indépendante du choix des périodes fondamentales (314), on voit qu'on devra prendre pour $2\omega'_1$ la période de module minimum ; nous avons vu le moyen de la déterminer, connaissant les périodes initiales $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Il existe une infinité de périodes qui, associées à $2\omega'_1$, forment un système équivalent à $(2\omega_1, 2\omega_2)$; elles sont deux à deux égales et de signe contraire. On pourra prendre celle d'entre elles que l'on voudra pour $2\omega'_2$, en choisissant son signe de telle sorte que s soit positif.

Prenons, par exemple, pour $2\omega'_2$, la seconde période NP

du triangle principal MNP (*fig.* 19). L'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}$S; d'ailleurs, MN étant son plus petit côté, P sera

Fig. 19.



son plus petit angle; l'un au moins des angles M, N, par exemple N, sera au moins égal à $\frac{\pi}{3}$. On aura donc

$$s = \frac{S}{\overline{MN}^2} = \frac{PH}{MN} = \frac{PN}{MN} \sin N \underset{>}{=} \sin \frac{\pi}{3}.$$

II. — Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques.

318. Nous appellerons, pour abréger, *fonctions elliptiques,* les fonctions méromorphes à deux périodes.

Théorème. — *Une fonction elliptique entière se réduit nécessairement à une constante.*

Car son module reste borné dans un parallélogramme des périodes, et, à cause de la périodicité, dans tout le plan.

Théorème. — *La somme des résidus d'une fonction elliptique $f(u)$ par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle.*

Car cette somme est égale à l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du$, prise dans le sens direct autour du parallélogramme. Or cette intégrale est nulle, car deux éléments correspondants pris sur deux côtés opposés sont égaux et de signe contraire.

On nomme *ordre* de la fonction $f(u)$ le nombre des pôles

qu'elle possède dans le parallélogramme, comptés chacun avec son degré de multiplicité.

Cet ordre est au moins égal à 2; car si l'on n'avait qu'un pôle simple, le résidu correspondant A étant différent de zéro, la somme des résidus ne serait pas nulle.

319. Théorème. — *Si la fonction $f(u)$ est d'ordre l : 1° l'équation $f(u) = c$, où c est une constante quelconque, admettra dans le parallélogramme l racines, égales ou inégales; 2° la somme de ces racines est équivalente à celle des pôles.*

Soient, en effet, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les pôles de $f(u)$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les racines de $f(u) - c = 0$ dans le parallélogramme.

1° On aura

$$k - l = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u) - c}\,du,$$

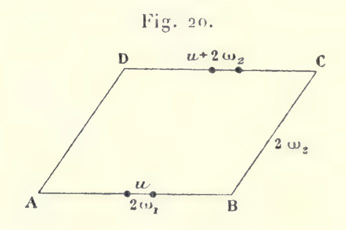
l'intégrale étant prise autour du parallélogramme; or, $\frac{f'(u)}{f(u) - c}$ étant évidemment doublement périodique comme $f(u)$, cette intégrale est nulle.

2° On a, d'autre part,

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u f'(u)}{f(u) - c}\,du.$$

Deux éléments correspondants de l'intégrale pris sur les

Fig. 20.



côtés opposés AB et CD (*fig.* 20) auront pour valeur respective

$$\frac{u f'(u)}{f(u) - c}\,du$$

et

$$(u+2\omega_2)\frac{f'(u+2\omega_2)}{f(u+2\omega_2)-c}(-du) = -(u+2\omega_2)\frac{f'(u)}{f(u)-c}du.$$

Leur somme sera

$$-2\omega_2\frac{f'(u)}{f(u)-c}du.$$

La somme des intégrales suivant les côtés AB et CD sera donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{A}^{A+2\omega_1}\left[-2\omega_2\frac{f'(u)}{f(u)-c}du\right] = \frac{-2\omega_2}{2\pi i}\Big[\log(f(u)-c)\Big]_{A}^{A+2\omega_1}.$$

Or $f(u)-c$ reprend la même valeur aux deux limites. L'accroissement de son logarithme ne peut donc être qu'un multiple de $2\pi i$, tel que $-2m_2\pi i$. La somme des deux intégrales sera donc $2m_2\omega_2$.

De même, la somme des intégrales suivant BC et DA sera de la forme $2m_1\omega_1$. On aura donc

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

320. Théorème. — 1° *Si deux fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$ aux mêmes périodes ont les mêmes pôles dans le parallélogramme, et si la partie infinie de leur développement aux environs de chacun d'eux est la même, leur différence est une constante;*

2° *Si deux fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$, aux mêmes périodes, ont les mêmes zéros et les mêmes pôles dans le parallélogramme (avec la même multiplicité), leur rapport est une constante.*

Car $f(u)-\varphi(u)$ dans le premier cas, $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ dans le second, sera une fonction elliptique entière. C'est donc une constante.

321. Théorème. — *Pour que deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $\varphi(u)$, admettant respectivement les périodes* $2\omega_1$,

$2\omega_2$ *et* $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, *soient liées par une équation algébrique, il faut et il suffit que les quatre périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ *se réduisent à deux périodes distinctes.*

Supposons, en effet, qu'on ait la relation algébrique

$$o = F(f, \varphi) = Af^\lambda + A_1 f^{\lambda-1} + \ldots + A_\lambda,$$

$A, A_1, \ldots$ étant des polynômes en φ. Changeons dans cette identité u en $u + 2m'_1\omega'_1$, m'_1 étant un entier. Ce changement n'altérant pas φ, il viendra

$$o = Af^\lambda(u + 2m'_1\omega'_1) + A_1 f^{\lambda-1}(u + 2m'_1\omega'_1) + \ldots.$$

D'ailleurs, f ne change pas si l'on augmente u de $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Posant donc

$$2m'_1\omega'_1 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 = \delta,$$

nous aurons

$$o = Af^\lambda(u+\delta) + A_1 f^{\lambda-1}(u+\delta) + \ldots = F[f(u+\delta), \varphi u]$$
$$= F + f'\frac{\partial F}{\partial f}\delta + \left(f'^2\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} + f''\frac{\partial F}{\partial f}\right)\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots.$$

Si les trois périodes $2\omega'_1$, $2\omega_1$, $2\omega_2$ étaient distinctes, on pourrait choisir les entiers m_1, m_2, m'_1 de telle sorte que δ devînt plus petit que toute quantité donnée. Les coefficients de chaque puissance de δ seront donc nuls séparément; on en déduit

$$F = o, \quad \frac{\partial F}{\partial f} = o, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = o, \quad \ldots,$$

d'où

$$A = A_1 = \ldots = o.$$

Donc $\varphi(u)$, satisfaisant à des équations algébriques à coefficients constants, se réduirait à une constante.

On a donc nécessairement entre les périodes une relation de la forme

$$(1) \qquad 2m'_1\omega'_1 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 = o.$$

On démontrera de même l'existence d'une autre relation

$$(2) \qquad 2n'_2\omega'_2 + 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2 = o.$$

Les quatre périodes données se réduiront donc à des fonctions linéaires de deux périodes distinctes.

322. Réciproquement, supposons l'existence de deux relations telles que (1) et (2); les deux fonctions f et φ seront liées par une équation algébrique. En effet, elles admettent un couple de périodes communes

$$2\Omega_1 = -2m'_1\omega'_1 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$
$$2\Omega_2 = -2n'_2\omega'_2 = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2.$$

Sur ces deux périodes, formons un parallélogramme et soient respectivement μ, ν le nombre des pôles de f et de φ qui s'y trouvent contenus. A chaque valeur particulière f_0 donnée à f correspondent μ classes de valeurs de u, de la forme

$$u_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2, \quad \ldots, \quad u_\mu + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2,$$

et à chacune de ces classes une seule valeur de φ. Ainsi, à chaque valeur de f répondent μ valeurs de φ, et de même, à chaque valeur de φ, ν valeurs de f.

D'ailleurs, φ considéré comme fonction de f n'a que des points critiques algébriques. Soient, en effet, f_0, u_0, φ_0 trois valeurs correspondantes de f, u, φ. Aux environs de la valeur $u = u_0$, les fonctions méromorphes f et φ admettront des développements de la forme

$$f - f_0 = M(u-u_0)^\alpha + M_1(u-u_0)^{\alpha+1} + \ldots,$$
$$\varphi - \varphi_0 = N(u-u_0)^\beta + N_1(u-u_0)^{\beta+1} + \ldots,$$

α et β étant des entiers positifs (si f_0, φ_0 sont finis. Dans le cas contraire, on aurait des développements analogues pour $\frac{1}{f}$ ou $\frac{1}{\varphi}$ et la conséquence serait la même).

La première équation, résolue par rapport à $u - u_0$, donnera son expression par une série de puissances fractionnaires de $f - f_0$. En la substituant dans la seconde équation, on obtiendra une expression analogue pour $\varphi - \varphi_0$.

Donc f et φ seront liées par une équation algébrique (302). Celle-ci sera en général de degré μ par rapport à φ, et de degré ν par rapport à f. Ce degré peut toutefois s'abaisser dans certains cas particuliers. Supposons, par exemple, que f et φ soient des fonctions paires de u. Les diverses classes de valeurs de f qui correspondent à une même valeur de u se répartissent en couples, tels que le suivant

$$u_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2, \qquad -u_1 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2.$$

Or, à toutes les valeurs d'un même couple correspond une valeur unique de φ, de sorte que le degré de l'équation en φ sera réduit de moitié. Il en est évidemment de même de son degré en f.

323. Corollaire. — *Toute fonction elliptique $f(u)$ est liée à sa dérivée par une équation algébrique.*

En effet, $f'(u)$ admet évidemment les mêmes périodes que $f(u)$.

Cherchons le degré de cette équation. Soient $u_1, \ldots, u_i$ les pôles de $f(u)$ dans un parallélogramme; $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ leurs ordres de multiplicité. Aux environs de l'un d'eux, u_k, on aura un développement de la forme

$$f(u) = A(u-u_k)^{-\alpha_k} + A_1(u-u_k)^{-\alpha_k+1} + \ldots,$$

d'où

$$f'(u) = -\alpha_k A(u-u_k)^{-\alpha_k-1} + \ldots.$$

Le nombre des classes de valeurs de u qui correspondent à une même valeur de f sera égal à $\Sigma\alpha_k$, et le nombre de celles qui correspondent à une même valeur de f' sera

$$\Sigma(\alpha_k + 1) = \Sigma\alpha_k + i.$$

L'équation sera donc du degré $\Sigma\alpha_k$ en f' et du degré $\Sigma\alpha_k + i$ en f.

324. Nous venons d'établir quelques propriétés générales

les fonctions elliptiques; mais il reste à prouver l'existence effective de semblables fonctions et à les construire. Ce sera l'objet de la Section suivante.

III. — Les fonctions pu, ζu, σu.

325. Posons

$$(1) \qquad \sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

$$(2) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$(3) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

sommes et produit s'étendant à toutes les valeurs de w qui sont de la forme $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ (le système $m_1 = m_2 = 0$ excepté, ce que rappellera l'accent dont les symboles $\prod$ et $\sum$ ont été affectés).

Ces expressions sont absolument et uniformément convergentes dans tout domaine borné R qui ne contient aucun sommet du réseau des périodes. En effet, le terme général de pu, par exemple, peut s'écrire

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2uw - u^2}{w^2(u-w)^2} = \frac{A}{w^3},$$

A tendant pour $w = \infty$ vers la limite $2u$, dont le module reste borné dans R. Or on a vu que la série $\sum \frac{1}{w^3}$ est absolument convergente (t. I, n° 319).

La même démonstration s'applique aux séries ζu et $\log \sigma u$.

On a évidemment

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{du} \log \sigma u = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u, \\ \zeta' u = -pu, \\ p' u = -\dfrac{2}{u^3} - \sum{}' \dfrac{2}{(u-w)^3} = -2 \sum \dfrac{1}{(u-w)^3}. \end{cases}$$

Considérées comme fonctions des trois variables u, $2\omega_1$, $2\omega_2$, les fonctions σ, ζ, p sont homogènes, de degré 1, -1, -2 respectivement.

Considérées comme fonctions de $2\omega_1$, $2\omega_2$ seulement, elles restent invariables par toute transformation linéaire de déterminant ± 1. Car ce changement n'altère pas le réseau des périodes w.

Considérées comme fonctions de u seul, pu est une fonction paire, ζu et σu des fonctions impaires. Car les valeurs de w étant deux à deux égales et de signe contraire, on peut changer w en $-w$ dans les sommations. Si l'on change simultanément u en $-u$, pu reprend sa forme primitive, tandis que ζu et σu changent de signe.

326. Les pôles de pu sont les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ils sont doubles. Aux environs de $u = 0$ on a

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \dots.$$

Faisons la sommation, remarquons que les puissances impaires de u doivent se détruire; enfin, posons, pour abréger,

$$(5) \qquad c_1 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad c_2 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}, \qquad \dots;$$

nous obtiendrons le développement

$$(6) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots.$$

La fonction ζu a pour pôles les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces pôles sont simples et les résidus correspondants sont égaux à 1.

Comme ζu a pour dérivée $-pu$ et que $\zeta u - \frac{1}{u}$ s'annule pour $u = 0$, l'intégration de l'équation (6) donnera

$$(7) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - c_1 \frac{u^3}{3} - c_2 \frac{u^5}{5} - \dots.$$

Intégrant de nouveau et remarquant que, pour $u = 0$, $\log \sigma u - \log u$ s'annule, il vient

$$(8) \quad \begin{cases} \log \sigma u = \log u - c_1 \dfrac{u^4}{3.4} - c_2 \dfrac{u^6}{5.6} - \ldots, \\ \sigma u = u\, e^{-c_1 \frac{u^4}{3.4} - c_2 \frac{u^6}{5.6} - \ldots} = (1 + d_1 u^4 + d_2 u^6 + \ldots), \end{cases}$$

$d_1, d_2, \ldots$ étant des polynômes entiers en $c_1, c_2, \ldots$.

D'ailleurs, σu est une fonction entière, dont les zéros sont les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces zéros sont simples.

327. Soit

$$2\omega = 2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2$$

une période quelconque du réseau. Le changement de u en $u + 2\omega$ ne fait que permuter les uns dans les autres les termes du développement

$$p'u = -2 \sum \frac{1}{(u - w)^3}.$$

Étant absolument convergent, il restera inaltéré. Donc

$$p'(u + 2\omega) = p'u.$$

Intégrons, il viendra

$$p(u + 2\omega) = pu + C.$$

Pour déterminer la constante, posons $u = -\omega$; il viendra

$$p\omega = p(-\omega) + C = p(\omega) + C.$$

Donc C est nul, et pu sera doublement périodique, comme sa dérivée.

Comme on sait, en outre, qu'elle est paire, l'équation

$$pu = pu_0$$

admettra les racines

$$u = \pm u_0 + \text{période}.$$

Mais elle n'en admettra pas d'autre, car pu, n'ayant qu'un

pôle double dans chaque parallélogramme, ne pourra y avoir plus de deux zéros.

Intégrons l'équation

$$(9) \qquad \mathfrak{p}(u+2\omega) = \mathfrak{p}u,$$

nous trouverons

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + \mathrm{C}.$$

Posons encore $u = -\omega$, il vient

$$\zeta\omega = \zeta(-\omega) + \mathrm{C} = -\zeta\omega + \mathrm{C},$$
$$\mathrm{C} = 2\zeta\omega.$$

Posons

$$(10) \qquad \eta_1 = \zeta\omega_1, \qquad \eta_2 = \zeta\omega_2.$$

Nous aurons, en particulier,

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1,$$
$$\zeta(u+2\omega_2) = \zeta u + 2\eta_2,$$

et, plus généralement, en posant

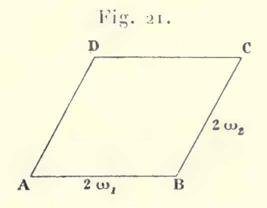
$$2\omega = 2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2,$$
$$2\eta = 2\mu_1\eta_1 + 2\mu_2\eta_2 = 2\zeta\omega,$$
$$(11) \qquad \zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta.$$

328. Les quatre constantes ω_1, ω_2, η_1, η_2 sont liées par une relation importante. Pour l'obtenir, calculons l'intégrale

$$\int \zeta u \, du$$

autour d'un parallélogramme de périodes ABCD (*fig.* 21).

Fig. 21.



Considérons deux éléments correspondants des deux inté-

grales suivant AB et CD. Ils sont respectivement égaux à

$$\zeta u\, du, \qquad -\zeta(u+2\omega_2)\, du = -[\zeta u + 2\eta_2]\, du.$$

Leur somme sera $-2\eta_2\, du$. On aura donc pour la somme des deux intégrales

$$\int_{AB} -2\eta_2\, du = -4\eta_2\omega_1.$$

Sur les côtés BC et DA, les éléments correspondants seront

$$\zeta u\, du, \qquad -\zeta(u-2\omega_1)\, du = -(\zeta u - 2\eta_1)\, du,$$

et la somme des deux intégrales sera $4\omega_2\eta_1$.

L'intégrale cherchée sera donc $4(\omega_2\eta_1 - \eta_2\omega_1)$. Mais elle est égale au produit de $2\pi i$ par la somme des résidus relatifs aux pôles contenus dans le parallélogramme, si l'on a tourné dans le sens direct (c'est-à-dire si $\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1}$ a sa partie réelle positive); au même produit changé de signe, dans le cas contraire. D'ailleurs ζu n'a dans le parallélogramme qu'un seul pôle, dont le résidu est 1.

Comparant les deux expressions obtenues, nous aurons

$$(12) \qquad \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \varepsilon\frac{\pi i}{2},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que τ a sa partie imaginaire positive ou négative.

329. Intégrons l'équation (11), il viendra

$$\log\sigma(u+2\omega) = \log\sigma u + 2\eta u + \text{const.},$$
$$\sigma(u+2\omega) = Ce^{2\eta u}\sigma u.$$

Si ω n'est pas une période (et en particulier si 2ω est une période primitive), $\sigma\omega$ n'étant pas nul, on pourra encore

déterminer la constante en posant $u = -\omega$. On trouve ainsi

$$\sigma\omega = Ce^{-2\eta\omega}\sigma(-\omega) = -Ce^{-2\eta\omega}\sigma\omega,$$

d'où

$$C = -e^{2\eta\omega}$$

et

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u.$$

Dans le cas le plus général, 2ω sera un multiple d'une période primitive $2\omega'$. Soit

$$2\omega = \lambda . 2\omega', \qquad 2\eta = \lambda . 2\eta'.$$

La formule précédente donnera

$$\begin{aligned}\sigma(u+2\omega) &= \sigma[u + (\lambda - 1)2\omega' + 2\omega') \\ &= -e^{2\eta'[u+(2\lambda-1)\omega']}\sigma[u + (\lambda - 1)2\omega'] \\ &= (-1)^{\lambda}e^{2\eta'[\lambda u+(2\lambda-1)\omega'+(2\lambda-3)\omega'+\ldots]}\sigma u \\ &= (-1)^{\lambda}e^{2\eta'(\lambda u+\lambda^2\omega')}\sigma u = (-1)^{\lambda}e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u.\end{aligned}$$

Cette formule ne diffère de la précédente que par le changement du facteur -1 en $(-1)^{\lambda}$, qui sera égal à $+1$ lorsque ω est une période.

Ces résultats peuvent se condenser dans la formule suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} \sigma(u + 2\omega) = (-1)^{\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2}e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u \\ (\omega = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2, \quad \eta = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2). \end{cases}$$

330. Cherchons l'équation algébrique qui lie $p'u$ à pu (323).

A cet effet, formons un polynôme en pu et $p'u$ qui, dans un parallélogramme donné, n'admette plus de pôles. Ce sera une fonction elliptique entière et, par suite, une constante. Si, de plus, il s'annule pour une valeur de u, il sera identiquement nul; ce sera donc le premier membre de l'équation cherchée.

Choisissons un parallélogramme qui contienne l'origine;

$\text{p}u$ et $\text{p}'u$ y auront un pôle unique $u = 0$, aux environs duquel on a

$$\text{p}u = \frac{1}{u^2} + 3\sum{}' \frac{1}{w^4} u^2 + 5\sum{}' \frac{1}{w^6} u^4 + \ldots,$$

$$\text{p}'u = \frac{-2}{u^3} + 6\sum{}' \frac{1}{w^4} u + 20\sum{}' \frac{1}{w^6} u^3 + \ldots,$$

$$\text{p}'^2u = \frac{4}{u^6} - 24\sum{}' \frac{1}{w^4} \frac{1}{u^2} - 80\sum{}' \frac{1}{w^6} + \ldots,$$

$$\text{p}^3u = \frac{1}{u^6} + 9\sum{}' \frac{1}{w^4} \frac{1}{u^2} + 15\sum{}' \frac{1}{w^6} + \ldots,$$

$$\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u = \quad -60\sum{}' \frac{1}{w^4} \frac{1}{u^2} - 140\sum{}' \frac{1}{w^6} + \ldots.$$

Posant donc, pour abréger,

$$(14) \qquad g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{w^6},$$

le polynôme $\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u + g_2\text{p}u + g_3$, non seulement n'aura plus de pôle, mais s'annulera pour $u = 0$. L'équation cherchée est donc

$$(15) \qquad \text{p}'^2 = 4\text{p}^3 - g_2\text{p} - g_3.$$

331. Dérivons cette équation et supprimons le facteur commun $2\text{p}'$. Il viendra

$$(16) \qquad \text{p}'' = 6\text{p}^2 - \tfrac{1}{2}g_2.$$

Substituons dans cette équation le développement

$$\text{p}u = \frac{1}{u^2} + c_1u^2 + c_2u^4 + \ldots.$$

L'identification des termes en u^{2n-2} donnera

$$2n(2n-1)c_n = 6(c_n + c_1c_{n-2} + \ldots + c_{n-2}c_1 + c_n),$$

d'où

$$(17) \qquad c_n = \frac{6}{2n(2n-1)-12}(c_1c_{n-2} + \ldots + c_{n-2}c_1).$$

Cette formule récurrente permet d'exprimer c_3, c_4, ... par des polynômes entiers en c_1, c_2. Mais

$$(18) \quad c_1 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4} = \frac{1}{20} g_2, \qquad c_2 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6} = \frac{1}{28} g_3.$$

Tous les coefficients c_1, c_2, c_3, ... sont donc des polynômes entiers en g_2, g_3. De même pour les coefficients d_1, d_2, ... du développement (8) de σu.

Les quantités g_2, g_3 sont, d'après leur définition, homogènes d'ordre -4 et -6 en ω_1, ω_2. D'autre part, pu, σu sont homogènes d'ordre -2 et 1 en u, ω_1, ω_2. D'après cela, le polynôme c_n ne devra contenir que des termes $M g_2^\lambda g_3^\mu$, où les exposants satisfassent à la condition

$$-4\lambda - 6\mu + 2n = -2.$$

On aura, par suite,

$$c_3 = \alpha g_2^2, \qquad c_4 = \beta g_2 g_3, \qquad c_5 = \gamma g_2^3 + \delta g_3^2, \qquad \ldots,$$

α, β, γ, δ, ... étant numériques.

La même observation s'applique aux polynômes d_n.

332. Prenons les dérivées successives de l'équation (16), en remplaçant, à mesure qu'elles s'introduisent, les quantités p'^2 et p'' par leurs valeurs en p; on trouvera

$$(19) \quad \begin{cases} p'' = 6p^2 - \frac{1}{2} g_2, \\ p''' = 12 pp', \\ p^{\text{IV}} = 12(p'^2 + pp'') = 12(10p^3 - \frac{3}{2} g_2 p - g_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et, généralement,

$$(20) \qquad p^{(2n)} = P_{n+1}, \qquad p^{(2n+1)} = Q_n p',$$

P_{n+1} et Q_n étant des polynômes entiers en pu, dont le degré est marqué par leur indice, et dont les coefficients sont des polynômes en g_2 et g_3, le premier étant purement numérique.

Soit

$$\mathrm{A}\wp^m + \mathrm{A}_1\wp^{m-1} + \ldots$$

un de ces polynômes. Il doit être homogène de degré $-2m$ en u, ω_1, ω_2; ses coefficients auront donc la forme

$$\mathrm{A}_1 = 0, \qquad \mathrm{A}_2 = a g_2, \qquad \mathrm{A}_3 = b g_3, \qquad \mathrm{A}_4 = c g_2^2,$$
$$\mathrm{A}_5 = d g_2 g_3, \qquad \mathrm{A}_6 = e g_2^3 + f g_3^2, \qquad \ldots,$$

a, b, ..., f étant numériques.

Les équations (19), (20) résolues par rapport à $\wp^2$, $\wp\wp'$, $\wp^3$, ... donneront réciproquement

$$(21) \qquad \begin{cases} \wp^2 = \frac{1}{6}\wp'' + \frac{1}{12}g_2, \qquad \wp\wp' = \frac{1}{12}\wp''', \\ \wp^3 = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{\wp^{\mathrm{IV}}}{12} + \dfrac{3}{2}g_2\wp + g_3\right), \qquad \ldots \end{cases}$$

et, généralement,

$$(22) \qquad \begin{cases} \wp^n = \mathrm{B}\wp^{(2n-2)} + \mathrm{B}_1\wp^{(2n-4)} + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}\wp + \mathrm{B}_n, \\ \wp^n\wp' = \mathrm{C}\wp^{(2n+1)} + \mathrm{C}_1\wp^{(2n-1)} + \ldots + \mathrm{C}_n\wp', \end{cases}$$

où B, C sont des constantes, et B_1, ..., B_n, C_1, ..., C_n des polynômes en g_2, g_3, dont l'homogénéité permettra d'écrire de suite la partie littérale. On aura en particulier $\mathrm{B}_1 = 0$, $\mathrm{C}_1 = 0$.

333. Posons

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3.$$

Ces trois quantités sont distinctes, car ni les sommes, ni les différences des quantités ω_1, ω_2, ω_3 ne sont des périodes.

Ce sont d'ailleurs les racines de l'équation du troisième degré

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0.$$

En effet, le premier membre de cette équation est égal à $\wp'^2 u$. Or $\wp' u$ étant doublement périodique et impaire, on aura

$$\wp'\omega_1 = \wp'(\omega_1 - 2\omega_1) = \wp'(-\omega_1) = -\wp'\omega_1 = 0.$$

On voit de même que $\wp'\omega_2 = 0$, $\wp'\omega_3 = 0$.

L'équation sera donc satisfaite pour $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$, d'où $pu = e_1, e_2, e_3$.

Les quantités e_1, e_2, e_3 sont, d'après leur définition, homogènes de degré -2; elles satisfont aux relations

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$
$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\tfrac{1}{4} g_2,$$
$$e_1 e_2 e_3 = \tfrac{1}{4} g_3.$$

Les constantes g_2, g_3 se nomment les *invariants* du réseau $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$; elles ne dépendent pas, en effet, du choix des périodes fondamentales.

Nous aurons à considérer deux autres invariants :

1° Le discriminant

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Il est d'ordre -12 en ω_1, ω_2. Nous avons vu qu'il est toujours différent de zéro.

2° L'*invariant absolu*

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Il est d'ordre zéro, et, par suite, ne dépend que du rapport τ des périodes. Il reste invariable si l'on change τ en $\frac{n_1 + n_2\tau}{m_1 + m_2\tau}$, ce qui revient à changer le système des périodes fondamentales.

334. Jusqu'à présent, prenant pour point de départ deux périodes $2\omega_1, 2\omega_2$, dont le rapport ne soit pas réel, nous avons défini pu, g_2, g_3 et établi les relations

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \gtrless 0,$$
$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

Suivons maintenant la marche inverse. Donnons-nous *a priori* deux constantes g_2, g_3 satisfaisant à l'inégalité $\Delta \gtrless 0$.

Nous étudierons l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3;$$

nous montrerons qu'elle admet comme solution une fonction pu, dont nous déterminerons les périodes en fonction de g_2, g_3.

L'équation

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

a trois racines inégales e_1, e_2, e_3. Pour fixer les idées, nous les supposerons numérotées dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour du triangle $e_1 e_2 e_3$.

Soit z_0 un point quelconque différent de e_1, e_2, e_3. Il conviendra, pour plus de symétrie, de le supposer situé à l'intérieur du triangle $e_1 e_2 e_3$. En ce point, le radical $\sqrt{Z}$ aura deux valeurs égales et opposées; nous désignerons par $\sqrt{Z_0}$ l'une d'elles, choisie à volonté; l'autre sera $-\sqrt{Z_0}$.

Soit enfin u_0 une constante choisie à volonté.

D'après une proposition fondamentale que nous établirons dans la théorie des équations différentielles, il existe une fonction analytique z de la variable u qui satisfait à l'équation différentielle, et qui, pour la valeur initiale $u = u_0$, se réduit à z_0, le radical $\sqrt{Z}$ prenant en même temps la détermination $\sqrt{Z_0}$. En suivant de proche en proche la variation de cette fonction, on ne pourra rencontrer de point critique que lorsqu'elle deviendra infinie ou prendra l'une des valeurs e_1, e_2, e_3 qui sont critiques pour $\sqrt{Z}$, considéré comme fonction de z.

335. 1° Supposons que, pour une certaine valeur de u, telle que u_1, z devienne égal à l'une des racines e_1, e_2, e_3, par exemple à e_1. Le point u_1 ne sera pas critique. Posons, en effet, $z = e_1 + t^2$; l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{Z} = \sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$$

sera transformée en

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)}.$$

La valeur $t = 0$ n'étant pas un point critique pour le nouveau radical, $u = u_1$ sera un point ordinaire pour la fonction t et aussi pour $z = e_1 + t^2$.

2° Supposons maintenant que, pour $u = u_1$, z devienne infini. Ce point sera un pôle. Posons, en effet, $z = \frac{1}{t^2}$. L'équation différentielle deviendra

$$\frac{-2\,dt}{t^3\,du} = \frac{1}{t^3}\sqrt{4 - g_2 t^4 - g_3 t^6}$$

ou

$$du = \pm\left(1 - \frac{g_2 t^4 + g_3 t^6}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \pm(1 + \alpha_2 t^4 + \alpha_3 t^6 + \ldots)\,dt.$$

Intégrons à partir des valeurs initiales simultanées $t = 0$, $u = u_1$, il viendra

$$u - u_1 = \pm t\left(1 + \frac{\alpha_2}{5} t^4 + \ldots\right),$$

et, en résolvant par rapport à t,

$$t = \pm(u - u_1)[1 + \beta_2(u - u_0)^4 + \ldots],$$

$$z = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{(u - u_1)^2} + \gamma_1(u - u_1)^2 + \ldots.$$

La fonction z est donc méromorphe, et, aux environs de chacun de ses pôles, tel que u_1, la partie de son développement qui ne s'annule pas se réduit à $\frac{1}{(u - u_1)^2}$.

336. Cherchons à déterminer les valeurs de u pour lesquelles z prend une valeur déterminée z'. L'équation différentielle peut s'écrire

$$du = \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

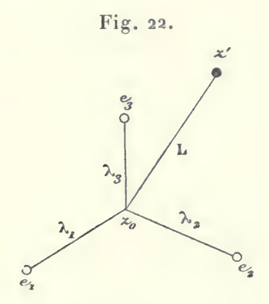
et en intégrant de z_0 à z'

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Le signe de $\sqrt{Z}$ est d'ailleurs fixé par la condition que, pour la valeur initiale $z = z_0$, il se réduit à $\sqrt{Z_0}$.

Nous avons à chercher les diverses valeurs que peut prendre cette expression lorsqu'on fait varier la ligne d'intégration suivie de z_0 à z'. A cet effet, menons une ligne déterminée L (*fig.* 22) entre z_0 et z'; joignons d'autre part z_0 aux points e_1, e_2, e_3 par des lacets L_1, L_2, L_3 respectivement formés par des lignes λ_1, λ_2, λ_3 intérieures au triangle, et par des cercles infiniment petits e_1, e_2, e_3.

Fig. 22.



On sait que tout chemin tracé de z_0 à z' est équivalent à une combinaison de lacets, suivis de la ligne L (t. I, n° 227). Deux chemins équivalents donnent d'ailleurs la même valeur à l'intégrale (t. I, n° 199).

L'intégrale suivant le lacet L_1 se compose des intégrales suivant λ_1, suivant c_1 et suivant la ligne de retour λ_1^{-1}. Celle-ci est égale à la première, car leurs éléments correspondants sont les mêmes, ne différant l'un de l'autre que par un double changement de signe, celui de du, et celui de $\sqrt{Z}$ produit par la rotation faite autour du point critique e_1. D'ailleurs, si le rayon du cercle tend vers zéro, l'intégrale suivant e_1 tendra vers zéro (256) et celle suivant λ_1 vers une limite déterminée (254) que nous désignerons par A_1.

Ce résultat est indépendant du sens dans lequel le lacet a été décrit; nous aurons donc

$$\int_{L_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int_{L_1^{-1}} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 2\int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 2A_1.$$

On doit toutefois remarquer que si l'on avait décrit, avant le lacet considéré, d'autres lacets en nombre μ, cette opération aurait multiplié $\sqrt{Z}$ par $(-1)^\mu$, de sorte que l'intégrale serait dans ce cas égale à $(-1)^\mu 2A_1$.

Les intégrales suivant les lacets L_2, L_2^{-1}, L_3, L_3^{-1} seront de même égales à

$$\pm\int_{z_0}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \pm 2A_2, \qquad \pm 2\int_{z_0}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \pm 2A_3.$$

Enfin, la valeur de l'intégrale suivant L étant désignée par I, cette valeur deviendra égale à $-$I, si L a été précédé d'un nombre impair de lacets.

Les valeurs cherchées de u sont donc données par la formule générale

$$u = u_0 + 2n_1 A_1 + 2n_2 A_2 + 2n_3 A_3 + (-1)^{n_1+n_2+n_3} I,$$

n_1, n_2, n_3 étant des entiers positifs ou négatifs, dont la somme est égale à 0 ou à 1, suivant que le nombre des lacets est pair ou impair.

337. Posons $n_1 = m_2$, $n_2 = -m_1$, et

$$(23)\quad \begin{cases} A_3 - A_2 = \displaystyle\int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1, \\ A_1 - A_3 = \displaystyle\int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_2, \\ A_2 - A_1 = \displaystyle\int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_3. \end{cases}$$

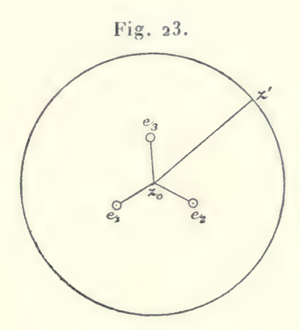
La formule ci-dessus se décomposera dans les deux suivantes

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + I + u_0,$$
$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + 2A_3 - I + u_0.$$

Donc z est une fonction elliptique d'ordre 2, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Ses pôles étant doubles, il n'y en aura qu'un dans chaque parallélogramme. Pour déterminer leur situation, concevons que le point z' s'éloigne à l'infini, et intégrons $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ le long d'un contour fermé (*fig.* 23) :

Fig. 23.



1° Par la ligne $z_0 z'$; 2° un cercle C de rayon infini passant par z', décrit dans le sens rétrograde; 3° la ligne $z' z_0$; 4° les lacets L_3, L_1, L_2. Ce contour ne renfermant pas de point critique, l'intégrale sera nulle.

L'intégrale suivant C est nulle (256). Mais, en décrivant ce cercle, qui entoure les trois points critiques, on a changé le signe de $\sqrt{Z}$. L'intégrale $\int_{z' z_0}$ sera donc égale à $\int_{z_0 z'}$; les intégrales suivant les lacets seront $-2A_3$, $+2A_1$, $-2A_2$. On aura donc

$$2\int_{z_0 z'} - 2A_3 + 2A_1 - 2A_2 = 0,$$

d'où

$$\int_{z_0 z'} = A_3 - A_1 + A_2.$$

Mais $u_0 + \int_{z_0 z'}$ est l'une des valeurs de u qui correspondent à $z = \infty$; donc $u_0 + A_3 - A_1 + A_2$ est l'un des pôles cher-

chés, et leur formule générale sera

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + u_0 + A_3 - A_1 + A_2.$$

Donnons à la constante u_0 la valeur particulière

$$-A_3 + A_1 - A_2,$$

z ne sera autre chose que la fonction pu construite sur les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, car ces deux fonctions ont les mêmes pôles, et leurs développements aux environs de chacun d'eux ont non seulement même partie infinie, mais même terme constant, à savoir zéro.

On aura d'ailleurs

$$p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3.$$

Posons, en effet, $z' = e_1$ et prenons pour L la ligne λ_1, pour laquelle $I = A_1$. La formule

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + I + u_0,$$

qui donne les valeurs correspondantes de u, deviendra

$$\begin{aligned} u &= 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 - A_3 + 2A_1 - A_2 \\ &= 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_1, \end{aligned}$$

et se réduira à ω_1 en prenant $m_1 = 0$, $m_2 = -1$.

Pour $z = e_2$, $I = A_2$, $m_1 = m_2 = 0$, on aura de même

$$u = \omega_2,$$

et pour $z = e_3$, $I = A_3$, $m_1 = m_2 = -1$, on aura

$$u = \omega_3.$$

338. Les constantes η_1, η_2, η_3 peuvent être exprimées, comme les demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3, par des intégrales définies. On a, en effet,

$$\zeta' u = -pu,$$

et, en intégrant de u à $u + 2\omega_1$,

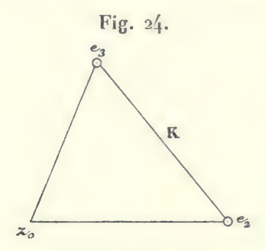
$$2\eta_1 = \zeta(u + 2\omega_1) - \zeta u = -\int_u^{u+2\omega_1} pu\,du.$$

Posons

$$pu = z, \qquad \text{d'où} \qquad du = \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

La différentielle à intégrer deviendra $\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}$; on devra l'intégrer suivant une ligne telle qu'en la parcourant u croisse de $2\omega_1$. On pourra, par exemple, prendre le contour formé par les deux lacets L_3, L_2, ou le contour équivalent K formé par la ligne e_2e_3 (*fig.* 24), le cercle c_3, la ligne e_3e_2 et le cercle c_2.

Fig. 24.



Or les intégrales suivant les petits cercles sont nulles, et l'intégrale suivant e_3e_2 est égale à l'intégrale suivant e_2e_3. On a donc

$$2\eta_1 = -2\int_{e_2e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}.$$

On peut calculer de même η_2, η_3; donc

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= -\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \\ \eta_2 &= -\int_{e_3}^{e_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \\ \eta_3 &= -\int_{e_1}^{e_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}. \end{aligned} \right.$$

Tout le système des quantités ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 n'est défini qu'au signe près par les formules ci-dessus, car si l'on remplaçait $\sqrt{Z_0}$ par son opposée $-\sqrt{Z_0}$, le radical $\sqrt{Z}$ changerait de signe tout le long des lignes d'intégration.

339. Les intégrales ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 sont des fonctions continues de g_2, g_3, tant que ces paramètres ne franchiront pas un système de valeurs tel que e_1, e_2, e_3 soient en ligne droite.

On a, en effet, comme nous venons de le voir,

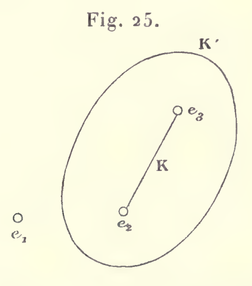
$$2\eta_1 = -\int_K \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}},$$

et de même

$$2\omega_1 = \int_K \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Soit K′ un contour fermé enveloppant K, mais laissant le point e_1 à son extérieur (*fig.* 25). Le radical $\sqrt{Z}$ étant sy-

Fig. 25.



nectique entre K et K′, on pourra remplacer les intégrales suivant K par des intégrales suivant K′. Celles-ci, pouvant être dérivées sans difficulté par rapport à chacun des paramètres g_2 et g_3, seront continues.

340. Théorème. — *Les périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ *forment un triangle principal; et les rapports* $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\frac{\omega_3}{\omega_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ *auront leur partie imaginaire positive.*

Cherchons, en effet, comment varie l'argument a du rapport

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Soit a_0 la valeur de cet argument au commencement du côté e_2e_3. Lorsque z décrit ce côté, les arguments de dz,

$z - e_2$, $z - e_3$ ne changent pas. Celui de $z - e_1$ s'accroît de $\widehat{e_1}$, angle au sommet e_1 du triangle. Donc, sur le côté considéré, a décroîtra de a_0 à $a_0 - \frac{1}{2}\widehat{e_1}$.

L'intégrale ω_1 étant la limite d'une somme d'éléments dont les arguments sont compris entre ces deux valeurs extrêmes, son argument sera compris dans le même intervalle (t. I, n° 184). On aura donc

$$\arg\omega_1 = a_0 - \theta_1 \tfrac{1}{2}\widehat{e_1}, \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

Si maintenant z passe d'un élément infiniment voisin de e_3 et situé sur $e_2 e_3$ à un autre élément infiniment voisin situé sur $e_3 e_1$ (en restant dans l'intérieur du triangle), les arguments de $z - e_1$, $z - e_2$ n'auront pas varié; celui de $z - e_3$ aura décru de $\widehat{e_3}$; enfin celui de dz sera accru de $\pi - \widehat{e_3}$. L'argument a aura donc au début du côté $e_3 e_1$ la valeur

$$a_0 - \tfrac{1}{2}\widehat{e_1} + \pi - \tfrac{1}{2}\widehat{e_3} = a_0 + \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\widehat{e_2}.$$

Le long de ce côté, il décroîtra de $\frac{1}{2}\widehat{e_2}$; on aura donc

$$\arg\omega_2 = a_0 + \frac{\pi}{2} + \theta_2 \tfrac{1}{2}\widehat{e_2}, \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

et, par suite,

$$\arg\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi}{2} + \theta_1 \tfrac{1}{2}\widehat{e_1} + \theta_2 \tfrac{1}{2}\widehat{e_2}.$$

Cette expression est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Donc $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a sa partie imaginaire positive. D'ailleurs, soit ABC le triangle formé sur $AB = 2\omega_1$, $BC = 2\omega_2$, $CA = 2\omega_3$. L'argument de $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ représente évidemment le supplément de l'angle intérieur B. Celui-ci est donc aigu.

Comme on peut, dans le raisonnement ci-dessus, permuter circulairement les indices 1, 2, 3, on voit que le triangle ABC est acutangle. C'est donc l'un des deux triangles principaux.

341. Quelques cas particuliers intéressants sont à signaler :

1° Le triangle $e_1 e_2 e_3$ est infiniment aplati; et les trois points e_1, e_2, e_3 sont en ligne droite. Dans ce cas limite, le triangle ABC sera rectangle. (Si, pour fixer les idées, on suppose e_3 compris entre e_1 et e_2, les angles $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$ seront nuls, et $2\omega_2$ perpendiculaire à $2\omega_1$.)

En vertu de l'égalité

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

la droite $e_1 e_2 e_3$ passera par l'origine; soit λ son argument : on pourra poser

$$e_1 = E_1 e^{i\lambda}, \qquad e_2 = E_2 e^{i\lambda}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda},$$
$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda},$$

E_1, E_2, E_3, G_2, G_3 étant réels.

Puisque e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation

$$0 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4z^3 - G_2 e^{2i\lambda} z - G_3 e^{3i\lambda},$$

E_1, E_2, E_3 seront les racines de l'équation

$$4t^3 - G_2 t - G_3 = 0,$$

Elles sont réelles; donc on aura

$$G_2^3 - 27 G_3^2 > 0,$$

et l'invariant absolu

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27 G_3^2}$$

sera réel et > 1.

Cette dernière condition est suffisante pour caractériser ce cas. Car, J étant réel, $\dfrac{g_2^3}{g_3^2}$ le sera. On pourra donc poser

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda},$$

G_2 et G_3 étant réels, puis

$$e_1 = E_1 e^{i\lambda}, \qquad e_2 = E_2 e^{i\lambda}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda};$$

E_1, E_2, E_3 seront les racines de l'équation

$$4t^3 - G_2 t - G_3 = 0.$$

On a d'ailleurs

$$J = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27 G_3^2},$$

quantité qui ne peut être > 1 que si son dénominateur est positif. Donc E_1, E_2, E_3 seront réels, et les points e_1, e_2, e_3 en ligne droite.

342. 2° Si J est réel, mais < 1, $G_2^3 - 27 G_3^2$ sera négatif, et l'équation en t aura une racine réelle E_3 et deux racines imaginaires conjuguées

$$E_1 = H e^{i\alpha}, \qquad E_2 = H e^{-i\alpha}, \qquad (\text{H réel}).$$

On aura donc

$$e_1 = H e^{i(\lambda+\alpha)}, \qquad e_2 = H e^{i(\lambda-\alpha)}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda}$$

et, les quantités

$$e_3 - e_2 = e^{i\lambda}(E_3 - H e^{-i\alpha}),$$
$$e_3 - e_1 = e^{i\lambda}(E_3 - H e^{i\alpha}),$$

ayant le même module, le triangle $e_1 e_2 e_3$ sera isoscèle.

Réciproquement, si les deux côtés $e_2 e_3$, $e_3 e_1$ sont égaux, leur bissectrice passera par l'origine, qui (en vertu de l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$) est le centre de gravité du triangle. En désignant par λ son argument, on pourra mettre e_1, e_2, e_3 sous la forme

$$e_1 = H e^{i(\lambda+\alpha)}, \qquad e_2 = H e^{i(\lambda-\alpha)}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda},$$

H et E_3 étant réels. On en déduit

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda}, \qquad J = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27 G_3^2}.$$

D'ailleurs, l'équation

$$4t^3 - G_2 t - G_3 = 0$$

ayant pour racines les quantités

$$He^{i\alpha}, \qquad He^{-i\alpha}, \qquad E_3,$$

dont une seule est réelle, on aura

$$G_2^3 - 27G_3^2 < 0 \quad \text{et} \quad J < 1.$$

343. Ce cas peut encore être caractérisé par la condition que le triangle ABC des périodes soit isoscèle.

Soient, en effet, l la longueur commune des deux côtés e_3e_1, e_3e_2; μ l'angle qu'ils forment avec la bissectrice; on aura

$$e_2 = e_3 + le^{i(\lambda+\mu)}, \qquad e_1 = e_3 + le^{i(\lambda-\mu)}.$$

Posant donc

$$z = e_3 + te^{i(\lambda+\mu)},$$

l'intégrale

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

deviendra

$$e^{-\frac{i\lambda}{2}} \int_l^0 \frac{dt}{\sqrt{4(le^{i\mu} - le^{-i\mu})(t-l)t}}.$$

Si, dans l'intégrale

$$-\omega_2 = \int_{e_1}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

nous posons de même

$$z = e_1 + te^{i(\lambda-\mu)},$$

nous aurons une transformée identique, sauf le changement du signe de μ.

Donc

$$e^{\frac{i\lambda}{2}}\omega_1 \quad \text{et} \quad -e^{\frac{i\lambda}{2}}\omega_2$$

seront des quantités conjuguées et auront même module. Donc $|\omega_1| = |\omega_2|$ et le triangle ABC est isoscèle.

Réciproquement, supposons qu'on ait $|\omega_1| = |\omega_2|$. Ap-

pelant $\frac{\rho}{2}$ cette quantité, nous pourrons choisir deux nouvelles quantités λ et μ, telles que l'on ait

$$2\omega_1 = \rho e^{i\left(-\frac{\lambda}{2}+\mu\right)}, \qquad 2\omega_2 = \rho e^{i\left(-\frac{\lambda}{2}-\mu\right)}.$$

Substituons ces valeurs dans les expressions

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6},$$

il viendra

$$g_2 = \frac{60}{\rho^4}\, e^{2i\lambda} \sum{}' \frac{1}{(m_1 e^{i\mu} + m_2 e^{-i\mu})^4},$$
$$g_3 = \frac{140}{\rho^6}\, e^{3i\lambda} \sum{}' \frac{1}{(m_1 e^{i\mu} + m_2 e^{-i\mu})^6}.$$

Les sommes qui figurent dans ces expressions sont réelles, car les termes où $m_1 = m_2$ sont réels, et les autres sont conjugués deux à deux, si l'on associe ceux qui se déduisent l'un de l'autre en échangeant m_1 avec m_2. On aura donc

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda},$$

G_2 et G_3 étant réels. Donc J sera réel ; mais il sera < 1 ; car, lorsque $J > 1$, nous avons vu que ABC n'est pas isoscèle, mais rectangle.

344. Deux cas plus particuliers encore méritent d'être signalés.

3° Si $J = 1$, d'où $g_3 = 0$, l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

aura une racine nulle et deux racines égales et opposées. Le triangle $e_1 e_2 e_3$ sera à la fois isoscèle et infiniment aplati, et le triangle ABC sera à la fois isoscèle et rectangle.

4° Si $J = 0$, d'où $g_2 = 0$, l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

se réduira à la forme binôme et l'on aura

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

$$e_3 - e_2 : e_1 - e_3 : e_2 - e_1 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Les triangles $e_1 e_2 e_3$ et ABC seront équilatéraux.

Réciproquement, si ABC est équilatéral, g_2 sera nul; on aura en effet

$$\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \omega_1.$$

Substituant cette valeur dans l'expression

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4},$$

elle se réduira, à un facteur commun près, à la somme

$$S = \sum{}' \frac{1}{\left(m_1 + m_2 e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^4}.$$

Or on a

$$S = e^{-\frac{8\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left(m_1 e^{-\frac{2\pi i}{3}} + m_2\right)^4}$$
$$= e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left[-m_1\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + m_2\right]^4},$$

ou, en posant $-m_1 + m_2 = m'_1$, $-m_1 = m'_2$,

$$S = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left(m'_1 + m'_2 e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^4} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} S.$$

Donc $S = 0$ et $g_2 = 0$, $J = 0$.

345. Il résulte de l'examen de ces cas particuliers qu'en général, si le triangle $e_1 e_2 e_3$ a deux côtés inégaux $e_2 e_3$ et $e_3 e_1$, les modules des périodes correspondantes $2\omega_1$, $2\omega_2$ seront inégaux.

Soit, pour fixer les idées, $e_2 e_3 < e_3 e_1$; on aura

$$|2\omega_1| < |2\omega_2|.$$

En effet, si nous déformons le triangle $e_1 e_2 e_3$ d'une manière quelconque, de telle sorte que $e_2 e_3$ reste $< e_3 e_1$, la différence $|2\omega_2| - |2\omega_1|$, ne pouvant s'annuler, conservera un signe constant. Pour reconnaître qu'elle est positive, il nous suffira de considérer un cas particulier.

Soit, par exemple,

$$e_2 = -a - h, \qquad e_3 = -a + h, \qquad e_1 = 2a,$$

a et h étant positifs, et h infiniment petit. On aura

$$Z = 4(z - 2a)[(z + a)^2 - h^2],$$

$$2\omega_1 = 2\int_{-a-h}^{-a+h} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad 2\omega_2 = 2\int_{-a+h}^{2a} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Posons

$$z = -a + ht;$$

ces intégrales deviendront

$$2\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(-3a + ht)(t^2 - 1)}},$$

$$2\omega_2 = \int_{1}^{\frac{3a}{h}} \frac{dt}{\sqrt{(-3a + ht)(t^2 - 1)}}.$$

La première a ses éléments réels et son module a pour limite la quantité finie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{3a(1 - t^2)}}.$$

La seconde a ses éléments purement imaginaires et de même signe, et son module est plus grand que l'intégrale

$$\int_{1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{(3a - ht)(t^2 - 1)}},$$

k désignant un nombre positif arbitraire, moindre que $\frac{3a}{h}$.

Si nous supposons h infiniment petit, cette dernière intégrale aura pour limite la suivante

$$\int_1^k \frac{dt}{\sqrt{3a(t^2-1)}},$$

laquelle tend vers ∞ si k croît indéfiniment. Donc $|2\omega_2|$ aura pour limite ∞, et l'on aura bien

$$|2\omega_2| > |2\omega_1|.$$

346. Une fonction elliptique $f(u)$, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ peut s'exprimer de trois manières différentes par les fonctions σu, ζu, $\wp u$.

1° *Par un quotient de fonctions* σ. — Ce procédé demande qu'on ait déterminé les zéros et les pôles de $f(u)$. Les zéros de $\wp u$ formeront un certain nombre de classes, en réunissant ensemble ceux qui sont équivalents (d'après la définition du n° 314). Soient n le nombre de ces classes; a_1, a_2, ..., a_n des zéros déterminés choisis respectivement dans chacune d'elles. Nous supposerons que tous ces zéros sont simples; s'il y en avait de multiples, nous n'aurions qu'à poser $a_1 = a_2 = \dots$ dans la formule que nous allons obtenir.

Les pôles formeront également n classes; nous en choisirons un dans chacune d'elles; nous obtiendrons ainsi n pôles b_1, b_2, ..., b_n.

On a la relation

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \text{période}.$$

Car, si nous considérons un parallélogramme quelconque de périodes, il contiendra n zéros α_1, ..., α_n et n pôles β_1, ..., β_n entre lesquels existe une relation de ce genre et qui ne diffèrent respectivement de a_1, ..., a_n et b_1, ..., b_n que par des périodes.

En remplaçant a_n, par exemple, par un autre zéro de la

même classe convenablement choisi, on fera disparaître la période, de manière que l'on ait simplement

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Cela posé, la fonction

$$\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n)}$$

a mêmes pôles et mêmes zéros que fu. Elle a d'ailleurs les mêmes périodes, car si l'on change u en $u+2\omega_1$, par exemple, elle se reproduit multipliée par le facteur

$$\frac{(-1)^n e^{2\eta_1 \Sigma(u-a+\omega_1)}}{(-1)^n e^{2\eta_1 \Sigma(u-b+\omega_1)}} = 1.$$

On aura donc

$$(25) \qquad fu = C\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n)},$$

C désignant une constante. Pour la déterminer, on donnera à u une valeur particulière, pour laquelle on exprimera que les deux membres sont égaux (ou ont même valeur principale, s'ils sont nuls ou infinis).

347. 2° *Par ζ et ses dérivées.* — Soient a, b, ... les pôles distincts que possède fu dans un parallélogramme des périodes (ou des pôles quelconques équivalents à ceux-ci). Soient respectivement λ, μ, ... leurs ordres de multiplicité; enfin soient respectivement

$$\frac{A_\lambda}{(u-a)^\lambda} + \ldots + \frac{A_1}{u-a} + \ldots,$$

$$\frac{B_\mu}{(u-b)^\mu} + \ldots + \frac{B_1}{u-b} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les développements de $f(u)$ aux environs de ces pôles; on

aura

$$(26)\quad \begin{cases} fu = & A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \ldots + \dfrac{(-1)^{\lambda-1}A_\lambda}{(\lambda-1)!}\zeta^{\lambda-1}(u-a) \\ & + B_1\zeta(u-b) - B_2\zeta'(u-b) + \ldots + \dfrac{(-1)^{\mu-1}B_\mu}{(\mu-1)!}\zeta^{\mu-1}(u-b) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C, \end{cases}$$

C désignant une constante.

Soit en effet Fu le second membre de cette formule. Si l'on accroît u d'une période 2ω, ζu s'accroît de 2η, et ses dérivées restent invariables; Fu s'accroît donc de

$$2\eta(A_1 + B_1 + \ldots).$$

Mais la somme des résidus $A_1 + B_1 + \ldots$ est nulle (318). Donc Fu est une fonction elliptique.

D'ailleurs $\zeta(u-a)$ n'a (aux périodes près) qu'un seul pôle a, aux environs duquel on a le développement

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \varphi(u-a),$$

φ désignant une série de puissances entières et positives. On en déduit

$$\zeta'(u-a) = \frac{-1}{(u-a)^2} + \varphi'(u-a),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\zeta^{\lambda-1}(u-a) = \frac{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!}{(u-a)^\lambda} + \varphi^{\lambda-1}(u-a).$$

Les développements de Fu et de fu aux environs du pôle a ont donc même partie infinie. De même pour les autres pôles b, ... Donc F$u - fu$ est une constante. En donnant à u une valeur particulière, on déterminera C de telle sorte que cette différence s'annule.

Cette décomposition d'une fonction elliptique en une somme d'éléments simples peut être assimilée à la décomposition des fractions rationnelles. Elle présente les mêmes

avantages au point de vue de l'intégration, car, ζu étant la dérivée de $\log \sigma u$, tous les termes du second membre sont les dérivées de fonctions connues.

348. 3° *Par* pu *et* $p'u$. — Supposons d'abord que fu soit une fonction paire. Soient

$$\pm \alpha_1 + \text{période}, \quad \pm \alpha_2 + \text{période}, \quad \ldots$$

ceux de ses zéros qui ne sont pas des périodes; λ_1, λ_2, ... leurs ordres de multiplicité. Soient de même

$$\pm \beta_1 + \text{période}, \quad \pm \beta_2 + \text{période}, \quad \ldots$$

ceux de ses pôles qui ne sont pas des périodes; μ_1, μ_2, ... leurs ordres de multiplicité. On aura

$$(27) \qquad fu = C \frac{(pu - p\alpha_1)^{\lambda_1}(pu - p\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots}{(pu - p\beta_1)^{\mu_1}(pu - p\beta_2)^{\mu_2}\ldots},$$

C désignant une constante.

Soit, en effet, Fu le second membre de cette équation. Le quotient $\frac{fu}{Fu}$ est une fonction elliptique qui n'admet ni zéro ni pôle, en dehors des périodes. Mais une période ne peut être à la fois zéro et pôle. La fonction manquera donc de zéro ou de pôle, et se réduira à une constante. En donnant à u une valeur particulière, on déterminera C de telle sorte que cette constante se réduise à l'unité.

Supposons maintenant fu quelconque; posons

$$\frac{fu + f(-u)}{2} = \varphi u,$$

$$\frac{fu - f(-u)}{2p'u} = \varphi_1 u,$$

d'où

$$(28) \qquad fu = \varphi u + \varphi_1 u \, p'u.$$

Les deux fonctions φu, $\varphi_1 u$, étant évidemment paires,

pourront, d'après ce qui précède, s'exprimer rationnellement au moyen de pu.

349. Les formules essentielles de la théorie des fonctions σu, ζu, pu s'obtiennent avec la plus grande facilité en comparant entre eux les trois modes de représentation ci-dessus pour une même fonction elliptique.

Cherchons, par exemple, l'expression de $p'u$ par les fonctions σ. La fonction $p'u$ admet (aux périodes près) le pôle triple $u = 0$, et les zéros ω_1, ω_2, ω_3, dont la somme est nulle. Donc

$$p'u = C\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma^3 u}.$$

Posons $u = 0$. Les deux membres auront pour valeurs principales

$$\frac{-2}{u^3} \quad \text{et} \quad \frac{-C\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{u^3},$$

donc

$$C = \frac{2}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}$$

et

$$(29) \qquad p'u = 2\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3\,\sigma^3 u}.$$

350. Cherchons l'expression de $pu - pv$. Cette fonction admet, aux périodes près, les deux pôles $\pm v$ et le zéro double o. Elle sera donc de la forme

$$C\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

L'identification des valeurs principales pour u infiniment petit donne

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{C\sigma^2 v}{u^2},$$

donc

$$(30) \qquad pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

351. On a l'identité

$$(A-B)(C-D)+(A-C)(D-B)+(A-D)(B-C)=0.$$

Posons $A=\wp a$, $B=\wp b$, $C=\wp c$, $D=\wp d$. Remplaçons les différences $\wp a-\wp b$, ... par leurs valeurs données par la formule ci-dessus, et supprimons le dénominateur commun : nous obtiendrons l'*identité à trois termes*

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma(a+b)\sigma(a-b)\sigma(c+d)\sigma(c-d)\\ +\,&\sigma(a+c)\sigma(a-c)\sigma(d+b)\sigma(d-b)\\ +\,&\sigma(a+d)\sigma(a-d)\sigma(b+c)\sigma(b-c)=0. \end{aligned}\right.$$

352. Prenons la dérivée logarithmique de l'équation (30), il viendra

$$(32)\qquad \frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta u$$

et, en échangeant u, v,

$$(33)\qquad \frac{-\wp' v}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta v.$$

Ajoutons et divisons par 2,

$$(34)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v.$$

Dérivons encore,

$$(35)\qquad \wp(u+v)-\wp u=-\frac{d}{du}\,\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}.$$

Effectuons la dérivée, et remplaçons $\wp'^2 u$, $\wp'' u$ par leurs valeurs en $\wp u$, nous obtiendrons l'expression de $\wp(u+v)$ en fonction rationnelle de $\wp u$, $\wp' u$, $\wp v$, $\wp' v$. La dérivation donnera une expression du même genre pour $\wp'(u+v)$. C'est en ce résultat que consiste le *théorème de l'addition des arguments* pour la fonction $\wp u$.

On peut donner à la formule d'addition une forme plus élégante. A cet effet, décomposons en éléments simples la

fonction

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = [\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2.$$

Elle a deux pôles doubles, o et $-v$. Pour $u = 0$, on a

$$\zeta(u+v) - \zeta v = u\zeta' v + \ldots, \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_1 u^3}{3} + \ldots,$$

$$[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2 = \left(-\frac{1}{u} + u\zeta' v + \ldots\right)^2 = \frac{1}{u^2} - 2\zeta' v + \ldots.$$

Pour $u = -v$

$$\zeta(u+v) = \frac{1}{u+v} - \frac{c_1(u+v)^3}{3} + \ldots,$$

$$-\zeta u - \zeta v = \zeta[v - (u+v)] - \zeta v = -(u+v)\zeta' v + \ldots,$$

$$[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2 = \frac{1}{(u+v)^2} - 2\zeta' v + \ldots.$$

On aura donc

$$[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2 = -\zeta'(u+v) - \zeta' u + C.$$

Pour déterminer la constante C, égalons les termes indépendants de u dans le développement suivant les puissances de u; il viendra

$$-2\zeta' v = -\zeta' v + C, \qquad C = -\zeta' v,$$

et, comme on a $\zeta' u = -pu$, ..., on aura la formule d'addition sous la forme classique

$$(36) \qquad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

La formule deviendra tout à fait symétrique par l'introduction d'un troisième argument w, défini par la relation

$$u + v + w = 0.$$

Le premier membre deviendra $pw + pu + pv$, et sera symétrique en u, v, w, ainsi que la relation entre ces va-

riables. On aura donc

$$(37)\quad \begin{cases} pu + pv + pw = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p'v - p'w}{pv - pw}\right)^2 \\ \qquad = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p'w - p'u}{pw - pu}\right)^2 \end{cases}$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$(38)\qquad \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{p'v - p'w}{pv - pw} = \frac{p'w - p'u}{pw - pu}.$$

Pour s'assurer que le signe des racines a été correctement choisi, il suffit de remarquer que deux quelconques de ces quantités ont même valeur principale, lorsque l'argument qui leur est commun tend vers zéro.

353. Faisons tendre v vers u dans la formule (36); elle devient

$$(39)\qquad p2u + 2pu = \frac{1}{4}\frac{p''^2 u}{p'^2 u} = \frac{1}{4}\frac{(6p^2 u - \frac{1}{2}g_2)^2}{4p^3 u - g_2 pu - g_3}.$$

Une dérivation donnera $p'2u$. Posant ensuite successivement $v = 2u, 3u, \ldots$, on obtiendrait des formules pour la multiplication de l'argument. Nous y parviendrons tout à l'heure par une voie plus facile.

354. La formule (30) peut être généralisée comme il suit :

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n arguments indépendants; considérons le déterminant

$$(40)\qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & pu_1 & p'u_1 & \ldots & p^{(n-2)}u_1 \\ 1 & pu_2 & p'u_2 & \ldots & p^{(n-2)}u_2 \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & pu_n & p'u_n & \ldots & p^{(n-2)}u_n \end{vmatrix}.$$

Considéré comme fonction de u_n, D_n admet (aux périodes près) un seul pôle, o, de multiplicité n, aux environs duquel

sa valeur principale est

$$\frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{u_n^n}\,D_{n-1},$$

D_{n-1} désignant le mineur relatif au dernier terme $p^{(n-2)}u_n$. On connaît, d'autre part, $n-1$ zéros, $u_1, \ldots, u_{n-1}$. La somme des zéros étant égale à celle des pôles, qui est nulle, le dernier zéro sera $-(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})$. Donc D_n sera proportionnel à

$$\frac{\sigma(u_n-u_1)\,\sigma(u_n-u_2)\ldots\sigma(u_n+u_1+\ldots+u_{n-1})}{\sigma^n u_n}.$$

Pour u_n infiniment petit, cette dernière expression a pour valeur principale

$$\frac{(-1)^{n-1}\sigma u_1\,\sigma u_2\ldots\sigma u_{n-1}\,\sigma(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})}{u_n^n},$$

ce qui permet de déterminer le facteur de proportionnalité. On trouve ainsi

$$D_n=\frac{-(n-1)!\,D_{n-1}}{\sigma u_1\ldots\sigma u_{n-1}\sigma(u_1+\ldots+u_{n-1})}\,\frac{\sigma(u_n-u_1)\ldots\sigma(u_n-u_{n-1})\,\sigma(u_1+\ldots+u_n)}{\sigma^n u_n}.$$

Changeons n en $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 2 et multiplions les égalités obtenues. Il viendra

$$(41)\qquad D_n=A\,\frac{\sigma(u_1+\ldots+u_n)\prod\sigma(u_i-u_k)}{\sigma^n u_1\,\sigma^n u_2\ldots\sigma^n u_n}\qquad\begin{pmatrix}i=2,&\ldots,n\\ k=1,2,&\ldots,i-1\end{pmatrix},$$

A désignant la constante $(-1)^{n-1}(n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!$

355. Posons dans cette égalité

$$u_1=u,\qquad u_2=u+h_2,\qquad \ldots,\qquad u_n=u+h_n,$$

$h_2, \ldots, h_n$ étant des infiniment petits.

Le coefficient du terme en $h_2 h_3^2 \ldots h_n^{n-1}$ dans le développement du premier membre sera évidemment

$$\frac{1}{2!\,3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \ldots & \wp^{(n-2)} u \\ 0 & \wp' u & \ldots & \wp^{(n-1)} u \\ 0 & \wp'' u & \ldots & \wp^{n} u \\ . & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & \wp^{(n-1)} u & \ldots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!\,3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} \wp' u & \ldots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \ldots & \wp^{n} u \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \wp^{(n-1)} u & \ldots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}.$$

Dans le développement du second membre, les termes de moindre degré par rapport à $h_2, \ldots, h_n$ seront ceux du produit

$$A\,\frac{\sigma n u}{(\sigma u)^{n^2}}\,h_2\ldots h_n \prod (h_i - h_k) \quad \begin{pmatrix} i = 3, \ldots, n \\ k = 2, \ldots, i-1 \end{pmatrix}$$

et celui que nous cherchons a pour coefficient

$$A\,\frac{\sigma n u}{(\sigma u)^{n^2}}.$$

En posant, pour abréger,

$$B = (-1)^{n-1}\,[2!\,3!\ldots(n-1)!]^2$$

et

$$\psi_n u = \frac{\sigma n u}{(\sigma u)^{n^2}}, \tag{42}$$

on aura donc (pour n entier positif) la relation

$$\psi_n u = \frac{1}{B}\begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \ldots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \ldots & \wp^{(n)} u \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \wp^{(n-1)} u & \wp^{(n)} u & \ldots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}. \tag{43}$$

356. On voit par cette expression que si n est entier po-

sitif, $\psi_n u$ est une fonction elliptique. Cette propriété subsistera pour n entier négatif, car on a évidemment

$$\psi_{-n} = -\psi_n.$$

Il est aisé de la démontrer directement. Changeons, en effet, u en $u + 2\omega$, 2ω désignant une période primitive; $\sigma n u$ sera changé en

$$\sigma(nu + 2n\omega) = (-1)^n e^{2n\eta(nu+n\omega)} \sigma nu$$

et $(\sigma u)^{n^2}$ en

$$(-1)^{n^2} e^{2n^2\eta(u+\omega)} (\sigma u)^{n^2}.$$

D'ailleurs $n^2 \equiv n \bmod 2$. Donc le quotient ψ_n ne sera pas changé.

357. La fonction ψ_n n'a (aux périodes près) qu'un seul pôle, $u = 0$, d'ordre $n^2 - 1$; elle est paire si n est impair, impaire si n est pair. On aura donc

$$(44) \quad \begin{cases} \text{pour } n \text{ impair}\dots\dots & \psi_n = P_1, \\ \text{pour } n \text{ pair}\dots\dots\dots & \psi_n = P_2 p' u, \\ \text{dans tous les cas}\dots & \psi_n^2 = P, \end{cases}$$

P_1, P_2, P désignant des polynômes en pu, d'ordre $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2-4}{2}$, $n^2 - 1$ respectivement.

Soient donc

$$P_1 = \alpha p^{\frac{n^2-1}{2}} + \alpha_1 p^{\frac{n^2-1}{2}-1} + \dots,$$

$$P_2 = \beta p^{\frac{n^2-4}{2}} + \beta_1 p^{\frac{n^2-4}{2}-1} + \dots,$$

$$P \ = \gamma p^{n^2-1} + \gamma_1 p^{n^2-2} \ + \dots.$$

Les coefficients α, α_1, ...; β, β_1, ...; γ, γ_1, ... pourront s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés, en identifiant les deux membres des équations (44) développés

suivant les puissances de u au moyen des formules

$$\begin{aligned} \wp u &= \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots, \\ \wp' u &= \frac{-2}{u^3} + 2c_1 u + 4c_2 u^3 + \ldots, \\ \sigma u &= u(1 + d_1 u^4 + \ldots), \\ \sigma nu &= nu(1 + d_1 n^4 u^4 + \ldots). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une suite d'équations linéaires qui déterminent successivement les coefficients inconnus. Ces équations ont pour coefficients des polynômes entiers en $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ qui sont eux-mêmes des polynômes entiers en g_2, g_3. D'ailleurs chacun des coefficients est affecté dans l'équation qui le détermine d'un coefficient purement numérique (1 pour les coefficients $\alpha, \alpha_1, \ldots, \gamma, \gamma_1, \ldots$; -2 pour $\beta, \beta_1, \ldots$). Tous ces coefficients sont donc des polynômes entiers en g_2, g_3. D'ailleurs le premier est purement numérique et le second est nul. Car l'identification des deux premiers termes donne, pour les déterminer, les équations

$$\begin{aligned} n &= \alpha, & n &= -2\beta, & n^2 &= \gamma, \\ 0 &= \alpha_1, & 0 &= -2\beta_1, & 0 &= \gamma_1. \end{aligned}$$

358. Il est aisé d'opérer la décomposition en facteurs des polynômes P_1, P_2, P.

En effet, le numérateur σnu de ψ_n admet un zéro simple en tous les points pour lesquels nu est une période; mais ceux de ces points pour lesquels u est lui-même une période sont des zéros d'ordre n^2 pour le dénominateur. Donc $\psi_n u$ aura (aux périodes près) les $n^2 - 1$ zéros

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n},$$

m_1, m_2 parcourant chacun la suite des valeurs de 0 à $n - 1$, le système $m_1 = m_2 = 0$ excepté.

1° Si n est impair, les n^2-1 systèmes restants peuvent se répartir en couples (m'_1, m'_2), (m''_1, m''_2), liés par les relations

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \pmod{n},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{2m''_1\omega_1 + 2m''_2\omega_2}{n} = -\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n} + \text{période}.$$

Choisissons à volonté dans chaque couple un des deux systèmes qui le composent, tel que (m'_1, m'_2), en excluant l'autre ; nous aurons

$$(45) \qquad \psi_n = P_1 = n\prod\left(pu - p\,\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}\right),$$

car les deux membres ont les mêmes zéros

$$u = \pm\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n} + \text{période},$$

les mêmes pôles, d'ordre n^2-1,

$$u = \text{période},$$

et la même valeur principale pour $u = 0$.

2° Si n est pair, on devra mettre à part les trois systèmes $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, pour lesquels $\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$ se réduit respectivement à ω_1, ω_2 et à $\omega_1 + \omega_2 = -\omega_3 = \omega_3 +$ période. Les n^2-4 systèmes restants se répartissent, comme tout à l'heure, en couples (m'_1, m'_2), (m''_1, m''_2) ; et, si l'on remarque que $p'u$ a pour zéros les points ω_1, ω_2, ω_3 et pour pôle le point $u = 0$ avec la valeur principale $\frac{-2}{u^3}$, on aura

$$(46) \qquad \psi_n = P_2\, p'u = -\frac{n}{2}\prod\left(pu - p\,\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}\right)p'u.$$

Les formules précédentes subsistent si l'on y remplace chaque système (m'_1, m'_2) par son associé (m''_1, m''_2). Multi-

pliant les deux expressions de $\psi_n u$ ainsi obtenues, et remarquant d'ailleurs que l'on a

$$p'^2 u = 4(pu - p\omega_1)(pu - p\omega_2)[pu - p(\omega_1 + \omega_2)],$$

il viendra dans tous les cas

$$(47)\qquad \psi_n^2 = P = n^2 \prod \left(pu - p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right).$$

359. Les polynômes P_1, P_2, P ayant, comme nous l'avons vu, leurs coefficients entiers en g_2, g_3, les fonctions symétriques entières (ou les fonctions symétriques rationnelles) des quantités $p\,\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}$, racines de P_1 ou de P_2, et celles des quantités $p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$, racines de P, s'exprimeront par des polynômes entiers (par des fractions rationnelles) en g_2, g_3.

Les polynômes P_1, P_2, P manquant de second terme, on aura en particulier

$$(48)\qquad \sum p\,\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n} = 0, \qquad \sum p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} = 0.$$

360. On a, d'après la formule (30),

$$pnu - pmu = -\frac{\sigma(n+m)u\,\sigma(n-m)u}{\sigma^2 nu\,\sigma^2 mu}.$$

Remplaçons $\sigma nu, \ldots$ par leurs valeurs $\psi_n u(\sigma u)^{n^2}, \ldots$, σu disparaît et il reste

$$(49)\qquad pnu - pmu = -\frac{\psi_{n+m}\psi_{n-m}}{\psi_n^2\psi_m^2}.$$

De l'identité

$$(plu - pmu) + (pmu - pnu) + (pnu - plu) = 0,$$

on déduira

$$\frac{\psi_{l+m}\psi_{l-m}}{\psi_l^2\psi_m^2} + \frac{\psi_{m+n}\psi_{m-n}}{\psi_m^2\psi_n^2} + \frac{\psi_{n+l}\psi_{n-l}}{\psi_n^2\psi_l^2} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(50)\qquad \psi_{l+m}\psi_{l-m}\psi_n^2+\psi_{m+n}\psi_{m-n}\psi_l^2+\psi_{n+l}\psi_{n-l}\psi_m^2=0.$$

Posant en particulier $l=1$, $m=n+1$ et remarquant qu'on a $\psi_1=1$, $\psi_{-n}=-\psi_n$, on trouvera

$$(51)\qquad \psi_{2n+1}=\psi_{n+2}\psi_n^3-\psi_{n-1}\psi_{n+1}^3.$$

Posons encore $l=1$, $m=n+1$, mais changeons n en $n-1$ et remarquons que $\psi_2=-p'u$; il vient

$$(52)\qquad p'u\,\psi_{2n}=\psi_n(\psi_{n-2}\psi_{n+1}^2-\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2).$$

Ces formules récurrentes sont commodes pour le calcul des fonctions ψ.

Posons enfin $m=1$ dans la formule (49); il viendra

$$(53)\qquad pnu-pu=-\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2},$$

ce qui donne pnu en fonction rationnelle de pu; car $p'u$ ne figure au second membre que par son carré (au dénominateur ou au numérateur, suivant que n est pair ou impair).

361. On obtient de nouvelles formules de multiplication en décomposant pnu en éléments simples.

Les pôles de cette fonction sont (aux périodes près) le point o et les points $\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}$, que nous représenterons d'une manière plus abrégée par $\frac{w}{n}$. Posons $u=h$ ou $u=\frac{w}{n}+h$, h étant infiniment petit; on aura

$$pnu=pnh=\frac{1}{n^2h^2}+c_1n^2h^2+\ldots.$$

La formule générale de décomposition donnera donc

$$pnu=-\frac{1}{n^2}\zeta'u-\frac{1}{n^2}\sum\zeta'\left(u-\frac{w}{n}\right)+\text{const.}$$

ou

$$n^2 \wp nu = \wp u + \sum \wp\left(u - \frac{w}{n}\right) + \mathrm{C}.$$

L'identification des termes constants dans le développement suivant les puissances de u donnera

$$\sum \wp\left(\frac{w}{n}\right) + \mathrm{C} = 0.$$

Intégrons : il viendra

$$n\zeta nu = \zeta u + \sum \zeta\left(u - \frac{w}{n}\right) - \mathrm{C}u + \mathrm{C}',$$

et l'identification des termes constants donnera

$$-\sum \zeta \frac{w}{n} + \mathrm{C}' = 0.$$

D'autre part, si nous changeons u en $u + 2\omega_1$, nu s'accroissant de $2n\omega_1$, le premier membre s'accroîtra de $n.2n\eta_1$ et le second de $n^2 2\eta_1 - 2\omega_1 \mathrm{C}$; donc $\mathrm{C} = -\sum \wp \frac{w}{n}$ est nul, résultat déjà trouvé par une autre voie (359).

Intégrons encore, nous trouverons

$$\log \sigma nu = \log \sigma u + \sum \log \sigma\left(u - \frac{w}{n}\right) + \mathrm{C}'u + \text{const.},$$

$$\sigma nu = \mathrm{C}'' \sigma u \prod \sigma\left(u - \frac{w}{n}\right).e^{\mathrm{C}'u}.$$

Identifions les valeurs principales pour $u = 0$; il viendra

$$n = \mathrm{C}'' \prod \sigma\left(-\frac{w}{n}\right).$$

Enfin, si u s'accroît de $2\omega_1$, nu de $2n\omega_1$, σnu sera multiplié par

$$(-1)^n e^{2n\eta_1(nu + n\omega_1)},$$

et le second membre par

$$(-1)^{n^2} e^{2\eta_1\left[u + \omega_1 + \sum\left(u - \frac{w}{n} + \omega_1\right)\right] + 2\mathrm{C}'\omega_1}.$$

Nous aurons donc en identifiant

$$- 2\eta_1 \sum \frac{w}{n} + 2C'\omega_1 = 2\mu_1\pi i,$$

et de même

$$- 2\eta_2 \sum \frac{w}{n} + 2C'\omega_2 = 2\mu_2\pi i,$$

μ_1 et μ_2 étant des entiers. En se rappelant que

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = \frac{\varepsilon\pi i}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

on en déduit

$$C' = 2\varepsilon(\mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1), \qquad \sum \frac{w}{n} = 2\varepsilon(\mu_1\omega_2 - \mu_2\omega_1).$$

Mais on a, d'autre part,

$$\sum \frac{w}{n} = \sum \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} = n\sum_{m_1} \frac{2m_1\omega_1}{n} + n\sum_{m_2} \frac{2m_2\omega_2}{n}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}(2\omega_1 + 2\omega_2) = -n(n-1)\omega_3.$$

Donc

$$C' = -n(n-1)\eta_3,$$

et l'on a les formules

$$(54) \qquad n^2 p\, nu = p u + \sum p\left(u - \frac{w}{n}\right),$$

$$(55) \qquad n\zeta nu = \zeta u + \sum \zeta\left(u - \frac{w}{n}\right) - n(n-1)\eta_3,$$

$$(56) \qquad \sigma nu = n\sigma u \prod \frac{\sigma\left(u - \frac{w}{n}\right)}{\sigma\left(-\frac{w}{n}\right)} e^{-n(n-1)\eta_3 u},$$

$$(57) \qquad \sum p\frac{w}{n} = 0, \qquad \sum \zeta\frac{w}{n} = -n(n-1)\eta_3.$$

362. Développons les deux membres de (54) suivant les

puissances de u, il viendra

$$n^2\left(\frac{1}{n^2u^2}+\frac{g_2}{20}n^2u^2+\frac{g_3}{28}n^4u^4+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\dots$$

$$+\sum \wp\frac{w}{n}-u\sum \wp'\frac{w}{n}+\frac{u^2}{2}\sum \wp''\frac{w}{n}+\dots.$$

Identifiant, on voit que les expressions

$$\sum \wp'\frac{w}{n},\qquad \sum \wp'''\frac{w}{n},\qquad \dots$$

sont nulles, et que

$$\sum \wp''\frac{w}{n},\qquad \sum \wp^{\text{IV}}\frac{w}{n},\qquad \dots$$

sont des polynômes entiers en g_2 et g_3.

Il en sera de même, d'après la formule (22), pour les sommes

$$\sum \wp^2\frac{w}{n},\qquad \sum \wp^3\frac{w}{n},\qquad \dots$$

et, plus généralement, pour les fonctions symétriques entières des quantités $\wp\frac{w}{n}$; résultat déjà trouvé (359).

363. D'après la formule d'addition, la formule (54) peut s'écrire ainsi

$$n^2\wp nu=\wp u+\sum\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp'\frac{w}{n}}{\wp u-\wp\frac{w}{n}}\right)^2-\wp u-\wp\frac{w}{n}\right],$$

ou, comme la partie impaire en u s'annule évidemment, ainsi que la somme $\sum \wp\frac{w}{n}$,

$$n^2\wp nu=\wp u+\sum\left[\frac{1}{4}\frac{\wp'^2 u+\wp'^2\frac{w}{n}}{\left(\wp u-\wp\frac{w}{n}\right)^2}-\wp u\right].$$

Mais on a

$$\wp'^2 u + \wp'^2 \frac{w}{n} = \wp'^2 u - \wp'^2 \frac{w}{n} + 2\wp'^2 \frac{w}{n}$$

$$= 4\left(\wp^3 u - \wp^3 \frac{w}{n}\right) - g_2\left(\wp u - \wp \frac{w}{n}\right) + 2\wp'^2 \frac{w}{n}$$

$$= 4\left(\wp^2 u + \wp u \wp \frac{w}{n} + \wp^2 \frac{w}{n} - \frac{1}{4} g_2\right)\left(\wp u - \wp \frac{w}{n}\right) + 2\wp'^2 \frac{w}{n},$$

$$\wp^2 u + \wp u \wp \frac{w}{n} + \wp^2 \frac{w}{n} = \left(\wp u + 2\wp \frac{w}{n}\right)\left(\wp u - \wp \frac{w}{n}\right) + 3\wp^2 \frac{w}{n}.$$

En substituant, et supprimant le terme $\sum 2\wp \frac{w}{n}$, qui s'annule, on obtient l'expression de $n^2 \wp n u$ par une somme de fractions simples

$$(58)\quad n^2 \wp n u = \wp u + \sum \frac{3\wp^2 \frac{w}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{w}{n}} + \sum \frac{\frac{1}{2}\wp'^2 \frac{w}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{w}{n}\right)^2}.$$

IV. — Les fonctions $\sigma_\alpha u$, $\sigma_{\alpha\beta} u$.

364. Soient $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ un triangle quelconque de périodes primitives de $\wp u$; posons, comme précédemment,

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3,$$

$$\zeta\omega_1 = \eta_1, \qquad \zeta\omega_2 = \eta_2, \qquad \zeta\omega_3 = \eta_3,$$

et représentons par α, β, γ les indices 1, 2, 3 écrits dans un ordre quelconque.

Dans la formule (30) de la section précédente, posons $v = \omega_\alpha$; il viendra

$$\wp u - e_\alpha = -\frac{\sigma(u + \omega_\alpha)\,\sigma(u - \omega_\alpha)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_\alpha}.$$

Mais

$$\sigma(u - \omega_\alpha) = \sigma(u + \omega_\alpha - 2\omega_\alpha) = -e^{-2\eta_\alpha(u + \omega_\alpha - \omega_\alpha)}\,\sigma(u + \omega_\alpha),$$

d'où

$$(1)\qquad \wp u - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha u}\frac{\sigma^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega_\alpha},$$

$$(2)\qquad \sqrt{\wp u - e_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u\,\sigma\omega_\alpha},$$

Le radical $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ est donc une fonction uniforme de u. Celle de ses déterminations que fournit l'équation précédente est celle qui, pour $u = 0$, a, comme le second membre, la valeur principale $\frac{+1}{u}$.

365. Changeons dans la formule (1) u en $u + \omega_\alpha$; elle devient

$$\begin{aligned}\wp(u+\omega_\alpha) - e_\alpha &= e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2(u+2\omega_\alpha)}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\,\sigma^2\omega_\alpha}\\ &= e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}.\,e^{2.2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2 u}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\,\sigma^2\omega_\alpha}\\ &= e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2 u}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\,\sigma^2\omega_\alpha}.\end{aligned}$$

Multipliant par l'équation (1) et posant, pour abréger,

$$(3)\qquad e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha}\sigma\omega_\alpha = \mathrm{U}_\alpha,$$

il viendra

$$(4)\qquad [\wp(u+\omega_\alpha) - e_\alpha](\wp u - e_\alpha) = \frac{1}{\mathrm{U}_\alpha^4},$$

et, pour la valeur particulière $u = \omega_\gamma$,

$$(5)\qquad (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) = \frac{1}{\mathrm{U}_\alpha^4}.$$

Posons encore dans l'équation (1) $u = \omega_\beta$; on aura

$$e_\beta - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta}\frac{\sigma^2\omega_\gamma}{\sigma^2\omega_\beta\,\sigma^2\omega_\alpha} = e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta+\eta_\gamma\omega_\gamma-\eta_\alpha\omega_\alpha-\eta_\beta\omega_\beta}\frac{\mathrm{U}_\gamma^2}{\mathrm{U}_\alpha^2\mathrm{U}_\beta^2}.$$

Mais on a

$$\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0,\qquad \eta_\alpha + \eta_\beta + \eta_\gamma = 0.$$

L'exposant de e sera donc égal à

$$-2\eta_\alpha\omega_\beta + (\eta_\alpha + \eta_\beta)(\omega_\alpha + \omega_\beta) - \eta_\alpha\omega_\alpha - \eta_\beta\omega_\beta$$
$$= \eta_\beta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_\beta = -[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2},$$

$[\alpha\beta] = [\beta\gamma] = [\gamma\alpha] = -[\beta\alpha] = -[\gamma\beta] = -[\alpha\gamma]$ étant égal à $+1$ ou à -1, selon que les périodes $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$, $2\omega_\gamma$ se suivent dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour du triangle des périodes.

On aura donc

$$(6)\qquad e_\beta - e_\alpha = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\gamma^2}{U_\alpha^2 U_\beta^2} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\gamma^4}{U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2}.$$

Permutons circulairement les indices α, β, γ et ajoutons les équations ainsi obtenues; il viendra

$$(7)\qquad U_\alpha^4 + U_\beta^4 + U_\gamma^4 = 0.$$

D'autre part, la somme $e_1 + e_2 + e_3$ étant nulle, on aura

$$3e_\alpha = e_\alpha - e_\beta + (e_\alpha - e_\gamma)$$

et, par suite,

$$(8)\qquad e_\alpha = \tfrac{1}{3} e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\beta^4 - U_\gamma^4}{U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2}.$$

366. Soit $2\omega_1'$, $2\omega_2'$, $2\omega_3'$ un nouveau triangle de périodes primitives : posons

$$p\omega_1' = e_1', \qquad p\omega_2' = e_2', \qquad p\omega_3' = e_3',$$
$$\zeta\omega_1' = \eta_1', \qquad \zeta\omega_2' = \eta_2', \qquad \zeta\omega_3' = \eta_3'.$$

Les quantités e_1', e_2', e_3' reproduiront à l'ordre près les quantités e_1, e_2, e_3; car les unes et les autres sont les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0.$$

Désignons par $2\omega_\alpha'$ celle des nouvelles périodes pour laquelle on a

$$p\omega_\alpha' = e_\alpha;$$

posons

$$e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha'\omega_\alpha'} \sigma\omega_\alpha' = U_\alpha',$$

et désignons enfin par $[\alpha\beta]'$ une unité positive ou négative, selon que les périodes $2\omega'_\alpha$, $2\omega'_\beta$, $2\omega'_\gamma$ se suivent dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour du nouveau triangle. Toutes les formules précédentes subsisteront évidemment si l'on y accentue les quantités

$$\omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\gamma, \quad \eta_\alpha,\ \eta_\beta,\ \eta_\gamma, \quad U_\alpha,\ U_\beta,\ U_\gamma \quad [\alpha\beta].$$

On aura en particulier, d'après la formule (5),

$$\frac{1}{U'^4_\alpha} = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) = \frac{1}{U^4_\alpha}.$$

Donc U'_α ne diffère de U_α que par un facteur, racine quatrième de l'unité.

La liaison entre les deux systèmes de périodes considérés étant supposée donnée, ce facteur se détermine aisément. Soit, en effet,

$$2\omega'_\alpha = 2m_\alpha\omega_\alpha + 2m_\beta\omega_\beta$$

l'expression de $2\omega'_\alpha$ en fonction de $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$.

Puisque, par hypothèse, on a

$$\wp\omega'_\alpha = \wp\omega_\alpha,$$

$\omega'_\alpha - \omega_\alpha$ sera une période; donc m_α sera un nombre impair, tel que $2n_\alpha + 1$, et m_β un nombre pair, tel que $2n_\beta$.

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} \omega &= n_\alpha\omega_\alpha + n_\beta\omega_\beta, \\ \eta &= n_\alpha\eta_\alpha + n_\beta\eta_\beta; \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} U'_\alpha &= e^{-\frac{1}{2}(\eta_\alpha + 2\eta)(\omega_\alpha + 2\omega)}\,\sigma(\omega_\alpha + 2\omega) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\eta_\alpha + 2\eta)(\omega_\alpha + 2\omega)}(-1)^{n_\alpha + n_\beta + n_\alpha n_\beta}\, e^{2\eta(\omega_\alpha + \omega)}\,\sigma\omega_\alpha \\ &= (-1)^{n_\alpha + n_\beta + n_\alpha n_\beta}\, e^{\eta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega}\, U_\alpha. \end{aligned}$$

Or on a

$$\eta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega = n_\beta(\eta_\beta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_\beta) = -n_\beta[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2},$$

d'où l'expression du facteur cherché

$$(9)\qquad \frac{U'_\alpha}{U_\alpha} = (-1)^{n_\alpha + n_\beta + n_\alpha n_\beta}\, i^{-n_\beta[\alpha\beta]}.$$

367. Supposons la fonction $p(u)$ définie non plus par ses périodes, mais par ses invariants g_2, g_3 et proposons-nous de déterminer les quantités U en partant de ces données.

Soient e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

numérotées de telle sorte que e_1, e_2, e_3 se succèdent dans le sens direct autour du triangle $e_1 e_2 e_3$. Nous avons obtenu (337) un système de périodes principales $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, définies par les intégrales

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

et telles que l'on ait

$$p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3.$$

Les η correspondants sont donnés par les intégrales analogues

$$\eta_1 = -\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \dots$$

et les U correspondants par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_3 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}}. \end{cases}$$

Mais ces dernières formules renferment des radicaux ; il en résulte une ambiguïté que nous allons lever en déterminant avec précision la valeur des arguments de U_1, U_2, U_3.

368. Désignons par $\widehat{e_1}$, $\widehat{e_2}$, $\widehat{e_3}$ les angles du triangle $e_1 e_2 e_3$; par φ l'angle du côté $e_2 e_3$ avec l'axe des x; on aura

$$\left.\begin{aligned}
\arg(e_3 - e_2) &\equiv \varphi\\
\arg(e_2 - e_3) &\equiv \varphi + \pi\\
\arg(e_1 - e_3) &\equiv \varphi + \pi - \widehat{e_3}\\
\arg(e_3 - e_1) &\equiv \varphi - \widehat{e_3}\\
\arg(e_2 - e_1) &\equiv \varphi + \widehat{e_2} + \pi\\
\arg(e_1 - e_2) &\equiv \varphi + \widehat{e_2}
\end{aligned}\right\} \bmod 2\pi,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}
\arg U_1 &\equiv -\frac{\varphi}{2} - \frac{\widehat{e_2} + \pi - \widehat{e_3}}{4} + \lambda_1 \frac{\pi}{2}\\
\arg U_2 &\equiv -\frac{\varphi}{2} - \frac{\widehat{e_2}}{4} + \lambda_2 \frac{\pi}{2}\\
\arg U_3 &\equiv -\frac{\varphi}{2} + \frac{\widehat{e_3}}{4} + \lambda_3 \frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \bmod 2\pi,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des entiers à déterminer.

Or, si l'on fait varier g_2 et g_3, les racines e_1, e_2, e_3 et les intégrales ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 variant d'une manière continue, il en sera de même des deux membres des égalités (10). Les entiers λ_1, λ_2, λ_3 conserveront donc une valeur constante, et il suffira de les déterminer dans un cas particulier.

Supposons e_1, e_2, e_3 réels, et $e_2 < e_3 < e_1$. On aura

$$\varphi = \widehat{e_2} = \widehat{e_1} = 0, \qquad \widehat{e_3} = \pi;$$

d'où

$$\arg U_1 = \lambda_1 \frac{\pi}{2}, \qquad \arg U_2 = \lambda_2 \frac{\pi}{2}.$$

Déterminons directement ces arguments. Le radical $\sqrt{Z}$ étant réel entre e_2 et e_3, imaginaire entre e_3 et e_1, ω_1, η_1 seront réels et ω_2, η_2 purement imaginaires. Leur signe dépend de la détermination qu'on voudra adopter pour le

radical; prenons, pour fixer les idées, ω_1 positif; ω_2 sera une imaginaire positive; $e^{-\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}$, $e^{-\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}$ seront réels et positifs.

Il en est de même pour $\frac{\sigma\omega_1}{\omega_1}$ et $\frac{\sigma\omega_2}{\omega_2}$. On a, en effet, par définition

$$\frac{\sigma\omega_1}{\omega_1} = \prod{}'\left(1 - \frac{\omega_1}{w}\right) e^{\frac{\omega_1}{w} + \frac{\omega_1^2}{2w^2}} \qquad (w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2).$$

Or, les facteurs pour lesquels $m_2 = 0$ sont réels et positifs; et les autres sont conjugués deux à deux, en associant ceux pour lesquels m_1 a la même valeur et m_2 des valeurs opposées.

De même, dans $\frac{\sigma\omega_2}{\omega_2}$, les facteurs où $m_1 = 0$ sont réels et positifs, et les autres conjugués deux à deux.

On aura donc

$$\arg U_1 = \arg\omega_1 = 0, \qquad \arg U_2 = \arg\omega_2 = \frac{\pi}{2}$$

et, par suite,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1.$$

Pour déterminer λ_3, nous remarquerons qu'on a généralement

$$\arg U_3 - \arg U_2 = \frac{\hat{e}_3 + \hat{e}_2}{4} + (\lambda_3 - \lambda_2)\frac{\pi}{2}.$$

Supposons e_1, e_2, e_3 réels et tels que l'on ait $e_3 < e_1 < e_2$, $\hat{e}_2$ et $\hat{e}_3$ seront nuls, et l'on aura simplement

$$\arg U_3 - \arg U_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)\frac{\pi}{2}.$$

Mais dans ce cas ω_2 est réel, ω_3 purement imaginaire, et l'on a

$$\arg U_3 - \arg U_2 = \arg\omega_3 - \arg\omega_2 = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\lambda_3 - \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2$$

et l'on a définitivement

$$(11)\qquad \begin{cases} \arg U_1 = -\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\widehat{e_2} + \pi - \widehat{e_3}}{4}, \\ \arg U_2 = -\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\widehat{e_2}}{4} + \dfrac{\pi}{2}, \\ \arg U_3 = -\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\widehat{e_3}}{4} + \pi. \end{cases}$$

Ayant déterminé ainsi sans ambiguïté les quantités U_1, U_2, U_3 correspondantes aux périodes principales, on en déduira par la formule (9) la valeur de U'_α pour une autre période quelconque ω'_α.

369. Considérons, conjointement avec la fonction $\sigma(u)$, les trois fonctions

$$(12)\qquad \begin{cases} \sigma_\alpha u = \dfrac{e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \dfrac{e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma(u+\omega_\alpha)}{U_\alpha} \\ (\alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Elles se réduisent à l'unité pour $u = 0$. En outre, elles sont paires, car on a

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(-u) &= \frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(-u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = -\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} \\ &= -\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha-2\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u}e^{-2\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} \\ &= \sigma_\alpha u. \end{aligned}$$

370. On a, en vertu de la définition précédente,

$$(13)\qquad \sigma(u+\omega_\alpha) = U_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma_\alpha u.$$

On sait d'ailleurs que

$$(14)\qquad \sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u.$$

Les nouvelles fonctions $\sigma_\alpha(u)$ jouissent de propriétés analogues :

1° On a, en effet,

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha) = \frac{e^{-\eta_\alpha\left(u+3\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma(u+2\omega_\alpha)}{U_\alpha},$$

d'où

$$(15) \qquad \sigma_\alpha(u+\omega_\alpha) = -\frac{1}{U_\alpha} e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)} \sigma u.$$

2° En second lieu, changeons u en $u+2\omega_\alpha$;

$$e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)$$

se reproduira, multiplié par le facteur

$$-e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha} e^{2\eta_\alpha(u+2\omega_\alpha)} = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}.$$

Donc

$$(16) \qquad \sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u.$$

3° Changeons u en $u+\omega_\beta$, β étant différent de α; on aura

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = \frac{1}{U_\alpha} e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}+\omega_\beta\right)} \sigma(u+\omega_\alpha+\omega_\beta).$$

Or

$$\sigma(u+\omega_\alpha+\omega_\beta) = \sigma(u-\omega_\gamma) = -e^{-2\eta_\gamma u}\sigma(u+\omega_\gamma)$$
$$= -e^{-2\eta_\gamma u} e^{\eta_\gamma\left(u+\frac{\omega_\gamma}{2}\right)} U_\gamma \sigma_\gamma u.$$

Enfin, si nous remplaçons ω_α, η_α par leurs valeurs

$$-\omega_\beta-\omega_\gamma, \qquad -\eta_\beta-\eta_\gamma,$$

l'exposant

$$-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}+\omega_\beta\right) - 2\eta_\gamma u + \eta_\gamma\left(u+\frac{\omega_\gamma}{2}\right)$$

se transformera en

$$\eta_\beta\left(u+\frac{\omega_\beta}{2}\right) - \frac{(\eta_\beta\omega_\gamma - \eta_\gamma\omega_\beta)}{2} = \eta_\beta\left(u+\frac{\omega_\beta}{2}\right) - [\beta\gamma]\frac{\pi i}{4}.$$

D'ailleurs $[\beta\gamma] = [\alpha\beta]$. On a donc finalement

$$(17) \qquad \sigma_\alpha(u + \omega_\beta) = -e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \frac{U_\gamma}{U_\alpha} e^{\eta_\beta\left(u + \frac{\omega_\beta}{2}\right)} \sigma_\gamma u.$$

4° Changeons enfin u en $u + 2\omega_\beta$; $e^{-\eta_\alpha u}$ sera multiplié par $e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta}$, et $\sigma(u + \omega_\alpha)$ par $-e^{2\eta_\beta(u+\omega_\alpha+\omega_\beta)}$. D'ailleurs

$$e^{2\eta_\beta\omega_\alpha - 2\eta_\alpha\omega_\beta} = e^{-[\alpha\beta]\pi i} = -1;$$

donc

$$(18) \qquad \sigma_\alpha(u + 2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)} \sigma_\alpha u.$$

371. Formons les quotients deux à deux des quatre fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; nous obtiendrons douze fonctions nouvelles, appartenant aux trois types suivants :

$$(19) \qquad \sigma_{\alpha 0}\, u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sqrt{p u - e_\alpha},$$

$$(20) \qquad \sigma_{0\alpha}\, u = \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} = \frac{1}{\sqrt{p u - e_\alpha}},$$

$$(21) \qquad \sigma_{\alpha\beta}\, u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u} = \sqrt{\frac{p u - e_\alpha}{p u - e_\beta}}.$$

On voit aisément comment se transforment ces nouvelles fonctions lorsqu'on accroît u d'une demi-période ou d'une période : on a, en effet,

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_{\alpha 0}(u + \omega_\alpha) = \dfrac{\sigma_\alpha(u + \omega_\alpha)}{\sigma(u + \omega_\alpha)} = -\dfrac{1}{U_\alpha^2} \sigma_{0\alpha} u, \\[2ex] \sigma_{\alpha 0}(u + \omega_\beta) = \dfrac{\sigma_\alpha(u + \omega_\beta)}{\sigma(u + \omega_\beta)} = -e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \dfrac{U_\gamma}{U_\alpha U_\beta} \sigma_{\gamma\beta} u, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} \sigma_{0\alpha}(u + \omega_\alpha) = \dfrac{1}{\sigma_{\alpha 0}(u + \omega_\alpha)} = -U_\alpha^2 \sigma_{\alpha 0} u, \\[2ex] \sigma_{0\alpha}(u + \omega_\beta) = \dfrac{1}{\sigma_{\alpha 0}(u + \omega_\beta)} = -e^{[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \dfrac{U_\alpha U_\beta}{U_\gamma} \sigma_{\beta\gamma} u, \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(u+\omega_\alpha) = \dfrac{\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha)}{\sigma_\beta(u+\omega_\alpha)} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \dfrac{U_\beta}{U_\alpha U_\gamma}\sigma_{0\gamma}u, \\ \sigma_{\alpha\beta}(u+\omega_\beta) = \dfrac{\sigma_\alpha(u+\omega_\beta)}{\sigma_\beta(u+\omega_\beta)} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \dfrac{U_\beta U_\gamma}{U_\alpha}\sigma_{\gamma 0}u, \\ \sigma_{\alpha\beta}(u+\omega_\gamma) = \dfrac{\sigma_\alpha(u+\omega_\gamma)}{\sigma_\beta(u+\omega_\gamma)} = e^{[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \dfrac{U_\beta^2}{U_\alpha^2}\sigma_{\beta\alpha}u, \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma_{\alpha 0}(u+2\omega_\alpha) = \dfrac{\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha)}{\sigma(u+2\omega_\alpha)} = \sigma_{\alpha 0}u, \\ \sigma_{\alpha 0}(u+2\omega_\beta) = \dfrac{\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta)}{\sigma(u+2\omega_\beta)} = -\sigma_{\alpha 0}u, \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \sigma_{0\alpha}(u+2\omega_\alpha) = \sigma_{0\alpha}u, \\ \sigma_{0\alpha}(u+2\omega_\beta) = -\sigma_{0\alpha}u, \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(u+2\omega_\alpha) = -\sigma_{\alpha\beta}u, \\ \sigma_{\alpha\beta}(u+2\omega_\beta) = -\sigma_{\alpha\beta}u, \\ \sigma_{\alpha\beta}(u+2\omega_\gamma) = \sigma_{\alpha\beta}u. \end{cases}$$

Ainsi, sur les douze fonctions, il en est quatre, à savoir $\sigma_{\alpha 0}$, $\sigma_{0\alpha}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\beta}$, qui admettent la période $2\omega_\alpha$; mais elles changent de signe lorsque u s'accroît de l'une des deux autres périodes $2\omega_\beta$ ou $2\omega_\gamma$.

Les fonctions $\sigma_{\alpha 0}$ et $\sigma_{0\alpha}$ sont impaires, et les fonctions $\sigma_{\beta\gamma}$ paires. Pour $u=0$, les fonctions $\sigma_{\beta\gamma}$ se réduisent à $+1$; $\sigma_{\alpha 0}$ devient infini, et sa valeur principale est $\frac{1}{u}$; $\sigma_{0\alpha}$ s'annule, et sa valeur principale est u; sa dérivée se réduit donc à 1.

372. On a, d'après les formules (19),

$$(28)\qquad pu = e_\alpha + \sigma_{\alpha 0}^2 u = e_\beta + \sigma_{\beta 0}^2 u = e_\gamma + \sigma_{\gamma 0}^2 u,$$

d'où, en divisant par $\sigma_{\beta 0}^2 u$,

$$(29)\qquad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^2 u = 1 - (e_\alpha - e_\beta)\sigma_{0\beta}^2 u, \\ \sigma_{\gamma\beta}^2 u = 1 - (e_\gamma - e_\beta)\sigma_{0\beta}^2 u. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$(30)\qquad e_\alpha - e_\beta = M^2_{\alpha\beta}, \qquad \frac{e_\gamma - e_\beta}{e_\alpha - e_\beta} = \frac{M^2_{\gamma\beta}}{M^2_{\alpha\beta}} = k^2_{\gamma\alpha}.$$

Les trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, définies par les relations

$$(31)\qquad \operatorname{sn} u = M_{\alpha\beta}\,\sigma_{0\beta}\left(\frac{u}{M_{\alpha\beta}}\right),$$

$$(32)\qquad \operatorname{cn} u = \sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{u}{M_{\alpha\beta}}\right),$$

$$(33)\qquad \operatorname{dn} u = \sigma_{\gamma\beta}\left(\frac{u}{M_{\alpha\beta}}\right),$$

sont les anciennes fonctions elliptiques étudiées par Abel et Jacobi. Elles dépendent des deux paramètres $M_{\alpha\beta}$ et $k_{\gamma\alpha}$, qu'on nomme le *multiplicateur* et le *module*. Ceux-ci ne sont définis que par leur carré, mais leur signe est indifférent. En effet, $M^2_{\alpha\beta}$ et $k^2_{\gamma\alpha}$ étant supposés connus, on en déduit e_α, e_β, e_γ par les équations (30) jointes à la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Les fonctions $\sigma_{0\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\gamma\beta}$ seront donc déterminées sans ambiguïté. D'ailleurs la première est impaire et les deux autres paires. Donc le changement de signe de $M_{\alpha\beta}$ n'altérera pas $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; quant à $k_{\gamma\alpha}$, il ne figure dans leur définition que par son carré.

En permutant les indices α, β, γ, on obtiendra six groupes de fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ associés à une même fonction pu. Leurs six modules satisfont évidemment aux relations

$$k^2_{\alpha\gamma}\,k^2_{\gamma\alpha} = 1, \qquad k^2_{\gamma\alpha} + k^2_{\gamma\beta} = 1.$$

Ils s'exprimeront donc au moyen d'un seul d'entre eux, $k_{\gamma\alpha}$, par exemple, par les formules

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} & k^2_{\alpha\gamma} = \frac{1}{k^2_{\gamma\alpha}}, \qquad k^2_{\gamma\beta} = 1 - k^2_{\gamma\alpha}, \qquad k^2_{\beta\gamma} = \frac{1}{1 - k^2_{\gamma\alpha}}, \\ & k^2_{\alpha\beta} = 1 - k^2_{\alpha\gamma} = \frac{k^2_{\gamma\alpha} - 1}{k^2_{\gamma\alpha}}, \qquad k^2_{\beta\alpha} = \frac{k^2_{\gamma\alpha}}{k^2_{\gamma\alpha} - 1}. \end{aligned} \right.$$

Dans ce qui suit, nous n'aurons à considérer qu'un seul

multiplicateur, $M_{\alpha\beta}$, et un seul module, $k_{\gamma\alpha}$. Nous simplifierons l'écriture en supprimant les indices et en les désignant par M et k.

373. Pour $u=0$, on a évidemment

(35) $\operatorname{sn} u = 0, \qquad \operatorname{sn}' u = 1, \qquad \operatorname{cn} u = 1, \qquad \operatorname{dn} u = 1$

et, généralement, d'après les équations (29),

(36) $\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$

Enfin, $\operatorname{sn} u$ satisfait à une équation différentielle que nous allons obtenir en transformant l'équation

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma).$$

On a, en effet,

$$\wp u = e_\beta + \frac{1}{\sigma_{0\beta}^2 u},$$

d'où

$$\wp' u = -2\frac{\sigma'_{0\beta} u}{\sigma_{0\beta}^3 u}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation différentielle, il vient

$$\begin{aligned}\sigma'^2_{0\beta} u &= [1-(e_\alpha - e_\beta)\sigma_{0\beta}^2 u][1-(e_\gamma - e_\beta)\sigma_{0\beta}^2 u] \\ &= (1 - M^2\sigma_{0\beta}^2 u)(1 - M^2 k^2 \sigma_{0\beta}^2 u),\end{aligned}$$

$$(\operatorname{sn}' u)^2 = \sigma'^2_{0\beta}\left(\frac{u}{M}\right) = \left[1 - M^2\sigma_{0\beta}^2\left(\frac{u}{M}\right)\right]\left[1 - M^2 k^2 \sigma_{0\beta}^2\left(\frac{u}{M}\right)\right]$$

et, enfin,

(37) $(\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u).$

Cette équation différentielle, jointe aux relations (36) et aux conditions initiales (35), peut servir de définition directe pour les trois fonctions.

374. Posons, pour abréger,

$$M\omega_\alpha = \Omega_\alpha, \qquad M\omega_\beta = \Omega_\beta, \qquad M\omega_\gamma = \Omega_\gamma;$$

on voit immédiatement :

1° Que $\operatorname{sn} u$ est une fonction impaire admettant les zéros simples

$$2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta;$$

2° $\operatorname{cn} u$ est paire et admet les zéros simples

$$2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\alpha;$$

3° $\operatorname{dn} u$ est paire et admet les zéros simples

$$2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\gamma;$$

4° Les trois fonctions admettent les pôles simples

$$2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\beta;$$

5° On a

$$(38)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\beta) = \operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\gamma) = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\gamma) = \operatorname{cn} u, & \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\beta) = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{dn} u, & \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\beta) = \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\gamma) = -\operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Les trois fonctions sont donc doublement périodiques; mais leurs périodes fondamentales ne sont pas les mêmes. Ce sont

Pour $\operatorname{sn} u$.......	$2\Omega_\beta$,	et	$4\Omega_\gamma$	ou	$4\Omega_\alpha$,
Pour $\operatorname{cn} u$.......	$2\Omega_\gamma$,	et	$4\Omega_\alpha$	ou	$4\Omega_\beta$,
Pour $\operatorname{dn} u$.......	$2\Omega_\alpha$,	et	$4\Omega_\beta$	ou	$4\Omega_\gamma$.

375. Signalons encore les formules d'addition

$$(39)\qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$(40)\qquad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$(41)\qquad \operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Pour établir la première, considérons les trois fonctions

$$\operatorname{sn}(u+v)-\operatorname{sn}(u-v), \qquad \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad 1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v.$$

Elles sont évidemment paires et admettent les périodes communes $2\Omega_\beta$, $4\Omega_\alpha$. La première a pour pôles simples les points

$$\pm v+2m\Omega_\alpha+2m'\Omega_\beta+\Omega_\beta;$$

chaque parallélogramme des périodes en contient quatre.

Les deux autres fonctions ont pour pôles doubles les points

$$2m\Omega_\alpha+2m'\Omega_\beta+\Omega_\beta,$$

et chaque parallélogramme en contient deux.

Chaque parallélogramme devra donc contenir quatre zéros de chacune des trois fonctions. Cherchons à les déterminer.

La première s'annule aux points Ω_α, Ω_γ; car on a, par exemple,

$$\operatorname{sn}(\Omega_\alpha+v)-\operatorname{sn}(\Omega_\alpha-v)=\operatorname{sn}(\Omega_\alpha+v)+\operatorname{sn}(-\Omega_\alpha-v)=0.$$

Comme elle se reproduit, d'ailleurs, au signe près, lorsque u croît de $2\Omega_\alpha$ ou de $2\Omega_\beta$, elle admettra, plus généralement, les zéros

$$2m\Omega_\alpha+2m'\Omega_\beta+\Omega_\alpha, \qquad 2m\Omega_\alpha+2m'\Omega_\beta+\Omega_\gamma,$$

et comme ceux-ci sont au nombre de quatre dans un parallélogramme, elle n'en aura pas d'autre.

La fonction $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ admet évidemment les mêmes zéros.

Considérons enfin la dernière fonction; on a

$$1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = 1-k^2 M^4 \sigma_{0\beta}^2\left(\frac{u}{M}\right)\sigma_{0\beta}^2\left(\frac{v}{M}\right).$$

D'ailleurs

$$k^2 M^4=(e_\alpha-e_\beta)(e_\gamma-e_\beta)=\frac{1}{U_\beta^4}$$

et

$$\sigma_{0\beta}^2\left(\frac{u}{M}\right)\sigma_{0\beta}^2\left(\frac{v}{M}\right)=\frac{1}{\left[p\left(\frac{u}{M}\right)-e_\beta\right]\left[p\left(\frac{v}{M}\right)-e_\beta\right]}.$$

Or, d'après la formule (4), on aura

$$\left[p\left(\frac{u}{M}\right) - e_\beta\right]\left[p\left(\frac{v}{M}\right) - e_\beta\right] = \frac{1}{U_\beta^4}$$

si

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{M} + \omega_\beta,$$

d'où

$$u = v + \Omega_\beta.$$

Donc $u = v + \Omega_\beta$ est un des zéros de la fonction $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v$; comme elle est paire et admet les périodes $2\Omega_\alpha$, $2\Omega_\beta$, elle admettra plus généralement les zéros

$$\pm v + \Omega_\beta + 2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta.$$

Ceux-ci étant au nombre de quatre par parallélogramme, elle n'en aura pas d'autre.

Il résulte de cette analyse que le quotient

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

a les mêmes zéros et les mêmes pôles que $\operatorname{sn}(u+v) - \operatorname{sn}(u-v)$. Ces deux fonctions ne peuvent différer que par un facteur constant, qu'on déterminera en posant $u = 0$. On trouve ainsi

$$(42) \qquad \operatorname{sn}(u+v) - \operatorname{sn}(u-v) = \frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Permutant u, v et ajoutant l'équation ainsi obtenue avec la précédente, on obtiendra la formule (39).

376. Les formules (40) et (41) en sont une conséquence immédiate. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}^2(u+v) &= 1 - \operatorname{sn}^2(u+v)\\ &= \frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2 - (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2}.\end{aligned}$$

Or on a

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v = \operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u.$$

Remplaçant donc au numérateur le terme $(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2$ par

$$(\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v)(\operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u),$$

il prendra la forme

$$(\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v)^2.$$

Extrayant la racine carrée, on aura donc

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \pm \operatorname{cn}(u + v).$$

Pour fixer le signe, on posera $v = 0$. Le premier membre se réduisant à $\operatorname{cn} u$, on doit prendre le signe $+$.

L'expression de $\operatorname{dn}(u + v)$ se vérifie de même.

V. — Les fonctions θv, $\theta_\alpha v$.

377. Jusqu'à présent, nous avons désigné par $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ trois périodes quelconques formant un triangle primitif. Dorénavant nous les supposerons, pour plus de simplicité, numérotées dans l'ordre où elles se succèdent lorsqu'on tourne dans le sens direct autour du triangle, de telle sorte que le rapport $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait sa partie imaginaire positive et que, par suite, on ait $[12] = +1$.

378. Si l'on change u en $u + 2\omega_1$, chacune des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ se reproduit (370) multipliée par un facteur égal au signe près à $e^{2\eta_1(u+\omega_1)}$. La fonction $e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduit aussi, multipliée par cette même exponentielle. Chacune des quatre fonctions

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u}{2\omega_1}, \quad e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_1 u, \quad \ldots, \quad e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_3 u$$

se reproduira donc au signe près.

Ces expressions sont d'ailleurs homogènes et de degré

zéro en u, ω_1, ω_2 (car $\eta_1 = \zeta\omega_1$ est homogène de degré -1). Elles ne dépendent donc, en réalité, que des deux rapports

$$(1) \qquad v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(2) \qquad e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i \tau} = q$$

$\left(\text{et, plus généralement, } e^{\frac{\pi i \tau}{m}} = q^{\frac{1}{m}}\right)$; nous pourrons écrire

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u}{2\omega_1} = \mathrm{F}(v, \tau) = \mathfrak{F}(z, q).$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_\alpha u = \mathrm{F}_\alpha(v, \tau) = \mathfrak{F}_\alpha(z, q).$$

379. Les nouvelles fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$ ainsi introduites sont des fonctions uniformes de la variable z (q étant considéré comme un paramètre constant). Car à une valeur z_0 de z correspondent des valeurs de v données par la formule $v_0 + 2m$ (m entier); les valeurs correspondantes de u seront $u_0 + 4m\omega_1$ et donneront les mêmes valeurs à chacune des fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$, puisque le changement de u en $u + 2\omega_1$ les reproduit au signe près.

En outre, F, F_α sont des fonctions entières de v, qui, lui-même, considéré comme fonction de z, n'a d'autre point critique que $z = 0$. Donc les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$ n'ont que ce seul point critique et seront développables par la formule de Laurent en séries convergentes, procédant suivant les puissances entières positives et négatives de z.

Si u croît de $2\omega_1$, v se changera en $v+1$, et z en $-z$. L'exponentielle $e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduira, multipliée par $e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}$; σu, $\sigma_1 u$ seront multipliés par $-e^{2\eta_1(u+\omega_1)}$, et $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ par ce même facteur changé de signe (370); nous aurons donc

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(-z, q) = -\mathfrak{F}(z, q), & \mathfrak{F}_1(-z, q) = -\mathfrak{F}_1(z, q), \\ \mathfrak{F}_2(-z, q) = \mathfrak{F}_2(z, q), & \mathfrak{F}_3(-z, q) = \mathfrak{F}_3(z, q). \end{cases}$$

Enfin, si u croît de $2\omega_2$, v se changera en $v+\tau$, et z en qz. L'exponentielle $e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduira, multipliée par

$$e^{-\frac{2\eta_1\omega_2}{\omega_1}(u+\omega_2)}$$

ou, en remplaçant $\eta_1\omega_2$ par sa valeur tirée de l'équation

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \frac{\pi i}{2}$$

par

$$e^{-\frac{\pi i + 2\omega_1\eta_2}{\omega_1}(u+\omega_2)} = q^{-1}z^{-2}e^{-2\eta_2(u+\omega_2)}.$$

D'ailleurs σu, $\sigma_2 u$ se reproduisent, multipliés par $-e^{2\eta_2(u+\omega_2)}$, et $\sigma_1 u$, $\sigma_3 u$ se reproduisent, multipliés par le même facteur, changé de signe. Nous aurons donc

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{F}(qz,q) = -q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}(z,q), & \mathfrak{F}_1(qz,q) = q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_1(z,q), \\ \mathfrak{F}_2(qz,q) = -q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_2(z,q), & \mathfrak{F}_3(qz,q) = q^{-1}z^{-2}\mathfrak{F}_3(z,q). \end{array}\right.$$

380. Les propriétés (3) et (4) (jointes à la condition d'être uniformes et de n'avoir de point critique que pour $z=0$) suffisent à définir les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ à des facteurs constants près :

1° En effet, considérons d'abord la fonction $\mathfrak{F}(z,q)$. D'après les relations (3), elle sera impaire en z; son développement en série sera donc de la forme

$$\mathfrak{F}(z,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n+1}.$$

Substituons ce développement dans la première des formules (4); il vient

$$\sum A_n q^{2n+1} z^{2n+1} = -\sum A_n q^{-1} z^{2n-1},$$

et, en identifiant les termes en z^{2n-1},

$$\begin{aligned} A_n &= -q^{2n}A_{n-1} = (-1)^{n-1}q^{2n+2(n-1)+\dots}A_1 \\ &= (-1)^{n-1}q^{n(n+1)}A_1 = \frac{(-1)^n}{i}\,q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\frac{q^{-\frac{1}{4}}A_1}{i}. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$\frac{q^{-\frac{1}{4}}A_1}{i} = A,$$

nous aurons

$$\mathcal{F}(z, q) = A\,\theta(v, \tau),$$

$\theta(v, \tau)$ désignant la série

$$(5)\quad \begin{cases} \theta(v, \tau) = \dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1} \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i v}. \end{cases}$$

A chaque valeur positive ou nulle de l'indice n est associée une autre valeur négative $-n-1$, à laquelle correspond le terme

$$\frac{1}{i}(-1)^{-n-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-(2n+1)\pi i v}.$$

Réunissant les termes associés, nous obtiendrons cette nouvelle expression

$$(5\ bis)\quad \theta(v, \tau) = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v,$$

où l'imaginaire i a cessé de figurer.

2° Passons à la fonction $\mathcal{F}_1$. D'après les relations (3), elle sera impaire en z, et de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} B_n z^{2n+1}.$$

Substituons ce développement dans la seconde des relations (4); il viendra

$$\sum B_n q^{2n+1} z^{2n+1} = \sum B_n q^{-1} z^{2n-1};$$

d'où

$$B_n = q^{2n} B_{n-1} = q^{n(n+1)} B_1 = q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{-\frac{1}{4}} B_1.$$

Posant donc

$$q^{-\frac{1}{4}} B_1 = B,$$

nous aurons

$$\mathcal{F}_1(z, q) = B\, \theta_1(v, \tau),$$

$\theta_1(v, \tau)$ désignant la série

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1(v, \tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i v} \\ &= 2 \sum_{0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\pi v. \end{aligned} \right.$$

3° La fonction $\mathcal{F}_2$ sera paire en z et de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^{2n}.$$

Substituons ce développement dans la troisième relation (4), il vient

$$\sum C_n q^{2n} z^{2n} = -\sum C_n q^{-1} z^{2n-2},$$

et, en identifiant les termes en z^{2n-2},

$$\begin{aligned} C_n &= -q^{2n-1} C_{n-1} \\ &= (-1)^n q^{(2n-1)+(2n-3)+\ldots} C_0 = (-1)^n q^{n^2} C_0. \end{aligned}$$

Posant donc $C_0 = C$, nous aurons

$$\mathcal{F}_2 = C\, \theta_2(v, \tau),$$

$\theta_2(v, \tau)$ représentant la série

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_2(v, \tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi i v} \\ &= 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \quad {}^{n^2} \cos 2n\pi v. \end{aligned} \right.$$

4° Enfin la fonction $\mathcal{F}_3$ sera paire en z, et d'après la der-

nière relation (4), on aura

$$\mathfrak{F}_3 = D\,\theta_3(v, \tau),$$

$\theta_3(v, \tau)$ désignant la série

$$(8)\quad \begin{cases} \theta_3(v, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi i v} \\ \qquad = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v. \end{cases}$$

381. Les séries θ, θ_1, θ_2, θ_3, définies au numéro précédent, ont été introduites dans l'Analyse par Jacobi; mais la notation qui doit servir pour les représenter n'est pas encore bien fixée. M. Weierstrass, suivi par M. Halphen, les désigne respectivement par $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_3$. Par le changement d'indices que nous avons pris la liberté de faire, on rétablit le parallélisme des notations entre ces fonctions et les σ correspondants.

382. Si nous remplaçons q par sa valeur $e^{\pi i \tau}$, chacun des termes des séries θ, θ_α sera de la forme

$$T = a\, e^{\pi i(\lambda^2 \tau + 2\lambda v)},$$

a et λ étant des constantes. On aura évidemment

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \pi i \lambda^2 T, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = (2\pi i \lambda)^2 T;$$

d'où

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Les séries θ, θ_α, étant des sommes de termes de ce genre, satisferont évidemment à cette même équation aux dérivées partielles; et leurs dérivées y satisferont aussi.

383. Lorsque nous n'aurons pas à faire varier le paramètre τ, nous pourrons le supprimer dans l'écriture et désigner les séries ci-dessus par $\theta v, \ldots, \theta_\alpha v$, et leurs dérivées (relatives à v) par $\theta' v$, $\theta'' v$, $\ldots$, $\theta'_\alpha v$, ... Dans le cas excep-

tionnel où τ sera variable, les dérivées relatives à τ seront représentées suivant l'usage par $\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$, ...

D'après les expressions données ci-dessus pour θ, ..., θ_α, on aura évidemment pour $v = 0$, d'où $z = 1$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta_1 0 &= 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \sum_{-\infty}^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},\\
\theta_2 0 &= 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} = \sum_{-\infty}^\infty (-1)^n q^{n^2},\\
\theta_3 0 &= 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = \sum_{-\infty}^\infty q^{n^2},\\
\theta 0 &= 0,\\
\theta' 0 &= 2\pi \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(2n+1),\\
\theta'' 0 &= 0,\\
\theta''' 0 &= -2\pi^3 \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(2n+1)^3.
\end{aligned}\right.$$

384. Si l'on fait croître u de ω_1, ω_2, ω_3, v croîtra respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$, et z sera respectivement multiplié par i, $q^{\frac{1}{2}}$, $-iq^{-\frac{1}{2}}$. Ces divers changements permuteront les unes dans les autres les quatre fonctions θ, à des facteurs exponentiels près, comme l'indique le Tableau suivant :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta\left(v+\tfrac{1}{2}\right) &= \theta_1 v, &\qquad \theta_1\left(v+\tfrac{1}{2}\right) &= -\theta v,\\
\theta_2\left(v+\tfrac{1}{2}\right) &= \theta_3 v, &\qquad \theta_3\left(v+\tfrac{1}{2}\right) &= \theta_2 v,
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta\left(v+\tfrac{1}{2}\tau\right) &= iq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\theta_2 v, &\qquad \theta_1\left(v+\tfrac{1}{2}\tau\right) &= q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\theta_3 v,\\
\theta_2\left(v+\tfrac{1}{2}\tau\right) &= iq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\theta v, &\qquad \theta_3\left(v+\tfrac{1}{2}\tau\right) &= q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\theta_1 v,
\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta\left(v-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau\right) &= -q^{-\frac{1}{4}}z\theta_3 v, &\qquad \theta_1\left(v-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau\right) &= -iq^{-\frac{1}{4}}z\theta_2,\\
\theta_2\left(v-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau\right) &= q^{-\frac{1}{4}}z\theta_1 v, &\qquad \theta_3\left(v-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau\right) &= -iq^{-\frac{1}{4}}z\theta v.
\end{aligned}\right.$$

On a, en effet,

$$\theta(v+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(iz)^{2n+1}$$
$$= \sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1} = \theta_1 v.$$

D'autre part,

$$\theta(v+\tfrac{1}{2}\tau) = \frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(q^{\frac{1}{2}}z\right)^{2n+1}$$
$$= i\sum(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2-\frac{1}{4}} z^{2n+1}$$
$$= iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\sum(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} z^{2n+2},$$

expression qui se réduit à $iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\theta_2 v$ lorsqu'on y change l'indice de sommation n en $n-1$.

On a encore

$$\theta(v-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau) = \frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(-iq^{-\frac{1}{2}}z\right)^{2n+1}$$
$$= -\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2n+1}{2}} z^{2n+1}$$
$$= -q^{-\frac{1}{4}} z\sum q^{n^2} z^{2n} = -q^{-\frac{1}{4}} z\,\theta_3 v.$$

Les autres formules se vérifient avec la même facilité.

385. En ajoutant une seconde fois à la variable l'une ou l'autre des quantités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\tau$, on obtient les formules

$$(14)\quad \begin{cases} \theta\,(v+1) = -\theta\, v, & \theta_1(v+1) = -\theta_1 v, \\ \theta_2(v+1) = \theta_2 v, & \theta_3(v+1) = \theta_3 v; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \theta\,(v+\tau) = -q^{-1}z^{-2}\theta\, v, & \theta_1(v+\tau) = q^{-1}z^{-2}\theta_1 v, \\ \theta_2(v+\tau) = -q^{-1}z^{-2}\theta_2 v, & \theta_3(v+\tau) = q^{-1}z^{-2}\theta_3 v; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \theta\,(v-1-\tau) = q^{-1}z^2\theta\, v, & \theta_1(v-1-\tau) = -q^{-1}z^2\theta_1 v, \\ \theta_2(v-1-\tau) = -q^{-1}z^2\theta_2 v, & \theta_3(v-1-\tau) = q^{-1}z^2\theta_3 v. \end{cases}$$

386. On a, d'après le n° 380,

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma u}{2\omega_1} = \mathfrak{F}(z, q) = \mathrm{A}\theta v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_1 u = \mathfrak{F}_1(z, q) = \mathrm{B}\theta_1 v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_2 u = \mathfrak{F}_2(z, q) = \mathrm{C}\theta_2 v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_3 u = \mathfrak{F}_3(z, q) = \mathrm{D}\theta_3 v.$$

Il reste à déterminer les constantes A, B, C, D. Pour cela, posons dans les trois dernières équations $v = 0$, d'où $u = 0$; elles deviendront

$$1 = \mathrm{B}\theta_1(0), \qquad 1 = \mathrm{C}\theta_2(0), \qquad 1 = \mathrm{D}\theta_3(0).$$

La première équation devient identique pour $v = 0$. Mais supposons v infiniment petit, et calculons les deux premiers termes du développement des deux membres suivant les puissances de v; nous aurons

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} = e^{-2\eta_1\omega_1 v^2} = 1 - 2\eta_1\omega_1 v^2 + \ldots,$$

$$\frac{\sigma u}{2\omega_1} = \frac{\sigma 2\omega_1 v}{2\omega_1} = v + \alpha v^5 + \ldots.$$

Le développement du premier membre sera donc

$$v - 2\eta_1\omega_1 v^3 + \ldots.$$

Celui du second membre sera

$$\mathrm{A}\left[v\theta'(0) + \frac{v^3\theta'''(0)}{6} + \ldots\right],$$

et l'identification donnera

$$1 = \mathrm{A}\theta'(0), \qquad 2\eta_1\omega_1 = -\mathrm{A}\frac{\theta'''(0)}{6}.$$

Nous aurons donc finalement

$$(17)\qquad \sigma u = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta(v)}{\theta'(o)},$$

$$(18)\qquad \sigma_\alpha u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(o)},$$

la constante $2\eta_1\omega_1$ étant donnée elle-même en fonction de q par la formule

$$(19)\qquad 2\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{6}\frac{\theta'''(o)}{\theta'(o)}.$$

Par ces formules, σu, $\sigma_\alpha u$ seront donc exprimées en fonction des trois variables ω_1, $q^{\frac{1}{4}}$, v, qui elles-mêmes sont liées à ω_1, ω_2, u par les relations

$$(20)\qquad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1}}, \qquad v = \frac{u}{2\omega_1}.$$

387. On aura ensuite

$$(21)\quad \zeta u = \frac{d\log\sigma u}{du} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{d\log\sigma u}{dv} = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \frac{\theta'(v)}{\theta(v)}\right],$$

$$(22)\quad pu = -\frac{d\zeta u}{du} = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{\theta(v)\theta''(v) - \theta'^2(v)}{\theta^2(v)}\right].$$

D'autre part

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(o)\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(o)\theta(v)},$$

d'où cette nouvelle expression de pu

$$(23)\qquad pu = e_\alpha + \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(o)\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(o)\theta(v)}\right]^2.$$

388. Développons cette expression suivant les puissances croissantes de v. La fonction $\theta(v)$ étant impaire, et la fonction $\theta_\alpha(v)$ paire, on aura

$$\frac{\theta(v)}{\theta'(o)} = v + \frac{v^3}{6}\frac{\theta'''(o)}{\theta'(o)} + \dots, \qquad \frac{\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(o)} = 1 + \frac{v^2}{2}\frac{\theta''_\alpha(o)}{\theta_\alpha(o)} + \dots.$$

Le terme indépendant de v dans le développement sera donc

$$e_\alpha + \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)} - \frac{1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}\right],$$

et, comme on sait qu'il doit disparaître, on aura

(24) $$e_\alpha = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} - \frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)}\right].$$

389. Posons dans cette équation $\alpha = 1, 2, 3$, et ajoutons les résultats; nous obtiendrons l'identité

$$\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} - \sum \frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)} = 0.$$

On a d'ailleurs (382)

$$\theta'''(v) = \frac{\partial^2 \theta'(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta'(v)}{\partial \tau}, \qquad \theta''_\alpha(v) = 4\pi i \frac{\partial \theta_\alpha(v)}{\partial \tau},$$

et, en faisant $v = 0$, on aura en particulier

$$\theta'''(0) = 4\pi i \frac{d\theta'(0)}{d\tau}, \qquad \theta''_\alpha(0) = 4\pi i \frac{d\theta_\alpha(0)}{d\tau}.$$

L'identité précédente peut donc s'écrire

$$0 = \frac{\dfrac{d\theta'(0)}{d\tau}}{\theta'(0)} - \sum \frac{\dfrac{d\theta_\alpha(0)}{d\tau}}{\theta_\alpha(0)} = \frac{d}{d\tau} \log \frac{\theta'(0)}{\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0)}.$$

Le quotient de $\theta'(0)$ par $\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0)$ est donc une constante. Pour la déterminer, supposons q infiniment petit; on aura, d'après les formules (10),

$$\theta'(0) = 2\pi\left(q^{\frac{1}{4}} + \ldots\right), \qquad \theta_1(0) = 2q^{\frac{1}{4}} + \ldots;$$
$$\theta_2(0) = 1 + \ldots, \qquad \theta_3(0) = 1 + \ldots.$$

Le rapport cherché sera donc égal à π, et l'on aura l'identité

(25) $$\theta'(0) = \pi\,\theta_1(0)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0).$$

390. On a

$$U_\alpha = e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha}\sigma\omega_\alpha = e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha}.2\omega_1 e^{\frac{\eta_1\omega_\alpha^2}{2\omega_1}} \frac{\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right)}{\theta'(0)}$$

$$= 2\omega_1 e^{\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}(\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1)} \frac{\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right)}{\theta'(0)}.$$

Si $\alpha = 1$, le facteur exponentiel se réduit à l'unité ; d'autre part (formules 11)

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta(\tfrac{1}{2}) = \theta_1(0).$$

Donc

(26) $$U_1 = 2\omega_1 \frac{\theta_1(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{1}{\theta_2(0)\theta_3(0)}.$$

Si $\alpha = 2$, $\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ et l'exponentielle se réduit à

$$e^{\frac{\pi i\tau}{4}} = q^{\frac{1}{4}};$$

d'autre part (formules 12),

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta\left(\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0).$$

Donc

(27) $$U_2 = 2\omega_1 i \frac{\theta_2(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{i}{\theta_1(0)\theta_3(0)}.$$

Enfin, si $\alpha = 3$, $\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1 = -\frac{\pi i}{2}$, $\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1} = -\frac{1+\tau}{2}$, l'exponentielle se réduit à

$$e^{(1+\tau)\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{4}} q^{\frac{1}{4}}.$$

D'autre part (formules 13),

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta\left(-\frac{1+\tau}{2}\right) = -q^{-\frac{1}{4}}\theta_3(0)$$

et, par suite,

$$(28)\qquad U_3 = -2\omega_1 e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\theta_3(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{-e^{\frac{\pi i}{4}}}{\theta_1(0)\theta_2(0)}.$$

391. On a (365)

$$U_1^4 + U_2^4 + U_3^4 = 0.$$

Substituant dans cette relation les valeurs ci-dessus de U_1, U_2, U_3, nous obtiendrons une nouvelle identité

$$(29)\qquad \theta_1^4(0) + \theta_2^4(0) - \theta_3^4(0) = 0.$$

Les formules (6) du même numéro donneront de même

$$(30)\qquad \begin{cases} e_3 - e_2 = \dfrac{-iU_1^2}{U_2^2 U_3^2} = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_1^4(0), \\ e_1 - e_3 = \dfrac{-iU_2^2}{U_3^2 U_1^2} = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_2^4(0), \\ e_2 - e_1 = \dfrac{-iU_3^2}{U_1^2 U_2^2} = -\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0); \end{cases}$$

puis ces nouvelles expressions de e_1, e_2, e_3,

$$(31)\qquad \begin{cases} 3e_1 = e_1 - e_3 - (e_2 - e_1) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)], \\ 3e_2 = e_2 - e_1 - (e_3 - e_2) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [-\theta_3^4(0) - \theta_1^4(0)], \\ 3e_3 = e_3 - e_2 - (e_1 - e_3) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\theta_1^4(0) - \theta_2^4(0)]. \end{cases}$$

Ajoutons les carrés des équations (30), il viendra

$$\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 [\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)] = (e_3 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_1)^2$$
$$= 2(e_1 + e_2 + e_3)^2 - 6(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = \tfrac{3}{2} g_2;$$

d'où

$$(32)\qquad g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 [\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)].$$

Le second invariant $g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$ s'obtiendra par la multiplication des équations (31).

Le discriminant Δ sera donné par la formule

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta = 16(e_3 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_1)^2 \\ \quad = 16\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^{12} \theta_1^8(0)\,\theta_2^8(0)\,\theta_3^8(0) = \dfrac{16\pi^4}{(2\omega_1)^{12}}\,\theta'^8(0). \end{cases}$$

On aura enfin

$$(34)\qquad J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{54}\,\frac{[\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)]^3}{\theta'^8(0)}.$$

392. Les formules précédentes donnent le moyen pratique d'exécuter les calculs relatifs aux fonctions elliptiques, en les supposant définies soit par leurs périodes, soit par leurs invariants.

Supposons d'abord le réseau des périodes donné. Nous y choisirons à volonté un couple de périodes primitives $2\omega_1$, $2\omega_2$ telles que le rapport $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = r + si$ ait sa partie imaginaire positive; $q^{\frac{1}{4}}$ sera déterminé par l'équation

$$q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}.$$

Il importe, pour rendre plus grande la convergence des développements à employer, que la quantité $|q| = e^{-\pi s}$ soit la plus petite possible. Il faudra donc rendre s maximum et, par suite, choisir pour $2\omega_1$ la période de module minimum. On aura, dans ce cas (317),

$$s \overset{=}{>} \sin\frac{\pi}{3},$$

d'où

$$|q| \overset{=}{<} e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} < \tfrac{1}{9}.$$

On pourra choisir pour $2\omega_2$ la seconde période du triangle principal. Si celui-ci est rectangle, on aura ainsi l'avantage de trouver pour q une valeur réelle.

Connaissant ainsi ω_1, ω_2 et $q^{\frac{1}{4}}$, on calculera η_1 par la formule (19), puis η_2, η_3, ω_3 par les formules

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Les autres constantes U_1, U_2, U_3, e_1, e_2, e_3, g_2, g_3, Δ, J se calculeront par les formules des n°s 390 et 391.

393. Réciproquement, supposons donnés g_2 et g_3 et cherchons à calculer les périodes principales $2\omega_1$, $2\omega_2$ et la quantité auxiliaire $q^{\frac{1}{4}}$.

Nous déterminerons d'abord les racines e_1, e_2, e_3 de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

en les numérotant de telle sorte que $e_2 e_3$ soit le plus petit côté du triangle, et que $e_3 e_1$ lui succède dans le sens direct.

On aura ensuite

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}}, \qquad \ldots,$$

les déterminations des radicaux étant précisées comme au n° 368.

Pour obtenir q, divisons membre à membre les équations (28) et (27) et posons, pour abréger,

$$\frac{U_3}{i e^{\frac{\pi i}{4}} U_2} = a;$$

il viendra

$$a = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} = \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}$$

ou

$$\frac{1}{2}\,\frac{a-1}{a+1} = \frac{q + q^9 + \ldots}{1 + 2q^4 + \ldots} = q\left(\frac{1 + q^8 + \ldots}{1 + 2q^4 + \ldots}\right).$$

Il nous faut calculer parmi les racines de cette équation celle dont le module est minimum. Nous savons que ce module est $< \frac{1}{9}$. Le facteur entre parenthèses est donc très voisin de l'unité; en le négligeant, nous aurons

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{a-1}{a+1},$$

avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{3000}$. On pourra d'ailleurs corriger cette valeur dans une seconde approximation.

Connaissant q, on obtiendra $2\omega_1$ par l'une ou l'autre des équations (27) ou (28), puis $2\omega_2$ par la formule

$$e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q,$$

d'où l'on tire, en désignant par $\operatorname{Log} q$ l'un des logarithmes de q choisi à volonté,

$$2\omega_2 = \frac{2\omega_1}{\pi i}\operatorname{Log} q + 4m_1\omega_1,$$

m_1 étant un entier positif ou négatif; nous le choisirons de manière à rendre $|2\omega_2|$ minimum, ce qui achèvera de préciser cette seconde période. Nous aurons enfin

$$q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1}}.$$

Nous pourrons donc, quelles que soient les données initiales, déterminer toutes les constantes qui figurent dans les expressions de σu, $\sigma_\alpha u$, ζu, $p u$ et, par suite, calculer les valeurs de ces fonctions pour une valeur donnée de u.

394. Réciproquement, supposons $p u$ donné et proposons-nous de calculer les valeurs correspondantes de u.

Soit u_0 l'une d'elles; elles auront, pour formule générale,

$$\pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Les valeurs correspondantes de la quantité $z^2 = e^{2\pi i v}$ seront de la forme

$$q^{2m_2} e^{\pm\frac{\pi i u_0}{\omega_1}};$$

elles constituent deux progressions géométriques de raison q^2 et sont réciproques deux à deux. Il existera donc deux valeurs de z^2, réciproques l'une de l'autre et de module compris entre $|q|$ et $\left|\frac{1}{q}\right|$; et le module de leur somme ne pourra surpasser $|q| + \left|\frac{1}{q}\right|$; $|q|$ étant d'ailleurs $< \frac{1}{9}$, ce module sera moindre que $\left(1+\frac{1}{81}\right)\left|\frac{1}{q}\right|$.

Pour déterminer ces deux valeurs de z^2, nous pourrons partir des deux équations

$$\wp u - e_2 = \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(v)}{\theta(v)}\right]^2,$$

$$\wp u - e_3 = \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3(v)}{\theta(v)}\right]^2.$$

Divisons-les membre à membre et posons, pour abréger,

$$\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}\frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} = b^2;$$

il viendra, en extrayant la racine carrée,

$$\pm b = \frac{\theta_2(v)}{\theta_3(v)} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} z^{2n}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}}$$

ou

$$\frac{1 \mp b}{1 \pm b} = \frac{q\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+q^9\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)+\ldots}{1+q^4\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\ldots}.$$

D'après les limites entre lesquelles sont compris les modules de z^2 et de q, le second membre peut être remplacé, avec une faible erreur relative, par $q\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$. Les valeurs cherchées

de z^2 différeront donc peu des racines de l'équation

$$q\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1\mp b}{1\pm b},$$

dont la somme est

$$\frac{1}{q}\,\frac{1\mp b}{1\pm b},$$

et a son module moindre que $\left|\frac{1}{q}\right|$ si nous déterminons le signe de la quantité ambiguë $\pm b$, de telle sorte que sa partie réelle soit positive.

Une seconde approximation permettra, au besoin, de rectifier les valeurs trouvées pour z^2.

Connaissant

$$z^2=e^{\frac{2\pi i u}{2\omega_1}},$$

les valeurs correspondantes de u seront données par la formule

$$u=\frac{\omega_1}{\pi i}\operatorname{Log} z^2+2m_1\omega_1.$$

395. Pour obtenir l'expression des fonctions θv, $\theta_\alpha v$ par des produits infinis, considérons le produit

$$P(z)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1})\prod_1^\infty(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}).$$

Il est évidemment convergent ($|q|$ étant <1) sauf pour $z=0$, et représente une fonction uniforme n'ayant pas d'autre point critique.

On a évidemment

$$P(-z)=-P(z).$$

D'autre part, si l'on change z en qz, chacun des facteurs $1-q^{2n}z^2$ se change dans le suivant, et chacun des facteurs $1-q^{2n}z^{-2}$ dans le précédent, sauf le premier $1-q^2z^{-2}$, qui se change en $1-z^{-2}$; on aura donc

$$P(qz)=P(z)\frac{qz-q^{-1}z^{-1}}{z-z^{-1}}\,\frac{1-z^{-2}}{1-q^2z^2}=-q^{-1}z^{-2}P(z).$$

Donc $P(z)$ ne diffère de θv que par un facteur constant (380), et l'on a

$$(35)\quad \begin{cases} \theta(v) = \mathcal{A}\,P(z) = \dfrac{\mathcal{A}}{i}\,q^{\frac{1}{4}}(z - z^{-1})\displaystyle\prod_1^\infty (1 - q^{2n}z^2)(1 - q^{2n}z^{-2}) \\ \qquad = 2\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v \displaystyle\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}). \end{cases}$$

On en déduit (384)

$$(36)\quad \begin{cases} \theta_1 v = \theta(v + \frac{1}{2}) = \mathcal{A}\,P(iz) \\ \qquad = \mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}(z + z^{-1})\displaystyle\prod_1^\infty (1 + q^{2n}z^2)(1 + q^{2n}z^{-2}) \\ \qquad = 2\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v \displaystyle\prod_1^\infty (1 + 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} \theta_2 v = -iq^{\frac{1}{4}}z\,\theta(v + \frac{1}{2}\tau) = -\mathcal{A}\,iq^{\frac{1}{4}}z\,P\left(q^{\frac{1}{2}}z\right) \\ \qquad = -\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{2}}z\left(q^{\frac{1}{2}}z - q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\displaystyle\prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}z^2)(1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ \qquad = \mathcal{A}(1 - qz^2)\displaystyle\prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}z^2)\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ \qquad = \mathcal{A}\displaystyle\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}z^2)(1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ \qquad = \mathcal{A}\displaystyle\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} \theta_3 v = \theta_2(v + \frac{1}{2}) \\ \qquad = \mathcal{A}\displaystyle\prod_1^\infty (1 + q^{2n-1}z^2)(1 + q^{2n-1}z^{-2}) \\ \qquad = \mathcal{A}\displaystyle\prod_1^\infty (1 + 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}). \end{cases}$$

396. Il reste à déterminer la constante $\mathcal{A}$. Pour cela, posons $v = 0$ dans la dérivée de l'équation (35) et dans les équations (36) à (38); il viendra

$$(39)\quad \begin{cases} \theta'(0) = 2\mathcal{A} q^{\frac{1}{4}} \pi \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2, \\ \theta_1(0) = 2\mathcal{A} q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n})^2, \\ \theta_2(0) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1})^2, \\ \theta_3(0) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1})^2. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'identité

$$\theta'(0) = \pi\, \theta_1(0)\, \theta_2(0)\, \theta_3(0),$$

on trouvera

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2 = \mathcal{A}^2 \prod_1^\infty [(1 + q^{2n})(1 + q^{2n-1})(1 - q^{2n-1})]^2.$$

Mais le coefficient de $\mathcal{A}^2$ se réduit à l'unité, car on a évidemment

$$\prod_1^\infty (1 + q^{2n})(1 + q^{2n-1})$$
$$= \prod_1^\infty (1 + q^n) = \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \prod_1^\infty \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

On aura donc

$$\mathcal{A} = \pm \prod_1^\infty (1 - q^{2n}).$$

D'ailleurs, en supposant q infiniment petit dans l'équa-

tion (38), on voit que $\mathcal{A}$ a pour valeur principale $+1$. Donc

$$(40)\qquad \mathcal{A} = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}).$$

On obtient aisément le développement de ce produit en série. A cet effet, partons de la relation

$$\theta_2(v) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2})$$

ou

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} = \prod_1^\infty (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2}).$$

Dans cette identité, remplaçons z^2, q par q, q^3; il viendra

$$(41)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3n^2+n} &= \prod_1^\infty (1 - q^{6n})(1 - q^{6n-2})(1 - q^{6n-4}) \\ &= \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) = \mathcal{A}. \end{aligned} \right.$$

397. Substituons la valeur (40) de $\mathcal{A}$ dans les formules (39), et posons, pour abréger,

$$(42)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\tau) &= q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}), \\ \varphi_1(\tau) &= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n}), \\ \varphi_2(\tau) &= q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}), \\ \varphi_3(\tau) &= e^{-\frac{\pi i}{8}} q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1}); \end{aligned} \right.$$

il viendra

$$(43)\quad \begin{cases} \theta'(0) = 2\pi\,\varphi^3(\tau), \\ \theta_1(0) = \quad \varphi(\tau)\,\varphi_1^2(\tau), \\ \theta_2(0) = \quad \varphi(\tau)\,\varphi_2^2(\tau), \\ \theta_3(0) = e^{\frac{\pi i}{4}}\varphi(\tau)\,\varphi_3^2(\tau). \end{cases}$$

Ces valeurs, substituées dans les identités (25), (29) et dans les autres formules du n° 391 donneront

$$(44)\qquad \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{2},$$

$$(45)\qquad \varphi_1^8 + \varphi_2^8 + \varphi_3^8 = 0;$$

$$(46)\quad \begin{cases} e_3 - e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4\varphi_1^8, \\ e_1 - e_3 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4\varphi_2^8, \\ e_2 - e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4\varphi_3^8; \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{cases} 3e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_2^8 - \varphi_3^8), \\ 3e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_3^8 - \varphi_1^8), \\ 3e_3 = \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_1^8 - \varphi_2^8); \end{cases}$$

$$(48)\quad g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^4 \varphi^8(\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16}),$$

$$(49)\quad g_3 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\,\omega_1}\right)^6 \varphi^{12}(\varphi_2^8 - \varphi_3^8)(\varphi_3^8 - \varphi_1^8)(\varphi_1^8 - \varphi_2^8).$$

$$(50)\quad \Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} \varphi^{24},$$

$$(51)\quad J = \frac{1}{3^3.2^9}(\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16})^3.$$

De la combinaison de ces formules, on peut encore dé-

duire les suivantes :

$$(52)\qquad J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 2^8}(\varphi_2^8 - \varphi_3^8)^2(\varphi_3^8 - \varphi_1^8)^2(\varphi_1^8 - \varphi_2^8)^2,$$

$$(53)\qquad \frac{16(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)} = \varphi_\alpha^{24},$$

$$(54)\qquad k_{\alpha\beta}^2 = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma} = -\frac{\varphi_\beta^8}{\varphi_\alpha^8}.$$

398. Aux développements en produits, que nous venons d'obtenir pour les fonctions θ, correspondent, pour les fonctions

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\frac{d\log\sigma u}{dv} = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \frac{d\log\theta(v)}{dv}\right],$$

$$pu = -\frac{1}{2\omega_1}\frac{d\zeta u}{dv} = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta(v)}{dv^2}\right],$$

les développements en séries simples

$$(55)\qquad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{q^{2n}\sin 2\pi v}{1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}}\right],$$

$$(56)\qquad pu = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\pi v} - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{q^{2n}(1+q^{4n})\cos 2\pi v - 2q^{4n}}{(1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})^2}\right.$$

Les fonctions

$$p(u+\omega_\alpha) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u+\omega_\alpha) = -\frac{d^2}{du^2}\log U_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\sigma_\alpha u$$
$$= -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_\alpha u = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left(-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta_\alpha v}{dv^2}\right)$$

admettent des développements analogues. On aura notamment

$$(57)\qquad \begin{cases} p(u+\omega_2) \\ = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}(1+q^{4n-2})\cos 2\pi v - 2q^{4n-2}}{(1 - 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})^2}\right] \end{cases}$$

L'identification des termes indépendants de v dans les formules (56) et (57) donnera

$$(58)\quad 4\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(59)\quad e_2 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right].$$

Posons dans les mêmes formules $u = \omega_1$, d'où $v = \frac{1}{2}$; elles donneront

$$(60)\quad e_1 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 + \pi^2 + 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

$$(61)\quad e_3 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 \qquad + 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}\right].$$

Enfin, en substituant ces valeurs dans la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

on trouve l'identité

$$(62)\quad \sum_1^\infty \frac{q^n}{(1+q^n)^2} = \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - 3\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

399. Les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ dépendent non seulement de u, mais des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. De même les fonctions θv, $\theta_\alpha v$ dépendent non seulement de v, mais du rapport τ des périodes. Mettant ces paramètres en évidence, les formules (17) et (18) deviendront

$$\sigma\ (u, \omega_1, \omega_2) = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta(v, \tau)}{\theta'(0, \tau)},$$

$$\sigma_\alpha(u, \omega_1, \omega_2) = \qquad e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta_\alpha(v, \tau)}{\theta_\alpha(0, \tau)}.$$

Remplaçons $2\omega_1$, $2\omega_2$ par un autre couple de périodes

proprement équivalentes

$$(63) \qquad 2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2;$$

et posons

$$\eta'_1 = a\eta_1 + b\eta_2,$$

$$v' = \frac{u}{2\omega'_1} = \frac{v}{a+b\tau}, \qquad \tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}.$$

Nous aurons évidemment

$$\sigma(u, \omega'_1, \omega'_2) = 2\omega'_1 e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2} \frac{\theta(v', \tau')}{\theta'(0, \tau')},$$

$$\sigma_\alpha(u, \omega'_1, \omega'_2) = e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2} \frac{\theta_\alpha(v', \tau')}{\theta_\alpha(0, \tau)}.$$

Mais ce changement de périodes n'altère pas σu, et opère sur les fonctions $\sigma_\alpha u$ une simple permutation, dépendant de la classe à laquelle appartient la substitution (63). Nous aurons donc

$$(64) \qquad 2\omega'_1 e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2} \frac{\theta(v', \tau')}{\theta'(0, \tau')} = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta(v, \tau)}{\theta'(0, \tau)},$$

$$(65) \qquad e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2} \frac{\theta_{\alpha'}(v', \tau')}{\theta_{\alpha'}(0, \tau')} = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta_\alpha(v, \tau)}{\theta_\alpha(0, \tau)};$$

l'indice α' prenant à l'ordre près les mêmes valeurs 1, 2, 3 que l'indice α.

Or on a

$$\omega'_1 = \omega_1(a + b\tau),$$

$$2\eta'_1\omega'_1 v'^2 - 2\eta_1\omega_1 v^2 = \frac{u^2}{2}\left(\frac{\eta'_1}{\omega'_1} - \frac{\eta_1}{\omega_1}\right)$$

$$= \frac{u^2}{2} \frac{(a\eta_1 + b\eta_2)\omega_1 - (a\omega_1 + b\omega_2)\eta_1}{(a\omega_1 + b\omega_2)\omega_1}$$

$$= -\frac{u^2 b\pi i}{4\omega_1^2(a+b\tau)} = -\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}.$$

Donc

$$\theta(v', \tau') = \frac{1}{a+b\tau} \frac{\theta'(0, \tau')}{\theta'(0, \tau)} e^{\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}} \theta(v, \tau),$$

$$\theta_{\alpha'}(v', \tau') = \frac{\theta_{\alpha'}(0, \tau')}{\theta_\alpha(0, \tau)} e^{\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}} \theta_\alpha(v, \tau).$$

40). Les constantes

$$\frac{1}{a+b\tau}\,\frac{\theta'(0,\tau')}{\theta'(0,\tau)},\quad \frac{\theta_{\alpha'}(0,\tau')}{\theta_\alpha(0,\tau)}$$

sont respectivement égales, d'après les formules (43), à

$$\frac{1}{a+b\tau}\,\frac{\varphi^3(\tau')}{\varphi^3(\tau)},\quad e^{(\lambda_{\alpha'}-\lambda_\alpha)\frac{\pi i}{4}}\,\frac{\varphi(\tau')\,\varphi^2_{\alpha'}(\tau')}{\varphi(\tau)\,\varphi^2_\alpha(\tau)},$$

λ_α, $\lambda_{\alpha'}$ étant égaux à 1 ou à 0, suivant que leur indice est égal à 3 ou < 3.

Elles seront donc déterminées si l'on connaît la valeur des quotients

$$\frac{\varphi(\tau')}{\varphi(\tau)},\quad \frac{\varphi_{\alpha'}(\tau')}{\varphi_\alpha(\tau)}.$$

Renvoyant à plus tard cette recherche, nous nous bornerons pour le moment à établir que les constantes cherchées sont des racines huitièmes de $(a+b\tau)^4$.

On a, en effet (formules 33 et 30),

$$\theta'^8(0,\tau)=\frac{(2\omega_1)^{12}\Delta}{16\pi^4},$$

$$\theta^8_\alpha(0,\tau)=\left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^4(e_\beta-e_\gamma)^2.$$

On a de même

$$\theta'^8(0,\tau')=\frac{(2\omega'_1)^{12}}{16\pi^4}\Delta,$$

$$\theta^8_{\alpha'}(0,\tau')=\left(\frac{2\omega'_1}{\pi}\right)^4(e'_{\beta'}-e'_{\gamma'})^2,$$

$e'_{\alpha'}$, $e'_{\beta'}$, $e'_{\gamma'}$ étant égaux, à l'ordre près, à e_α, e_β, e_γ.

D'ailleurs, le changement des périodes n'altère pas pu, σu, et, par hypothèse, il change

$$\sigma_\alpha(u,\omega_1,\omega_2)$$

en

$$\sigma_{\alpha'}(u,\omega'_1,\omega'_2).$$

En vertu des égalités

$$pu - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2(u, \omega_1, \omega_2)}{\sigma^2 u},$$

$$pu - e'_{\alpha'} = \frac{\sigma_{\alpha'}^2(u, \omega'_1, \omega'_2)}{\sigma^2 u},$$

on aura donc

$$e'_{\alpha'} = e_\alpha,$$

et, par suite,

$$(e'_{\beta'} - e'_{\gamma'})^2 = (e_\beta - e_\gamma)^2.$$

Donc

$$\frac{\theta'^8(0, \tau')}{\theta'^8(0, \tau)} = \left(\frac{\omega'_1}{\omega_1}\right)^{12} = (a + b\tau)^{12},$$

$$\frac{\theta_{\alpha'}^8(0, \tau')}{\theta_\alpha^8(0, \tau)} = \left(\frac{\omega'_1}{\omega_1}\right)^4 = (a + b\tau)^4,$$

et enfin

$$\left[\frac{1}{a + b\tau}\,\frac{\theta'(0, \tau')}{\theta'(0, \tau)}\right]^8 = \left[\frac{\theta_{\alpha'}(0, \tau')}{\theta_\alpha(0, \tau)}\right]^8 = (a + b\tau)^4.$$

VI. — Fonctions périodiques de deuxième et de troisième espèce.

401. Nous appellerons avec M. Hermite fonctions *doublement périodiques de troisième espèce* les fonctions méromorphes qui satisfont à des relations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(u + 2\omega_1) = e^{A_1 u + B_1}\varphi(u), \\ \varphi(u + 2\omega_2) = e^{A_2 u + B_2}\varphi(u), \end{cases}$$

A_1, B_1, A_2, B_2 étant des constantes.

On en déduit évidemment

$$\varphi(u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2) = e^{Au + B}\varphi(u),$$

A, B étant de nouvelles constantes.

Si $A_1 = A_2 = 0$, la fonction sera de *seconde espèce*. Si B_1 et B_2 s'annulent également, ce sera une fonction elliptique.

Les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ nous ont déjà fourni des exemples

de fonctions de troisième espèce; leurs quotients $\sigma_{\alpha 0} u$, $\sigma_{\alpha\beta} u$ sont de seconde espèce. Proposons-nous de faire l'étude de ces fonctions en général.

Il résulte évidemment des équations (1) que les zéros et les pôles de $\varphi(u)$ sont distribués périodiquement dans le plan.

On en déduit d'ailleurs

$$\log\varphi(u+2\omega_1) = \log\varphi(u) + A_1 u + B_1 + 2 m_1 \pi i,$$
$$\log\varphi(u+2\omega_2) = \log\varphi(u) + A_2 u + B_2 + 2 m_2 \pi i.$$

402. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ceux des zéros de $\varphi(u)$ et $b_1, \ldots, b_\nu$ ceux de ses pôles qui sont situés dans le parallélogramme des périodes tracé à partir d'un point donné u_0; on aura, comme on sait,

$$2\pi i(\mu-\nu) = \int d\log\varphi(u),$$
$$2\pi i(\Sigma a - \Sigma b) = \int u\, d\log\varphi(u),$$

les intégrales étant prises dans le sens direct autour du parallélogramme.

Or il est aisé de les évaluer. En effet, supposons, pour fixer les idées, que τ ait sa partie réelle positive; on aura

$$\int d\log\varphi(u)$$
$$= \left(\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} + \int_{u_0+2\omega_1}^{u_0+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{u_0+2\omega_1+2\omega_2}^{u_0+2\omega_2} + \int_{u+2\omega_2}^{u_0}\right) d\log\varphi(u)$$

ou, en réunissant les intégrales prises suivant les côtés opposés,

$$\int d\log\varphi(u) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} d[\log\varphi(u) - \log\varphi(u+2\omega_2)]$$
$$+ \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} d[\log\varphi(u+2\omega_1) - \log\varphi(u)]$$
$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} - A_2\, du + \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} A_1\, du$$
$$= 2\omega_2 A_1 - 2\omega_1 A_2.$$

On aura de même

$$\int u\,d\log\varphi(u)$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} u\,d\log\varphi(u) - (u+2\omega_2)\,d\log\varphi(u+2\omega_2)$$

$$+\int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} (u+2\omega_1)\,d\log\varphi(u+2\omega_1) - u\,d\log\varphi(u)$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} -A_2 u\,du - 2\omega_2\,d\log\varphi(u+2\omega_2)$$

$$+\int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} A_1 u\,du + 2\omega_1\,d\log\varphi(u+2\omega_1)$$

$$= -A_2\frac{(u_0+2\omega_1)^2-u_0^2}{2}$$

$$-2\omega_2[\log\varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_2)-\log\varphi(u_0+2\omega_2)]$$

$$+A_1\frac{(u_0+2\omega_2)^2-u_0^2}{2}$$

$$+2\omega_1[\log\varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_2)-\log\varphi(u_0+2\omega_1)]$$

$$= -2\omega_1 A_2(u_0+\omega_1) - 2\omega_2[A_1(u_0+2\omega_2)+B_1+2m_1\pi i]$$

$$+2\omega_2 A_1(u_0+\omega_2) + 2\omega_1[A_2(u_0+2\omega_1)+B_2+2m_2\pi i]$$

$$= 2\omega_1(A_2\omega_1+B_2+2m_2\pi i) - 2\omega_2(A_1\omega_2+B_1+2m_1\pi i).$$

Nous obtenons donc les deux relations fondamentales

$$(2)\qquad 2\omega_2 A_1 - 2\omega_1 A_2 = 2\pi i(\mu-\nu)$$

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\omega_1(A_2\omega_1+B_2+2m_2\pi i) \\ -2\omega_2(A_1\omega_2+B_1+2m_1\pi i) = 2\pi i[\Sigma a - \Sigma b]. \end{cases}$$

403. Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, on pourra construire une fonction admettant les zéros, les pôles et les multiplicateurs donnés. Posons, en effet,

$$\varphi(u) = e^{\alpha u^2+\beta u}\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_\mu)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_\nu)}.$$

C'est une fonction de troisième espèce, ayant les zéros et les pôles demandés, et ses multiplicateurs seront $e^{M_1 u+N_1}$,

$e^{M_2 u + N_2}$, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} M_1 u + N_1 = (4\omega_1 u + 4\omega_1^2)\alpha + 2\omega_1\beta \\ + \sum_1^\mu [2\eta_1(u - a_k + \omega_1) - \pi i] \\ - \sum_1^\nu [2\eta_1(u - b_k + \omega_1) - \pi i], \end{aligned}$$

$$M_2 u + N_2 = (4\omega_2 u + 4\omega_2^2)\alpha + 2\omega_2\beta + \ldots.$$

Ces multiplicateurs seront respectivement égaux à $e^{A_1 u + B_1}$, $e^{A_2 u + B_2}$, si l'on détermine α, β de manière à satisfaire aux équations

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &4\omega_1\alpha + 2\eta_1(\mu - \nu) = A_1, \\ &4\omega_1^2\alpha + 2\omega_1\beta - 2\eta_1(\Sigma a - \Sigma b) \\ &\qquad + (2\eta_1\omega_1 - \pi i)(\mu - \nu) = B_1 + 2m_1\pi i, \\ &4\omega_2\alpha + 2\eta_2(\mu - \nu) = A_2, \\ &4\omega_2^2\alpha + 2\omega_2\beta - 2\eta_2(\Sigma a - \Sigma b) \\ &\qquad + (2\eta_2\omega_2 - \pi i)(\mu - \nu) = B_2 + 2m_2\pi i. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations soient compatibles, deux conditions sont nécessaires; on les obtiendra en éliminant α, β. En tenant compte de la relation $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$, on retombe ainsi sur les équations (2) et (3), qui sont vérifiées, par hypothèse.

Toute autre fonction $\varphi_1(u)$ admettant les mêmes zéros, les mêmes pôles et les mêmes multiplicateurs que $\varphi(u)$ sera de la forme $C\varphi(u)$, C étant une constante; car le quotient $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$ est une fonction elliptique qui n'a pas de pôle.

404. Il résulte de ce qui précède qu'une fonction de troisième espèce qui n'a ni zéro, ni pôle est de la forme

$$Ce^{\alpha u^2 + \beta u}.$$

Pour une fonction $\varphi(u)$ de seconde espèce, on a

$$A_1 = A_2 = 0,$$

et en vertu de l'équation (2)

$$\mu = \nu.$$

Les équations (4) donneront ensuite

$$\alpha = 0.$$

Les fonctions de seconde espèce ont donc autant de zéros que de pôles, et leur expression générale est

$$(5) \qquad C e^{\beta u} \frac{\sigma(u - a_1) \ldots \sigma(u - a_\mu)}{\sigma(u - b_1) \ldots \sigma(u - b_\mu)}.$$

405. On obtient de nouvelles expressions des fonctions de deuxième et de troisième espèce par les considérations suivantes :

Soit $\varphi(u)$ une semblable fonction, ayant pour multiplicateurs $e^{A_1 u + B_1}$, $e^{A_2 u + B_2}$.

Posons

$$\varphi(u) = e^{\alpha u^2 + \beta u} \varphi_1(u),$$

les constantes α, β étant déterminées par les relations

$$4\omega_1 \alpha = A_1, \qquad 4\omega_1^2 \alpha + 2\omega_1 \beta = B_1;$$

$\varphi_1(u)$ sera une fonction analogue à $\varphi(u)$, ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles, mais dont le premier multiplicateur se réduit à l'unité. Soit e^{Au+B} son second multiplicateur.

Si $A = 0$, $\varphi_1(u)$ sera de seconde espèce. Laissons provisoirement ce cas de côté, et posons

$$u = 2\omega_1 v - \frac{B}{A}, \qquad 2\omega_1 A = -2m\pi i, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau;$$

$\varphi_1(u)$ se changera en une fonction $\Psi(v)$, et les relations

$$\varphi_1(u + 2\omega_1) = \varphi_1 u, \qquad \varphi_1(u + 2\omega_2) = e^{Au+B} \varphi_1 u$$

deviendront

$$(6) \qquad \Psi(v + 1) = \Psi v, \qquad \Psi(v + \tau) = e^{-2m\pi i v} \Psi v.$$

Nous donnerons à ces fonctions particulières $\Psi(v)$ le nom de *fonctions réduites*. Le nombre m se nomme l'*ordre* de la fonction; c'est un entier (positif ou négatif), car la formule (2), appliquée à ce cas particulier, donne

$$m = \mu - \nu.$$

406. Ces fonctions réduites ont été construites par M. Appell de la manière suivante :

Posons, comme précédemment,

$$e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i \tau} = q;$$

$\Psi(v)$ se changera en une fonction de z. Cette nouvelle fonction $f(z)$ sera uniforme, car, en vertu de l'équation

$$\Psi(v+1) = \Psi(v),$$

à toutes les valeurs de v qui correspondent à une même valeur de z répond une même valeur de la fonction. De plus, $v = \frac{1}{\pi i}\log z$ n'admettant qu'un seul point critique $z = 0$, $f(z)$ n'aura pour points critiques que des pôles correspondant à ceux de $\Psi(v)$ et le point essentiel $z = 0$.

Enfin les équations (6) se transformeront dans les suivantes

$$(7) \qquad f(-z) = f(z), \qquad f(qz) = z^{-2m} f(z).$$

Il s'agit de construire les fonctions $f(z)$ qui satisfont à ces relations.

407. Supposons en premier lieu m positif, et admettons, en outre, que la fonction $\Psi(v)$ soit entière; $f(z)$, n'ayant d'autre point critique que $z = 0$, sera développable par la formule de Laurent, mais elle est paire; le développement sera donc de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n}.$$

En le substituant dans l'équation

$$f(qz) = z^{-2m} f(z),$$

il viendra

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n q^{2n} z^{2n} = z^{-2m} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n},$$

ce qui donne pour déterminer les coefficients A_n la formule récurrente

$$A_{n+m} = A_n q^{2n}.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ restent indéterminés. Soit A_r l'un d'entre eux; on aura

$$\begin{aligned} A_{r+m} &= A_r q^{2r}, \qquad \ldots, \\ A_{r+mn} &= A_r q^{2r+2(r+m)+\ldots+2[r+(n-1)m]} \\ &= A_r q^{2rn+mn(n-1)}. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$(8) \qquad \begin{cases} \Theta_r(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{2rn+mn(n-1)} z^{2(r+mn)} \\ \qquad\quad = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} (q^{2n} z^2)^r, \end{cases}$$

la forme générale des fonctions cherchées sera

$$(9) \qquad f(z) = \sum_{0}^{m-1} A_r \Theta_r(z)$$

ou, en revenant à la variable primitive v et désignant par $T_r(v)$ ce que devient alors $\Theta_r(z)$,

$$(10) \qquad \Psi(v) = \sum_{0}^{m-1} A_r T_r(v).$$

Si, au lieu de grouper ensemble les termes de $f(z)$ qui correspondent à une même valeur de r, nous groupons ceux

pour lesquels n a la même valeur, nous trouverons

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} \mathrm{P}(q^{2n} z^2),$$

$$\Psi(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} e^{2mn\pi i v} \mathrm{P}(q^{2n} e^{2\pi i v}),$$

$\mathrm{P}(z) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 z + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} z^{m-1}$ désignant un polynôme arbitraire de degré $m - 1$.

408. Les fonctions réduites $\Psi(v)$ d'ordre m ayant ν pôles $b_1, \ldots, b_\nu$ et $m + \nu$ zéros $a_1, \ldots, a_{m+\nu}$ admettent une représentation analogue, où le polynôme $\mathrm{P}(z)$ est remplacé par une fonction rationnelle $\mathrm{R}(z)$ ayant pour numérateur un polynôme $\mathrm{P}_1(z)$ de degré $m + \nu - 1$ et pour dénominateur le produit

$$(z - e^{2\pi i b_1}) \ldots (z - e^{2\pi i b_\nu}).$$

Posons, en effet,

$$\Psi_1 v = f_1 z = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} \mathrm{R}(q^{2n} z^2).$$

1° Cette série sera convergente, sauf pour les valeurs de z qui rendent infini l'un de ses termes. En effet, $|q|$ étant < 1 et $m > 0$, la racine $n^{\text{ième}}$ du terme général tend vers zéro si n tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la racine $-n^{\text{ième}}$ si n tend vers $-\infty$.

2° C'est une fonction paire de z. D'autre part, si l'on change z en qz, chaque terme se change dans le suivant, multiplié par z^{-2m}; donc

$$f_1(-z) = f_1(z), \qquad f_1(qz) = z^{-2m} f_1(z)$$

et $\Psi_1(v)$ est une fonction réduite d'ordre m.

3° Ses pôles sont aux points pour lesquels on a

$$q^{2n} z^2 = e^{2\pi i b_1}, \qquad \ldots, \qquad q^{2n} z^2 = e^{2\pi i b_\nu}$$

ou

$$e^{2n\pi i \tau + 2\pi i v} = e^{2\pi i b_1}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$v = b_1 - n\tau + n', \qquad \ldots, \qquad v = b_\nu - n\tau + n',$$

n, n' étant entiers. Ce sont les pôles de $\Psi(v)$.

4° C'est une fonction entière et homogène des $m+\nu$ coefficients, encore indéterminés, du numérateur $P_1(z)$. On peut déterminer les rapports de ces coefficients de telle sorte que $\Psi_1(v)$ s'annule pour $v = a_1, a_2, \ldots, a_{m+\nu-1}$.

Cela fait, le quotient $\frac{\Psi(v)}{\Psi_1(v)}$ sera une fonction elliptique n'ayant pas plus d'un zéro; ce sera donc une constante. Mais $\Psi_1(v)$ contient encore en facteur une constante arbitraire; on pourra la choisir de telle sorte qu'on ait $\Psi_1(v) = \Psi(v)$.

409. Posons, en particulier,

$$R(z) = \frac{2\pi i e^{2\pi i w}}{z - e^{2\pi i w}},$$

w étant un point intérieur au parallélogramme.

La fonction réduite

$$\text{(11)} \qquad \Psi(v, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} e^{2mn\pi i v} \frac{2\pi i e^{2\pi i w}}{q^{2n} e^{2\pi i v} - e^{2\pi i w}},$$

formée avec $R(z)$, n'aura dans le parallélogramme qu'un pôle simple w, et l'on vérifie immédiatement que le résidu correspondant est égal à 1.

En dérivant les équations

$$\Psi(v+1, w) = \Psi(v, w), \qquad \Psi(v+\tau, w) = e^{-2m\pi i v}\Psi(v, w)$$

par rapport au paramètre w, on voit que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial w}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial w^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2\ldots k}\frac{\partial^k\Psi}{\partial w^k}$$

sont également des fonctions réduites; d'ailleurs, elles admettent le seul pôle w et la partie infinie de leur développement aux environs de ce point sera respectivement

$$\frac{1}{(v-w)^2}, \quad \frac{1}{(v-w)^3}, \quad \ldots.$$

Cette remarque fournit une décomposition des fonctions réduites en éléments simples. Soit, en effet, $\Phi(v)$ une fonction réduite d'ordre m, admettant les pôles w_1, w_2, ... avec des ordres de multiplicité k, l, ... et soient respectivement

$$\frac{A_1}{v - w_1} + \frac{A_2}{(v - w_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(v - w_1)^k},$$
$$\frac{B_1}{v - w_2} + \frac{B_2}{(v - w_2)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(v - w_2)^l},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les parties infinies de son développement aux environs de ces pôles. Posons

$$\begin{aligned}\Phi v = A_1 \Psi(v, w_1) + A_2 \frac{\partial \Psi(v, w_1)}{\partial w_1} + \ldots \\ + \frac{A_k}{1.2..(k-1)} \frac{\partial^{k-1} \Psi(v, w_1)}{\partial w_1^{k-1}} \\ + B_1 \Psi(v, w_2) + B_2 \frac{\partial \Psi(v, w_2)}{\partial w_2} + \ldots \\ + \ldots + \Psi_1 v.\end{aligned}$$

Le reste $\Psi_1(v)$ sera évidemment une fonction réduite entière d'ordre m et pourra se mettre sous la forme

$$C_0 T_0(v) + C_1 T_1(v) + \ldots + C_{m-1} T_{m-1}(v).$$

410. La fonction $\Psi(v, w)$, qui nous a conduits au résultat ci-dessus, va également nous servir à construire les fonctions réduites où m est négatif. Pour cela, il nous faut considérer w comme la variable et v comme un paramètre. La fonction n'aura dans le parallélogramme qu'un seul pôle simple, $w = v$, et ce même point sera un pôle double, triple, etc., pour les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial v}$, ..., $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}$, ... prises par rapport au paramètre v.

Posons, pour abréger, .

$$e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i w} = t;$$

la fonction prendra la forme

$$\Psi(v, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} \frac{2\pi i t^2}{q^{2n} z^2 - t^2} = F(z, t).$$

On a évidemment

$$(12) \qquad F(z, -t) = F(z, t).$$

Changeons, d'autre part, t en qt et remplaçons en même temps l'indice de sommation n par $n+1$, il viendra

$$F(z, qt) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n+1)} z^{2m(n+1)} \frac{2\pi i t^2}{q^{2n} z^2 - t^2},$$

d'où

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F(z, qt) - t^{2m} F(z, t) \\ & = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn}\, 2\pi i t^2 \frac{(q^{2n} z^2)^m - t^{2m}}{q^{2n} z^2 - t^2} \\ & = 2\pi i \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} t^2 \sum_{r=0}^{r=m-1} (q^{2n} z^2)^r t^{2(m-r-1)} \\ & = 2\pi i \sum_{r=0}^{r=m-1} \Theta_r(z)\, t^{2(m-r)}. \end{aligned} \right.$$

En repassant des variables auxiliaires z, t aux variables initiales v, w, les relations (12) et (13) deviendront

$$\Psi(v, w+1) = \Psi(v, w),$$

$$\Psi(v, w+\tau) - e^{2m\pi i w} \Psi(v, w) = 2\pi i \sum_{0}^{m-1} T_r(v)\, e^{2(m-r)\pi i w}.$$

En les dérivant par rapport au paramètre v, on aura plus généralement

$$\frac{\partial^k \Psi(v, w+1)}{\partial v^k} = \frac{\partial^k \Psi(v, w)}{\partial v^k},$$

$$\frac{\partial^k \Psi(v, w+\tau)}{\partial v^k} - e^{2m\pi i w} \frac{\partial^k \Psi(v, w)}{\partial v^k} = 2\pi i \sum_{0}^{m-1} T_r^{(k)}(v)\, e^{2(m-r)\pi i w}.$$

411. Cela posé, considérons une fonction réduite ψw où le nombre ν des pôles contenus dans le parallélogramme surpasse de m unités le nombre des zéros. Soient $v_1, v_2, \ldots$ ces pôles; $k, l, \ldots$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Formons l'expression

$$\begin{aligned} S(w) = \; & A_1 \Psi(v_1, w) + A_2 \frac{\partial \Psi(v_1, w)}{\partial v_1} + A_k \frac{\partial^{k-1} \Psi(v_1, w)}{\partial v_1^{k-1}} \\ & + B_1 \Psi(v_2, w) + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_l \frac{\partial^{l-1} \Psi(v_2, w)}{\partial v_2^{l-1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Elle admet les mêmes pôles, avec le même ordre de multiplicité. De plus, on a évidemment

$$(14) \qquad S(w+1) = S(w),$$

$$(15) \qquad S(w+\tau) - e^{2m\pi i w} S(w) = 2\pi i \sum_0^{m-1} U_r e^{2(m-r)\pi i w},$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} U_r = \; & A_1 T_r(v_1) + A_2 T'_r(v_1) + \ldots + A_k T_r^{(k-1)}(v_1) \\ & + B_1 T_r(v_2) + B_2 T'_r(v_2) + \ldots + B_l T_r^{l-1}(v_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Disposons des ν constantes A, B, ... de manière à satisfaire aux m équations

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_{m-1} = 0.$$

L'équation (15) se réduira à

$$S(w+\tau) = e^{2m\pi i w} S(w).$$

Donc $S(w)$ sera une fonction réduite d'ordre m, ayant les mêmes pôles et les mêmes multiplicateurs que ψw. Elle dépend encore linéairement de $\nu - m$ constantes arbitraires, dont on peut déterminer les rapports de tette sorte qu'elle admette $\nu - m - 1$ des zéros de ψw. Le quotient $\frac{\psi w}{S w}$ sera

donc une fonction elliptique, n'ayant pas plus d'un zéro. Ce sera donc une constante.

412. Passons aux fonctions de seconde espèce, dont nous avons réservé l'étude (405). Soit $\varphi_1 u$ une semblable fonction, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et aux multiplicateurs 1, e^{B}. Posons

$$u = 2\omega_1 v, \qquad \varphi_1 u = \psi v.$$

La fonction $\psi(v)$ aura pour périodes 1, τ et pour multiplicateurs 1, e^{B}. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ses zéros et $b_1, \ldots, b_\mu$ ses pôles dans le parallélogramme des périodes; posons, pour abréger,

$$\Sigma a - \Sigma b = -s.$$

On aura, d'après la formule (3),

$$\mathrm{B} + 2m_2\pi i - 2m_1\pi i\tau = -2\pi i s.$$

Supposons d'abord que s soit une période, telle que $n + n_1\tau$ (n, n_1 étant des entiers). Posons

$$\varphi v = e^{2\pi i(m_1 - n_1)v}\chi v.$$

On aura évidemment

$$\frac{\chi(v+1)}{\chi v} = \frac{\psi(v+1)}{\psi v} = 1,$$

$$\frac{\chi(v+\tau)}{\chi v} = e^{-2\pi i(m_1-n_1)\tau}\frac{\psi(v+\tau)}{\psi v} = e^{\mathrm{B}-2\pi i(m_1-n_1)\tau}$$
$$= e^{-2m_2\pi i - 2n\pi i} = 1.$$

Donc χv est une fonction elliptique, que nous savons construire.

413. Passons au cas général, où s n'est pas une période. Nous poserons

$$\psi v = e^{2m_1\pi i v}\chi v;$$

χv admettra les mêmes zéros et les mêmes pôles que ψv et ses multiplicateurs seront

$$1 \quad \text{et} \quad e^{\mathrm{B}-2m_1\pi i\tau} = e^{-2\pi i s - 2m_2\pi i} = e^{-2\pi i s}.$$

Cette *fonction réduite* $\chi(v)$ sera de la forme

$$(16) \qquad \chi(v) = C \frac{\theta(v-a_1)\ldots\theta(v-a_\mu)}{\theta(v-b_1)\ldots\theta(v-b_\mu)}.$$

Car le second membre admet les zéros a, les pôles b et ses multiplicateurs sont

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{\Pi_1^\mu(-e^{-\pi i[2(v-a_k)+\tau]})}{\Pi_1^\mu(-e^{-\pi i[2(v-b_k)+\tau]})} = e^{-2\pi i s}.$$

Son rapport à χv est donc une constante, qui se réduira à l'unité par un choix convenable de C.

414. Considérons parmi les fonctions réduites la fonction particulière

$$(17) \qquad F(v) = \frac{\theta'(0)}{\theta(s)} \frac{\theta(v+s)}{\theta(v)}.$$

Elle a un seul pôle $v = 0$, pour lequel le résidu est égal à 1. On voit d'ailleurs, en dérivant les équations

$$F(v+1) = F(v), \qquad F(v+\tau) = e^{-2\pi i s} F(v),$$

que $F'(v)$, $F''(v)$, ... sont de nouvelles fonctions réduites. Elles admettent encore le pôle unique zéro, et leurs développements aux environs de ce point auront respectivement pour parties infinies

$$-\frac{1}{v^2}, \qquad \frac{2}{v^3}, \qquad \ldots.$$

Toutes les fonctions réduites χv sont exprimables à l'aide de cet élément simple. Soient, en effet, b_1, b_2, ... les pôles distincts de χv dans le parallélogramme, et

$$\frac{A_1}{v-b_1} + \ldots + \frac{A_k}{(v-b_1)^k}, \qquad \frac{B_1}{v-b_2} + \ldots, \qquad \ldots$$

les parties infinies du développement de $\chi(v)$ aux environs de ces points. On aura

$$\chi(v) = A_1 F(v-b_1) - A_2 F'(v-b_1) + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1} A_k}{1.2\ldots(k-1)} F^{(k-1)}(v-b_1) + B_1 F(v-b_2) + \ldots.$$

Car la différence des deux membres est une nouvelle fonction réduite n'ayant plus de pôles; elle sera donc de la forme $Ce^{\beta v}$; mais de plus C sera nul. En effet, s'il ne l'était pas, cette fonction aurait pour multiplicateurs e^{β} et $e^{\beta\tau}$; mais ces multiplicateurs doivent se réduire à 1 et $e^{-2\pi i s}$; on devrait donc avoir

$$\beta = 2n\pi i, \qquad \beta\tau = -2\pi i s + 2n_1\pi i \quad (n, n_1 \text{ entiers})$$

et, en éliminant β,

$$s = -n\tau + n_1:$$

s serait donc une période, contrairement à l'hypothèse.

415. L'élément simple

$$F(v, s) = \frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)},$$

auquel nous venons de parvenir, satisfait aux relations

$$F(v+1, s) = F(v, s), \qquad F(v+\tau, s) = e^{-2\pi i s} F(v, s),$$

et, comme il est symétrique en v et s, on aura également

$$F(v, s+1) = F(v, s), \qquad F(v, s+\tau) = e^{-2\pi i v} F(v, s).$$

Les quantités v, s peuvent être mises sous la forme

$$\lambda + \lambda_1\tau, \qquad \mu + \mu_1\tau,$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant des quantités réelles. Au moyen des formules ci-dessus, on pourra ramener le calcul de $F(v, s)$ au cas où λ_1 et μ_1 sont compris entre 0 et -1. Dans ce cas, les quantités

$$|e^{\pi i v}| = |q|^{\lambda_1}, \qquad |e^{\pi i s}| = |q|^{\mu_1}$$

seront comprises entre 1 et $|q|^{-1}$.

416. Pour obtenir un développement de $F(v, s)$, valable dans ces conditions, calculons l'intégrale

$$\int \frac{F(x, s)}{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i v}}\, dx$$

autour d'un parallélogramme ABCD ayant pour sommets les points

$$A = -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - p\tau, \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - p\tau,$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + p'\tau, \qquad D = -\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + p'\tau,$$

p et p' étant des entiers infinis.

Par suite de la périodicité des fonctions F et $e^{2\pi ix}$, les intégrales suivant BC et DA se détruisent.

L'intégrale suivant AB est infiniment petite; car on a le long de cette ligne

$$x = -\frac{1+\tau}{2} - p\tau + y,$$

y variant de o à 1; et, par suite,

$$F(x, s) = e^{2\pi isp}\, F\left(-\frac{1+\tau}{2} + y, s\right),$$

$$e^{2\pi ix} = q^{-2p}\, e^{\pi i(2y-1-\tau)}.$$

Or $F(x, s)$ ne devient infinie que pour les valeurs $x = m + m'\tau$, où m, m' sont entiers; $F\left(-\frac{1+\tau}{2} + y, s\right)$ reste donc finie lorsque y varie de o à 1. L'exponentielle $e^{\pi i(2y-1-\tau)}$ restera de même finie et différente de zéro. On a enfin, par hypothèse, $1 < |e^{\pi is}| < |q|^{-1}$. Le facteur $e^{2\pi isp}$ tendra donc vers ∞ avec p, mais moins rapidement que q^{-2p}. La fonction à intégrer tendra donc vers zéro lorsque p tend vers ∞.

L'intégrale suivant CD est aussi infiniment petite, car on a sur cette ligne

$$x = \frac{1+\tau}{2} + p'\tau + y,$$

y variant de o à -1, et par suite

$$F(x, s) = e^{-2\pi isp'}\, F\left(\frac{1+\tau}{2} + y, s\right),$$

$$e^{2\pi ix} = q^{2p'}\, e^{\pi i(2y+1+\tau)}.$$

Ces quantités tendent vers zéro pour $p' = \infty$. Le numérateur de la fonction à intégrer tend donc vers zéro, et son dénominateur vers la constante $-e^{2\pi i v}$.

L'intégrale considérée étant nulle, comme on vient de le voir pour $p = \infty$, $p' = \infty$, la somme des résidus relatifs aux pôles intérieurs à ABCD sera nulle. Ces pôles sont de plusieurs sortes :

1° Le dénominateur $e^{2\pi i x} - e^{2\pi i v}$ s'annule aux points $x = v + n$ (n entier). L'un de ces points est intérieur à ABCD; le résidu correspondant est $\dfrac{F(v, s)}{2\pi i\, e^{2\pi i v}}$.

2° Le numérateur $F(x, s)$ devient infini aux points $x = n\tau$, et l'on a

$$F(n\tau + h, s) = e^{-2\pi i s n}\, F(h, s) = e^{-2\pi i s n}\left(\frac{1}{h} + \ldots\right),$$

car le résidu de F relatif à l'origine est 1. Le résidu de $\dfrac{F(x, s)}{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i v}}$, par rapport au pôle $n\tau$, sera donc

$$\frac{e^{-2\pi i s n}}{q^{2n} - e^{2\pi i v}}.$$

Égalant à zéro la somme des résidus et posant

$$e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i s} = t,$$

nous aurons donc

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i} F(v, s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{-2n}}{1 - q^{2n} z^{-2}}.$$

417. Pour $n = 0$, on aura au second membre le terme $\dfrac{1}{1 - z^{-2}}$.

On a d'ailleurs, en changeant n en $-n$,

$$\sum_{-1}^{-\infty} \frac{t^{-2n}}{1 - q^{2n} z^{-2}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{1 - q^{-2n} z^{-2}} = -\sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2n} t^{2n} z^{2}}{1 - q^{2n} z^{2}}.$$

D'autre part,

$$\sum_1^\infty \frac{t^{-2n}}{1-q^{2n}z^{-2}} = \sum_1^\infty t^{-2n} + \sum_1^\infty \frac{q^{2n}t^{-2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}}.$$

Enfin, $|t|$ étant > 1, par hypothèse,

$$\sum_1^\infty t^{-2n} = \frac{1}{1-t^{-2}} - 1.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}F(v,s) &= \frac{1}{1-z^{-2}} + \frac{1}{1-t^{-2}} - 1 \\ &\quad - \sum_1^\infty \left(\frac{q^{2n}t^{2n}z^2}{1-q^{2n}z^2} - \frac{q^{2n}t^{-2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}} \right). \end{aligned}\right.$$

Cette formule a été établie en supposant $1 < |t| < |q|^{-1}$, z restant quelconque. Mais, si l'on change v, s en $-v$, $-s$, d'où z, t en z^{-1}, t^{-1}, les deux membres ne font que changer de signe. L'égalité subsistera donc si $|t|$ est compris entre 1 et $|q|$.

418. Si $|z|$ est également compris entre $|q|^{-1}$ et $|q|$, on pourra développer en série les quantités $(1-q^{2n}z^2)^{-1}$, $(1-q^{2n}z^{-2})^{-1}$. On obtient ainsi la série double

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}F(v,s) &= \frac{1}{1-z^{-2}} + \frac{1}{1-t^{-2}} - 1 \\ &\quad - \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn}(t^{2n}z^{2m} - t^{-2n}z^{-2m}) \end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant les exponentielles par des lignes trigonométriques,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} F(v,s) &= \pi(\cot\pi v + \cot\pi s) \\ &\quad + 4\pi \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn} \sin 2\pi(mv+ns). \end{aligned}\right.$$

419. Cette expression en série double met en évidence la symétrie de $F(v, s)$ par rapport à ses deux arguments. Pour obtenir une série simple offrant le même avantage, considérons les termes de la série double où $m \gtreqless n$. Posons

$$m = n + \rho.$$

Leur somme sera

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} q^{2n(n+\rho)} \left(t^{2n} z^{2(n+\rho)} - t^{-2n} z^{-2(n+\rho)} \right)$$

ou, en effectuant la sommation relative à ρ,

$$\sum_{1}^{\infty} q^{2n^2} \left(\frac{t^{2n} z^{2n}}{1 - q^{2n} z^2} - \frac{t^{-2n} z^{-2n}}{1 - q^{2n} z^{-2}} \right).$$

Les termes où $n \gtreqless m$ donneront une somme analogue, qui se déduit de la précédente en permutant z et t.

Ajoutons les deux sommes précédentes, et retranchons-en la somme des termes où $m = n$, afin de ne pas les compter deux fois; il viendra

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} F(v, s) = {} & \frac{1}{1 - z^{-2}} + \frac{1}{1 - t^{-2}} - 1 \\ & - \sum_{1}^{\infty} q^{2n^2} t^{2n} z^{2n} \left(\frac{1}{1 - q^{2n} z^2} + \frac{1}{1 - q^{2n} t^2} - 1 \right) \\ & + \sum_{1}^{\infty} q^{2n^2} t^{-2n} z^{-2n} \left(\frac{1}{1 - q^{2n} z^{-2}} + \frac{1}{1 - q^{2n} t^{-2}} - 1 \right). \end{aligned} \right.$$

Cette nouvelle série est d'ailleurs convergente pour toute valeur des arguments, car la racine $n^{\text{ième}}$ de son terme général a pour limite zéro.

420. Ayant trouvé par ce qui précède, et cela sous plusieurs formes différentes, le développement de la fonction

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)},$$

on en déduira, sans peine, beaucoup d'autres développements.

Changeons, par exemple, v en $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{1}{2}\tau$ ou $v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$, et par suite z en iz, $q^{\frac{1}{2}}z$ ou $-iq^{-\frac{1}{2}}z$. Les fonctions $\theta(v)$, $\theta(v+s)$ seront changées, à des facteurs exponentiels près, dont nous avons donné l'expression (384), en

$$\theta_1(v),\quad \theta_1(v+s);\quad \theta_2(v),\quad \theta_2(v+s);\quad \theta_3(v),\quad \theta_3(v+s).$$

Nous aurons ainsi obtenu le développement des trois fonctions

$$F_\alpha(v,s)=\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(v+s)}{\theta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Accroissons à son tour s d'une demi-période; nous obtiendrons le développement des fonctions

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta_\alpha(s)\,\theta_\alpha(v)},\quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(v+s)}{\theta_\beta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

421. Comme exemple de ce calcul, cherchons le développement de la fonction $F_2(v,s)$.

On a (384)

$$\theta_2(v)\qquad = i^{-1}q^{\frac{1}{4}}z\;\theta(v+\tfrac{1}{2}\tau),$$

$$\theta_2(v+s)=i^{-1}q^{\frac{1}{4}}zt\,\theta(v+s+\tfrac{1}{2}\tau),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}F_2 &= \frac{t}{2\pi i}F(v+\tfrac{1}{2}\tau,s)\\ &= t\left(\frac{1}{1-q^{-1}z^{-2}}+\frac{1}{1-t^{-2}}-1\right)\\ &\quad -\sum_1^\infty\frac{q^{2n+1}t^{2n+1}z^2}{1-q^{2n+1}z^2}+\sum_1^\infty\frac{q^{2n-1}t^{-2n+1}z^{-2}}{1-q^{2n-1}z^{-2}}.\end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire ainsi

$$\frac{1}{t-t^{-1}}-\frac{qtz^2}{1-qz^2}.$$

D'ailleurs

$$-\frac{qtz^2}{1-qz^2}-\sum_1^\infty \frac{q^{2n+1}t^{2n+1}z^2}{1-q^{2n+1}z^2}=-\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}t^{2n-1}z^2}{1-q^{2n-1}z^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i}F_2=\frac{1}{t-t^{-1}}-\sum_1^\infty\left(\frac{q^{2n-1}t^{2n-1}z^2}{1-q^{2n-1}z^2}-\frac{q^{2n-1}t^{-2n+1}z^{-2}}{1-q^{2n-1}z^{-2}}\right).$$

Si nous supposons que $|z^2|$ soit compris entre $|q|$ et $|q|^{-1}$, nous pourrons développer les quantités $(1-q^{2n-1}z^2)^{-1}$ et $(1-q^{2n-1}z^{-2})^{-1}$ en série, et nous obtiendrons la série double

$$(23)\quad \frac{1}{2\pi i}F_2(v,s)=\frac{1}{t-t^{-1}}-\sum_1^\infty\sum_1^\infty q^{(2n-1)m}(t^{2n-1}z^{2m}-t^{-2n+1}z^{-2m}),$$

et en revenant aux lignes trigonométriques

$$(24)\quad F_2(v,s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}+4\pi\sum_1^\infty\sum_1^\infty q^{(2n-1)m}\sin\pi[2mv+(2n-1)s].$$

422. Changeons v en $v+\frac{1}{2}$ dans les formules (21) et (24); elles donneront immédiatement

$$(25)\quad \begin{cases} F_1(v,s)=\pi(-\operatorname{tang}\pi v+\cot\pi s) \\ \qquad\qquad +4\pi\sum_1^\infty\sum_1^\infty(-1)^m q^{2mn}\sin 2\pi(mv+ns). \end{cases}$$

$$(26)\quad F_3(v,s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}+4\pi\sum_1^\infty\sum_1^\infty(-1)^m q^{(2n-1)m}\sin\pi[2mv+(2n-1)s].$$

423. Posons $s=-\frac{v}{2}$, d'où $t=z^{-\frac{1}{2}}$ dans l'un des développements trouvés pour

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)}.$$

Nous obtiendrons le développement de

$$\frac{\theta'(0)}{\theta(v)}$$

et, en accroissant v de demi-périodes, ceux des fonctions

$$\frac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(v)}.$$

Posons $s = -v$ dans les expressions des quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(v+s)}{\theta(s)\,\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(v+s)}{\theta_\beta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Nous obtiendrons les développements des quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(0)}{\theta(v)\,\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(0)}{\theta_\beta(v)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Pour cette valeur de s, les quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta_\alpha(s)\,\theta_\alpha(v)}$$

s'annulent; mais leurs dérivées se réduisent à

$$-\frac{\theta'^2(0)}{\theta^2(v)}, \quad \frac{\theta'^2(0)}{\theta_\alpha^2(v)}.$$

On obtiendra donc ces dernières quantités en posant $s = -v$ dans les formules, après les avoir dérivées par rapport à s.

424. Développons les deux membres de la formule (21), suivant les puissances de s; l'identification des termes constants donnera

$$\frac{\theta'(v)}{\theta(v)} = \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn} \sin 2m\pi v$$

et, en effectuant la sommation relative à n,

$$(27) \qquad \frac{d \log \theta(v)}{dv} = \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v.$$

Des formules (25), (24), (26), on déduit par le même procédé

$$(28)\quad \frac{d\log\theta_1(v)}{dv} = -\pi\,\mathrm{tang}\,\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v,$$

$$(29)\quad \frac{d\log\theta_2(v)}{dv} = 4\pi\sum_1^\infty \frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v,$$

$$(30)\quad \frac{d\log\theta_3(v)}{dv} = 4\pi\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v.$$

On a d'ailleurs (398)

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \frac{d}{dv}\log\theta(v)\right],$$

$$pu = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta(v)}{dv^2}\right],$$

$$p(u+\omega_\alpha) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta_\alpha(v)}{dv^2}\right].$$

Les formules précédentes donneront donc

$$(31)\quad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left(4\eta_1\omega_1 v + \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\ v\right.$$

$$(32)\quad pu = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left(-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\pi v} - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right.$$

$$(33)\quad p(u+\omega_1) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\cos^2\pi v} - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right.$$

$$(34)\quad p(u+\omega_2) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left(-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right.$$

$$(35)\quad p(u+\omega_3) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right.$$

425. Posons $v = 0$ dans les développements des fonctions

$$\frac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(0)}{\theta_\alpha(v)\,\theta_\beta(v)}, \quad \frac{\theta'^2(0)}{\theta_\alpha^2(v)},$$

et tenant compte de l'identité

$$\theta'(0) = \pi\,\theta_1(0)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0),$$

nous obtiendrons de nouvelles expressions en fonction de q pour les quantités

$$\theta_\beta(0)\,\theta_\gamma(0), \quad \theta_\gamma^2(0), \quad \theta_\beta^2(0)\,\theta_\gamma^2(0).$$

Développons, d'autre part, les deux membres des équations (32) à (35) suivant les puissances de v; on aura (u étant égal à $2\,\omega_1 v$)

$$pu = \frac{1}{(2\,\omega_1 v)^2} + \frac{g_2}{20}(2\,\omega_1 v)^2 + \frac{g_3}{28}(2\,\omega_1 v)^4 + \ldots$$

et, comme $p(u+\omega_\alpha)$ est une fonction paire,

$$\begin{aligned} p(u+\omega_\alpha) &= p\,\omega_\alpha + p''\,\omega_\alpha \frac{(2\,\omega_1 v)^2}{2} + \ldots \\ &= e_\alpha + \left(6e_\alpha^2 - \tfrac{1}{2}g_2\right)\frac{(2\,\omega_1 v)^2}{2} + \ldots . \end{aligned}$$

Identifions ces développements avec ceux des seconds membres. La comparaison des termes constants donnera

$$(36) \qquad 0 = -4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}},$$

$$(37) \qquad \begin{cases} e_1 = \left(\dfrac{1}{2\,\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 + \pi^2 - 8\pi^2 \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}\right], \\ e_2 = \left(\dfrac{1}{2\,\omega_1}\right)^2 \left(-4\eta_1\omega_1 \qquad - 8\pi^2 \displaystyle\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\right), \\ e_3 = \left(\dfrac{1}{2\,\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 \qquad - 8\pi^2 \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^m}{1-q^{2m}}\right]. \end{cases}$$

En poussant plus loin l'identification, on obtiendrait de même l'expression des quantités g_2, g_3, g_2^2, e_α^2, ...

426. La comparaison des expressions ainsi obtenues avec celles déjà trouvées par d'autres voies donne des identités qui fournissent des théorèmes arithmétiques remarquables. En voici un exemple :

On déduit des équations (37)

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left\{ 1 + 8 \left[\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}} \right] \right\}.$$

Mais cette quantité est égale (391) à

$$\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^4.$$

On aura donc l'identité

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^4 = 1 + 8 \left[\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}} \right].$$

Le premier membre développé est de la forme

$$\sum q^{n^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2}.$$

Si donc on réunit les termes égaux, le coefficient du terme en q^N sera égal au nombre S des solutions en nombres entiers de l'équation

$$n^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = N.$$

Considérons le second membre. Le terme $\frac{mq^m}{1-q^{2m}}$ peut être développé ainsi

$$\frac{mq^m}{1-q^{2m}} = m(q^m + q^{3m} + q^{5m} + \ldots).$$

et fournira un terme en q^N avec le coefficient m, si m est un diviseur de N, tel que le quotient soit impair.

Soit $N = 2^\lambda I$, I étant impair; il sera nécessaire et suffisant pour cela que m soit de la forme $2^\lambda \delta$, δ divisant I. Le coefficient de q^N dans le développement de $\sum \frac{mq^m}{1-q^{2m}}$ sera donc $2^\lambda \Sigma\delta$, la sommation s'étendant à tous les diviseurs de I.

On a, d'autre part,

$$(-1)^m \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} = (-1)^m m(q^{2m} + q^{4m} + \ldots).$$

Ce développement contient un terme en q^N avec le coefficient $(-1)^m m$ si $2m$ divise n. Cela ne peut avoir lieu si $\lambda = 0$, auquel cas $N = I$ est un nombre impair. On a donc, dans ce premier cas,

$$S = 8\Sigma\delta.$$

Soit, au contraire, $\lambda > 0$; $2m$ divisera N si m divise $2^{\lambda-1} I$, et par suite, si m est de la forme $2^\mu \delta$, μ pouvant varier de o à $\lambda - 1$. D'ailleurs, $(-1)^m$ sera positif si $\mu > 0$, négatif si $\mu = 0$. Le coefficient de q^N dans le développement de $\sum \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}$ sera donc

$$2^{\lambda-1}\Sigma\delta + 2^{\lambda-2}\Sigma\delta + \ldots + 2\Sigma\delta - \Sigma\delta = (2^\lambda - 3)\Sigma\delta,$$

et l'on aura

$$S = 8[2^\lambda \Sigma\delta - (2^\lambda - 3)\Sigma\delta] = 24\Sigma\delta.$$

VII. — Dérivées par rapport aux paramètres.

427. Jusqu'à présent, nous avons traité ω_1, ω_2 comme constants, de telle sorte que les fonctions p, ζ, σ ne dépendraient que d'une seule variable u. Supposons maintenant ω_1, ω_2 variables; continuons à désigner par p', p'', ...; ζ', ζ'', ...; σ', σ'', ... les dérivées prises par rapport à u, et cherchons à déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial \omega_1}$, $\frac{\partial p}{\partial \omega_2}$, ... prises par rapport aux deux autres variables.

Soit f l'une quelconque des fonctions considérées; elle est homogène d'un certain degré λ en u, ω_1, ω_2; on aura donc cette première relation

$$\omega_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_2} + uf' = \lambda f.$$

Il suffira donc, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial \omega_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega_2}$, d'obtenir une nouvelle relation entre ces quantités.

428. Considérons d'abord la fonction p. Désignons par p_1, ζ_1 ce que deviennent p et ζ lorsqu'on y remplace u par $u_1 = u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Nous aurons

$$p_1 = p, \qquad \zeta_1 = \zeta + 2m_1\eta_1 + 2m_2\eta_2,$$

et en prenant les dérivées partielles de la première équation par rapport à u, ω_1, ω_2, dont p_1 est une fonction composée,

$$p'_1 = p', \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + 2m_1 p'_1 = \frac{\partial p}{\partial \omega_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial \omega_2} + 2m_2 p'_1 = \frac{\partial p}{\partial \omega_2}.$$

En combinant ces équations, on trouve aisément

$$\eta_1 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_2} + p'_1\zeta_1 = \eta_1 \frac{\partial p}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p}{\partial \omega_2} + p'\zeta.$$

Cette équation montre que la fonction

$$F = \eta_1 \frac{\partial p}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p}{\partial \omega_2} + p'\zeta$$

est une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. Nous allons chercher ses pôles.

On a, par définition,

$$p = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^2} \right],$$

d'où

$$\frac{\partial p}{\partial \omega_1} = \sum{}' \left[\frac{4m_1}{(u - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2)^3} + \frac{4m_1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^3} \right],$$

série convergente qui s'annule pour $u = 0$, et ne peut devenir infinie que si $u =$ période. On trouve une expression analogue pour $\frac{\partial p}{\partial \omega_2}$; enfin p' et ζ ne sont infinis que pour $u =$ période. Le point $u = 0$ sera donc (aux périodes près) le seul pôle de F.

On a, aux environs de ce point,

$$p = \frac{1}{u^2} + \tfrac{1}{20} g_2 u^2 + \ldots, \qquad p' = -\frac{2}{u^3} + \tfrac{1}{10} g_2 u + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{1}{u} - \tfrac{1}{60} g_2 u^3 + \ldots,$$

d'où

$$F = -\frac{2}{u^4} + \tfrac{2}{15} g_2 + \ldots.$$

D'ailleurs

$$2p^2 = \frac{2}{u^4} + \tfrac{2}{10} g_2 + \ldots;$$

donc

$$F + 2p^2 - \tfrac{1}{3} g_2 = 0,$$

car le premier membre est une fonction elliptique sans pôle, et qui s'annule pour $u = 0$.

Désignons par D l'opération

$$(1) \qquad D = -2\eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - 2\eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2};$$

nous aurons

$$(2) \qquad \begin{cases} Dp = 2p'\zeta - 2F & = 2p'\zeta + 4p^2 - \tfrac{2}{3} g_2 \\ \quad = 2(p\zeta)' + 6p^2 - \tfrac{2}{3} g_2 & = 2(p\zeta)' + p'' - \tfrac{1}{6} g_2. \end{cases}$$

429. Substituons dans cette équation pour p et ζ leurs développements

$$p = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{1200} u^6 + \ldots, \qquad \zeta = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \ldots,$$

et identifions les termes en u^2 et u^4; il viendra

$$(3) \qquad Dg_2 = 12 g_3, \qquad Dg_3 = \tfrac{2}{3} g_2^2,$$

et, plus généralement, f désignant une fonction quelconque de u, g_2, g_3,

$$(4)\quad Df = \frac{\partial f}{\partial g_2} Dg_2 + \frac{\partial f}{\partial g_3} Dg_3 = \left(12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3}\right) f.$$

On aura, en particulier,

$$(5)\quad \begin{cases} D\Delta = 12 g_3 . 3 g_2^2 - \frac{2}{3} g_2^2 . 27 . 2 g_3 = 0, \\ DJ = \dfrac{12 g_3 . 3 g_2^2}{\Delta} - \dfrac{g_2^3 \, D\Delta}{\Delta^2} = \dfrac{36 g_3 g_2^2}{\Delta}. \end{cases}$$

Mais

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta},$$

d'où

$$g_2 = (\Delta J)^{\frac{1}{3}}, \qquad g_3 = \left[\frac{\Delta(J-1)}{27}\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$(6)\quad DJ = 4\sqrt{3}\,(J-1)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{2}{3}} \Delta^{\frac{1}{6}}.$$

430. Intégrons l'équation (2) par rapport à u; on trouvera

$$(7)\quad D\zeta = -2p\zeta - p' + \tfrac{1}{6} g_2 u.$$

On n'a pas à ajouter de constante arbitraire, car, en substituant à ζ, p, p' leurs développements, on voit que les deux membres s'annulent pour $u = 0$.

Intégrons encore une fois, il viendra

$$(8)\quad D \log \sigma = \zeta^2 - p + \tfrac{1}{12} g_2 u^2,$$

les deux membres s'annulant encore pour $u = 0$.

Mais on a évidemment

$$D \log \sigma = \frac{D\sigma}{\sigma}, \qquad \zeta^2 - p = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = \frac{\sigma''}{\sigma}.$$

L'équation (8) pourra donc s'écrire ainsi

$$(9)\quad D\sigma = \sigma'' + \tfrac{1}{12} g_2 u^2 \sigma.$$

En substituant dans cette équation aux dérivées partielles le développement

$$\sigma = u + d_1 u^5 + d_2 u^7 + \ldots,$$

l'identification donnera une formule récurrente pour le calcul des coefficients d_1, d_2, ...

431. On a évidemment, d'après la définition de l'opération D,

$$(10) \qquad D\omega_\alpha = -2\eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$(11) \quad D\tau = \frac{\omega_1 D\omega_2 - \omega_2 D\omega_1}{\omega_1^2} = \frac{-2\omega_1\eta_2 + 2\omega_2\eta_1}{\omega_1^2} = \frac{\pi i}{\omega_1^2}.$$

D'autre part, $f(u)$ désignant une fonction quelconque de u, ω_1, ω_2 et u_1 une valeur de u qui soit fonction de ω_1, ω_2, la règle de dérivation des fonctions composées donnera

$$D f(u_1) = [D f(u)]_{u=u_1} + f'(u_1) D u_1.$$

Appliquons cette formule aux expressions

$$\eta_\alpha = \zeta\omega_\alpha, \qquad e_\alpha = p\omega_\alpha.$$

En remarquant que $p'\omega_\alpha = 0$, $p''\omega_\alpha = 6e_\alpha^2 - \frac{1}{2}g_2$, il viendra

$$(12) \qquad D\eta_\alpha = -2e_\alpha\eta_\alpha + \tfrac{1}{6}g_2\omega_\alpha + e_\alpha . 2\eta_\alpha = \tfrac{1}{6}g_2\omega_\alpha,$$

$$(13) \qquad De_\alpha = 4e_\alpha^2 - \tfrac{2}{3}g_2;$$

puis

$$D\log(e_\beta - e_\alpha)$$
$$= \frac{D(e_\beta - e_\alpha)}{e_\beta - e_\alpha} = 4\frac{e_\beta^2 - e_\alpha^2}{e_\beta - e_\alpha} = 4(e_\beta + e_\alpha) = -4e_\gamma,$$

et enfin

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{DU_\alpha}{U_\alpha} = D\log U_\alpha = D\log[(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)]^{-\frac{1}{4}} \\ \qquad = \frac{1}{4}(4e_\gamma + 4e_\beta) = -e_\alpha. \end{cases}$$

432. Appliquons ces formules au calcul de l'expression

$$\mathrm{D}\log\sigma_\alpha = \mathrm{D}\log\frac{e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\mathrm{U}_\alpha}$$

$$= -\mathrm{D}\log\mathrm{U}_\alpha - \mathrm{D}\eta_\alpha(u+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha) + \mathrm{D}\log\sigma(u+\omega_\alpha)$$

$$= e_\alpha - (u+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha)\tfrac{1}{6}g_2\omega_\alpha + \eta_\alpha\eta_\alpha$$

$$+\frac{\sigma''(u+\omega_\alpha)}{\sigma(u+\omega_\alpha)} + \tfrac{1}{12}g_2(u+\omega_\alpha)^2 + \frac{\sigma'(u+\omega_\alpha)}{\sigma(u+\omega_\alpha)}\mathrm{D}\omega_\alpha.$$

On a

$$\mathrm{D}\omega_\alpha = -2\eta_\alpha$$

et

$$\sigma\,(u+\omega_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\sigma_\alpha,$$

$$\sigma'(u+\omega_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}(\sigma'_\alpha + \eta_\alpha\sigma_\alpha),$$

$$\sigma''(u+\omega_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}(\sigma''_\alpha + 2\eta_\alpha\sigma'_\alpha + \eta_\alpha^2\sigma_\alpha).$$

Substituant ces valeurs, il viendra

$$\mathrm{D}\log\sigma_\alpha = \frac{\mathrm{D}\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} = e_\alpha - (u+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha)\tfrac{1}{6}g_2\omega_\alpha + \eta_\alpha^2$$

$$+\frac{\sigma''_\alpha + 2\eta_\alpha\sigma'_\alpha + \eta_\alpha^2\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} + \frac{1}{12}g_2(u+\omega_\alpha)^2$$

$$-2\eta_\alpha\frac{\sigma'_\alpha + \eta_\alpha\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha}$$

ou, en chassant le dénominateur et réduisant,

$$\mathrm{D}\sigma_\alpha = \sigma''_\alpha + (e_\alpha + \tfrac{1}{12}g_2u^2)\sigma_\alpha, \tag{15}$$

équation aux dérivées partielles, analogue à l'équation (9) précédemment trouvée pour la fonction σ.

433. Cette équation (9) n'est d'ailleurs qu'une transformée de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i\frac{\partial\theta}{\partial\tau},$$

à laquelle satisfait la fonction θ (382).

Pour établir cette équivalence, revenons à la forme primi-

tive de l'équation (9)

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + \tfrac{1}{12} g_2 u^2,$$

et rappelons-nous les relations

$$\sigma = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta(v,\tau)}{\theta'(0,\tau)}, \qquad v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$
$$\Delta = \frac{16\pi^4}{(2\omega_1)^{12}} \theta'^8(0,\tau).$$

On en déduit immédiatement

$$\sigma = \sqrt{\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{8}} \omega_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta(v,\tau)$$

et, en prenant la dérivée logarithmique par rapport à u

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta}$$

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = \frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}}{\theta} - \left(\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta}\right)^2\right].$$

On aura, d'autre part,

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{8}\frac{D\Delta}{\Delta} - \frac{1}{2}\frac{D\omega_1}{\omega_1} + \frac{u^2}{2}\frac{\omega_1 D\eta_1 - \eta_1 D\omega_1}{\omega_1^2} + \frac{\frac{\partial\theta}{\partial v} Dv + \frac{\partial\theta}{\partial\tau} D\tau}{\theta}.$$

Or

$$Dv = D\frac{u}{2\omega_1} = -\frac{u\,D\omega_1}{2\omega_1^2} = \frac{\eta_1 u}{\omega_1^2}.$$

Substituant cette valeur et celles de $D\Delta$, $D\omega_1$, $D\eta_1$, $D\tau$ dans l'expression précédente, elle devient

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = \frac{\eta_1}{\omega_1} + \tfrac{1}{12} g_2 u^2 + \frac{\eta_1^2 u^2}{\omega_1^2} + \frac{\eta_1 u}{\omega_1^2}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta} + \frac{\pi i}{\omega_1^2}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial\tau}}{\theta}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{\sigma'}{\sigma}$, $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'$, $\frac{D\sigma}{\sigma}$ dans l'équation dif-

férentielle, réduisant et multipliant par $4\omega_1^2\theta$, il viendra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial\theta}{\partial\tau}.$$

434. On peut déduire de l'équation (9) une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait l'expression

$$\psi_n = \frac{\sigma n u}{\sigma^{n^2} u}.$$

Changeons, en effet, u en nu et posons $\sigma nu = y$; l'équation (9) se changera en

$$\mathrm{D}y = \frac{1}{n^2} y'' + \tfrac{1}{12} g_2 n^2 u^2 y.$$

Posons

$$y = \sigma^{n^2} \psi_n,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}y}{y} = \frac{\mathrm{D}\psi_n}{\psi_n} + n^2 \mathrm{D}\log\sigma = \frac{\mathrm{D}\psi_n}{\psi_n} + n^2(\zeta^2 - \wp + \tfrac{1}{12} g_2 u^2),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\psi'_n}{\psi_n} + n^2 \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\psi'_n}{\psi_n} + n^2\zeta,$$

$$\begin{aligned} \frac{y''}{y} &= \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \left(\frac{\psi'_n}{\psi_n}\right)' - n^2\wp + \left(\frac{\psi'_n}{\psi_n} + n^2\zeta\right)^2 \\ &= \frac{\psi''_n}{\psi_n} + 2n^2\zeta\frac{\psi'_n}{\psi_n} + n^4\zeta^2 - n^2\wp. \end{aligned}$$

La transformée en ψ_n sera donc

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{D}\psi_n}{\psi_n} + n^2(\zeta^2 - \wp + \tfrac{1}{12} g_2 u^2) \\ &\quad = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\psi''_n}{\psi_n} + 2n^2\zeta\frac{\psi'_n}{\psi_n} + n^4\zeta^2 - n^2\wp\right) + \tfrac{1}{12} g_2 n^2 u^2 \end{aligned}$$

ou

$$(16) \qquad \mathrm{D}\psi_n = \frac{1}{n^2}\psi''_n + 2\zeta\psi'_n + (n^2 - 1)\wp\psi_n.$$

435. Prenons $\wp$, g_2, g_3 pour variables indépendantes au

lieu de u, g_2, g_3; nous aurons

$$\begin{aligned}
D\psi_n &= 12 g_3 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_3} + \frac{\partial \psi_n}{\partial p} Dp \\
&= 12 g_3 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_3} + \frac{\partial \psi_n}{\partial p} (2 p' \zeta + 4 p^2 - \tfrac{2}{3} g_2)
\end{aligned}$$

$$\psi'_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial p} p',$$

$$\psi''_n = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial p^2} p'^2 + \frac{\partial \psi_n}{\partial p} p'' = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial p^2} (4p^3 - g_2 p - g_3) + \frac{\partial \psi_n}{\partial p} (6p^2 - \tfrac{1}{2} g_2).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (16) et chassant le dénominateur n^2, on aura la transformée

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned}
& n^2 \left(12 g_3 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial g_3} \right) \\
& \quad = (4p^3 - g_2 p - g_3) \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial p^2} \\
& \qquad + \left[(6 - 4n^2) p^2 - \frac{3 - 4n^2}{6} g_2 \right] \frac{\partial \psi_n}{\partial p} + n^2 (n^2 - 1) p \psi_n.
\end{aligned} \right.$$

Si n est entier et impair, ψ_n sera un polynôme entier en p, g_2, g_3; si n est pair, ce sera le produit d'un semblable polynôme par p'. Dans l'un et l'autre cas, l'équation (17) fournira une formule récurrente pour le calcul des coefficients des diverses puissances de p.

436. Supposons qu'on ait pris pour variables indépendantes g_2, g_3 au lieu de ω_1, ω_2. L'opération D étant exprimée au moyen de ces nouvelles variables par la relation

$$D = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

les équations précédentes donneront une première relation entre $\frac{\partial f}{\partial g_2}$, $\frac{\partial f}{d g_3}$, f désignant l'une quelconque des expressions considérées ci-dessus. L'homogénéité en donnera une

seconde. Supposons, en effet, que f soit homogène de degré λ par rapport à u, ω_1, ω_2 ou, ce qui revient au même, par rapport à u, $g_2^{-\frac{1}{4}}$, $g_3^{-\frac{1}{6}}$; on aura

$$u\frac{\partial f}{\partial u}+g_2^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial f}{\partial g_2^{-\frac{1}{4}}}+g_3^{-\frac{1}{6}}\frac{\partial f}{\partial g_3^{-\frac{1}{6}}}=\lambda f$$

ou

$$u\frac{\partial f}{\partial u}-4g_2\frac{\partial f}{\partial g_2}-6g_3\frac{\partial f}{\partial g_3}=\lambda f.$$

437. On peut encore prendre pour variables indépendantes Δ, J, v. On aura, dans ce cas,

$$f=\Delta^{-\frac{\lambda}{12}}\varphi.$$

φ, étant homogène et de degré zéro, se réduira à une fonction de J, v. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial\Delta}$ sera évidemment égale à

$$-\frac{\lambda}{12}\Delta^{-\frac{\lambda}{12}-1}\varphi=-\frac{\lambda}{12}\frac{f}{\Delta}.$$

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial v}$ sera égale à $2\omega_1\frac{\partial f}{\partial u}$; enfin, $D\Delta$ étant nul, $\frac{\partial f}{\partial J}$ se déduira de la formule

$$Df=\frac{\partial f}{\partial J}DJ+\frac{\partial f}{\partial v}Dv. \tag{18}$$

Effectuant à nouveau sur cette égalité l'opération D, on aura une nouvelle équation qui fournit $\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}$; etc.

Supposons, pour plus de simplicité, que f soit indépendant de u; il viendra

$$D^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}(DJ)^2+\frac{\partial f}{\partial J}\frac{\partial DJ}{\partial J}DJ. \tag{19}$$

Mais de l'égalité

$$DJ=4\sqrt{3}(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{2}{3}}\Delta^{\frac{1}{6}},$$

on déduit

$$(DJ)^2 = 48(J-1)J^{\frac{4}{3}}\Delta^{\frac{1}{3}} = 48\,\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}(J-1)J,$$

$$\frac{\partial DJ}{\partial J} = 4\sqrt{3}\,\Delta^{\frac{1}{6}}\left[\tfrac{1}{2}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{-\frac{1}{3}}\right],$$

$$\frac{\partial DJ}{\partial J}DJ = 48\,\Delta^{\frac{1}{3}}\left[\tfrac{1}{2}J^{\frac{4}{3}} + \tfrac{2}{3}(J-1)J^{\frac{1}{3}}\right] = 48\,\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7J-4}{6}\right).$$

L'équation (19) devient donc

$$(20)\qquad (J-1)J\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{\partial f}{\partial J} = \frac{D^2 f}{48\,\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}}$$

et pourra servir au calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}$.

438. Comme application, posons $f = \omega_\alpha$; on aura

$$D\omega_\alpha = -2\eta_\alpha,$$

$$D^2\omega_\alpha = -2D\eta_\alpha = -\tfrac{1}{3}g_2\omega_\alpha = -\tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\omega_\alpha.$$

Nous aurons donc

$$(21)\qquad (J-1)J\frac{\partial^2\omega_\alpha}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial J} + \frac{\omega_\alpha}{144} = 0.$$

Soit en second lieu $f = \eta_\alpha$; on aura

$$D\eta_\alpha = \tfrac{1}{6}g_2\omega_\alpha = \tfrac{1}{6}\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\omega_\alpha,$$

$$\begin{aligned} D^2\eta_\alpha &= \tfrac{1}{6}\omega_\alpha Dg_2 + \tfrac{1}{6}g_2 D\omega_\alpha = 2g_3\omega_\alpha - \tfrac{1}{3}g_2\eta_\alpha \\ &= \frac{12g_3}{g_2}D\eta_\alpha - \tfrac{1}{3}g_2\eta_\alpha = \frac{12g_3}{g_2}DJ\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial J} - \tfrac{1}{3}g_2\eta_\alpha \\ &= 16\,\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}(J-1)\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial J} - \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\eta_\alpha. \end{aligned}$$

On aura donc

$$(J-1)J\frac{\partial^2\eta_\alpha}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial J} = \tfrac{1}{3}(J-1)\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial J} - \frac{\eta_\alpha}{144}$$

et, en réduisant,

$$(22)\qquad (J-1)J\frac{\partial^2\eta_\alpha}{\partial J^2}+\frac{5J-2}{6}\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial J}+\frac{\eta_\alpha}{144}=0.$$

439. Si nous supposons Δ constant et J variable, les deux périodes ω_1 et $\omega_2=\tau\omega_1$ satisferont, comme nous venons de le voir, à une équation différentielle linéaire du second ordre

$$A\frac{d^2\omega}{dJ^2}+2B\frac{d\omega}{dJ}+C\omega=0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$A=(J-1)J,\qquad B=\frac{7J-4}{12},\qquad C=\tfrac{1}{144}.$$

Nous aurons donc à la fois

$$(23)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d^2\omega_1}{dJ^2}+2B\dfrac{d\omega_1}{dJ}+C\omega_1=0,\\[2ex] A\dfrac{d^2\tau\omega_1}{dJ^2}+2B\dfrac{d\tau\omega_1}{dJ}+C\tau\omega_1=0.\end{cases}$$

Développons cette dernière équation en tenant compte de la précédente, il viendra

$$(24)\qquad 2A\frac{d\tau}{dJ}\frac{d\omega_1}{dJ}+\left(A\frac{d^2\tau}{dJ^2}+2B\frac{d\tau}{dJ}\right)\omega_1=0.$$

Une nouvelle dérivation donnera

$$(25)\qquad \begin{cases} 2A\dfrac{d\tau}{dJ}\dfrac{d^2\omega_1}{\partial J^2}+\left[3A\dfrac{d^2\tau}{dJ^2}+2\left(\dfrac{dA}{\partial J}+B\right)\dfrac{d\tau}{dJ}\right]\dfrac{d\omega_1}{\partial J}\\[2ex] \qquad\qquad +\dfrac{d}{dJ}\left(A\dfrac{d^2\tau}{dJ^2}+2B\dfrac{d\tau}{dJ}\right)\omega_1=0.\end{cases}$$

Éliminant ω_1 et ses dérivées entre les équations (23), (24), (25), nous obtiendrons une équation différentielle du troisième ordre à laquelle τ satisfera.

440. La relation entre les deux variables J et τ mérite d'être étudiée avec soin.

A chaque valeur complexe de τ, à partie imaginaire positive, correspond une valeur unique de J, définie par la formule (34) du n° 391 (où $q = e^{\pi i \tau}$). Les séries qui figurent dans cette expression étant uniformément convergentes dans l'intérieur de tout contour fermé, situé dans la moitié supérieure du plan où l'on figure la variation de τ (et ne rencontrant pas l'axe des x), J sera dans cette région une fonction analytique de τ, uniforme et sans point critique.

Réciproquement, supposons J donné; les rapports des quantités e_1, e_2, e_3 seront déterminés par les relations

$$e_1 + e_2 + e_2 = 0,$$

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{-4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)^3}{(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2}.$$

En éliminant e_3, on aura une équation du sixième degré en $\frac{e_2}{e_1}$; mais, à cause de la symétrie des équations en e_1, e_2, e_3, elle admet évidemment pour racines les six quantités $\frac{e_\beta}{e_\alpha}$. Donc la connaissance de J détermine e_1, e_2, e_3 sans ambiguïté à un facteur près de proportionnalité μ.

Or, si l'on change e_1, e_2, e_3 en μe_1, μe_2, μe_3, la période principale

$$2\omega_\alpha = \int_{e_\beta}^{e_\gamma} \frac{dz}{\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}$$

se change en

$$\int_{\mu e_\beta}^{\mu e_\gamma} \frac{dz}{\sqrt{(z - \mu e_1)(z - \mu e_2)(z - \mu e_3)}}.$$

Changeons également z en μz; cette intégrale deviendra $\frac{1}{\sqrt{\mu}}\omega_\alpha$. Donc la connaissance de J détermine les périodes principales et, par suite, tout le réseau des périodes, à un facteur près de proportionnalité, égal à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, lequel disparaît des rapports des périodes.

Mais à un même réseau correspondent une infinité de valeurs de τ, qui se déduisent de l'une d'elles $\tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ en remplaçant ω'_1, ω'_2 par un autre système de périodes équivalentes

$$\omega_1 = a\omega'_1 + b\omega'_2, \qquad \omega_2 = c\omega'_1 + d\omega'_2;$$

a formule générale des valeurs de τ correspondantes à une même valeur de J sera donc

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'},$$

où a, b, c, d sont des entiers tels que l'on ait

$$ad - bc = 1.$$

Tous ces nombres τ ont, comme τ', leur partie imaginaire positive (308).

441. Soient d'ailleurs p, q deux entiers réels quelconques premiers entre eux. On pourra déterminer deux autres entiers p', q', tels que l'on ait

$$pq' - qp' = 1,$$

et, plus généralement, n désignant un entier quelconque,

$$p(nq + q') - q(np + p') = 1.$$

Donc J prendra la même valeur au point τ' et au point

$$\tau = \frac{np + p' + p\tau}{nq + q' + q\tau}.$$

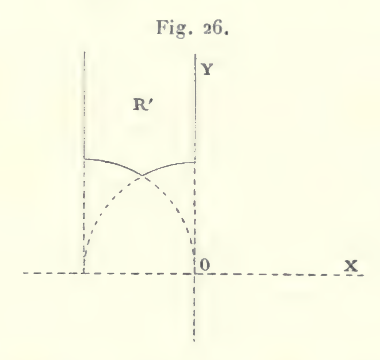
Mais, si n tend vers ∞, ce point se rapprochera indéfiniment de $\frac{p}{q}$. Donc $\frac{p}{q}$ est un point d'indétermination pour J; et comme tout point de l'axe des x est un point limite pour l'ensemble des points $\frac{p}{q}$, l'axe des x sera une ligne critique au-dessous de laquelle la fonction ne pourra être prolongée.

442. Parmi les valeurs de τ en nombre infini qui correspondent à une même valeur de J, considérons spécialement celle qu'on obtient en choisissant pour $2\omega_1$ la période de module minimum, et pour $2\omega_2$ la période principale qui la suit lorsqu'on tourne dans le sens direct autour du triangle principal. Désignons-la par τ'. Il est aisé de déterminer la région du plan décrite par τ' lorsque J prend toute la série des valeurs complexes.

Considérons, en effet, le triangle T formé par les trois points -1, 0, τ'. Il est semblable au triangle principal $(2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3)$; or celui-ci a ses angles aigus et son plus petit côté est $2\omega_1$, qui a pour correspondant dans T le côté $(-1, 0)$. Le troisième sommet τ' sera donc situé : 1° au-dessus de l'axe des x; 2° dans la bande comprise entre les deux droites $x = 0$, $x = -1$; 3° en dehors des cercles de rayon 1, décrits des points 0 et 1 comme centre.

La région R' ainsi délimitée (*fig.* 26) est un quadrilatère curviligne formé par quatre arcs de cercle ayant leur centre

Fig. 26.



sur l'axe des x (une droite normale aux x pouvant être considérée comme cas limite de ces cercles). Ce quadrilatère a deux angles droits; le troisième est égal à $\frac{2\pi}{3}$; le dernier, correspondant au sommet à l'infini, est nul.

443. Soit $\tau = x + iy$ une variable complexe liée à

$\tau' = x' + iy'$ par la relation

$$\tau = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'} \qquad (ad - bc = 1).$$

On en déduit

$$\tau' = x' + iy' = \frac{c - a\tau}{-d + b\tau} = \frac{c - ax - aiy}{-d + bx + biy},$$

et, en égalant les parties réelles,

$$x' = \frac{(c - ax)(-d + bx) - aby^2}{(-d + bx)^2 + b^2y^2}$$
$$= \frac{-cd + (ad + bc)x - ab(x^2 + y^2)}{d^2 - 2bdx + b^2(x^2 + y^2)}.$$

D'autre part, en multipliant $x' + iy'$ par l'expression conjuguée, il vient

$$x'^2 + y'^2 = \frac{c^2 - 2acx + a^2(x^2 + y^2)}{d^2 - 2bdx + b^2(x^2 + y^2)}.$$

Si donc τ' décrit un cercle

$$A(x'^2 + y'^2) + Bx' + C = 0,$$

ayant son centre sur l'axe des x, τ décrira un cercle analogue.

Lorsque τ' décrit le quadrilatère R', limité par quatre arcs de cercles, τ décrira un autre quadrilatère R, limité par les arcs transformés. Ceux-ci se coupent sous les mêmes angles que les précédents; car on sait (t. I, n° 192) que la transformation conserve les angles. En particulier, le sommet de l'angle nul sera le point $\tau = \frac{d}{b}$ correspondant à $\tau' = \infty$. Il est situé sur l'axe des x (ou à l'infini, si $b = 0$).

En faisant varier les entiers a, b, c, d nous obtiendrons une infinité de quadrilatères, dont l'ensemble couvre le demi-plan. Dans chacun d'eux, J prendra toutes les valeurs possibles, chacune une fois seulement.

444. La fonction $J(\tau)$ que nous venons d'étudier est le type le plus simple des *fonctions modulaires*. On donne ce nom aux fonctions analytiques, uniformes dans le demi-plan, et qui ne prennent qu'un nombre limité de valeurs distinctes pour l'ensemble des valeurs de la variable indépendante τ, qui se déduisent les unes des autres par les substitutions linéaires de déterminant 1

$$\tau = \frac{c+d\tau'}{a+b\tau'}.$$

Toutes ces fonctions admettent évidemment l'axe des x comme ligne critique.

445. Pour en donner quelques exemples, considérons les produits infinis $\varphi\tau$, $\varphi_1\tau$, $\varphi_2\tau$, $\varphi_3\tau$ du n° 397. On a, d'après les formules (50) et (53) du même numéro,

$$\varphi^{24}\tau = \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}\Delta, \qquad \varphi_\alpha^{24} = \frac{16(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

Changeons de périodes fondamentales en posant

$$(26) \qquad \omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

d'où

$$\omega'_1 = \omega_1(a+b\tau), \qquad \tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}.$$

La substitution (26) n'altère pas Δ, et fait éprouver aux quantités e_1, e_2, e_3 une permutation, variable suivant celle des six classes à laquelle appartient la substitution (313). Nous aurons donc

$$\varphi^{24}\tau' = \left(\frac{\omega'_1}{\pi}\right)^{12}\Delta = (a+b\tau)^{12}\varphi^{24}\tau,$$

$$\varphi_{\alpha'}^{24}\tau' = \varphi_\alpha^{24}\tau,$$

α' parcourant, ainsi que α, la suite des valeurs 1, 2, 3, mais dans un ordre qui peut être différent et qui dépend de l'ordre de parité des coefficients a, b, c, d.

On en déduit

(27) $$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\varphi\tau'=\mathrm{E}\sqrt{a+b\tau}\,\varphi\tau;$$

(28) $$\varphi_{\alpha'}\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\varphi_{\alpha'}\tau'=\mathrm{E}_{\alpha'}\varphi_{\alpha}\tau,$$

E, $\mathrm{E}_{\alpha'}$ étant des racines $24^{\text{ièmes}}$ de l'unité, que nous allons préciser.

446. Convenons tout d'abord d'adopter, pour $\sqrt{a+b\tau}$, celle des deux déterminations de ce radical dont l'argument est $> -\frac{\pi}{2}$, mais ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$.

Si b est nul, la condition $ad-bc=1$ montre qu'on aura $a=d=\pm 1$; et le radical $\sqrt{a+b\tau}$ aura une valeur constante égale à 1 ou à i, suivant qu'on a $a=1$ ou $a=-1$. Son argument sera 0 dans le premier cas, $\frac{\pi}{2}$ dans le second. Si $b \gtrless 0$, τ ne passant par aucune valeur réelle, $\sqrt{a+b\tau}$ ne pourra être purement imaginaire; son argument ne pourra donc atteindre la limite supérieure $\frac{\pi}{2}$, et $\sqrt{a+b\tau}$ sera une fonction continue de τ.

Les produits $\varphi\tau$, $\varphi_{\alpha}\tau$, $\varphi\tau'$, $\varphi_{\alpha'}\tau'$ sont aussi des fonctions continues de τ (τ' étant une fonction continue de τ). D'ailleurs les séries

$$\Sigma q^{2n}, \qquad \Sigma q^{2n-1},$$

où $|q|<1$, étant absolument convergentes, la valeur de ces produits n'est jamais nulle (t. I, n° **321**).

Les quantités E, $\mathrm{E}_{\alpha'}$, définies par les équations (27), (28), sont donc des fonctions continues de τ; mais ce sont des racines $24^{\text{ièmes}}$ de l'unité; elles sont donc indépendantes de τ; mais elles dépendent des paramètres a, b, c, d; mettant ceux-ci en évidence, nous les représenterons par

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{E}_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

447. Soient

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

deux substitutions successives ayant pour résultante

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb', & ba' + db' \\ ac' + cd', & bc' + dd' \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad \tau'' = \frac{c' + d'\tau'}{a' + b'\tau'} = \frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau},$$

on aura

$$\begin{aligned} \varphi\tau'' &= \mathrm{E}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\sqrt{a' + b'\tau'}\,\varphi\tau' \\ &= \mathrm{E}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\sqrt{a' + b'\tau'}\,\mathrm{E}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\sqrt{a + b\tau}\,\varphi\tau; \end{aligned}$$

mais, d'autre part,

$$\varphi\tau'' = \mathrm{E}\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\sqrt{a'' + b''\tau}\,\varphi\tau.$$

Donc

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \varepsilon\mathrm{E}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

ε désignant le facteur

$$\varepsilon = \sqrt{a' + b'\tau'}\,\frac{\sqrt{a + b\tau}}{\sqrt{a'' + b''\tau}} = \sqrt{\frac{\omega_1''}{\omega_1'}}\,\frac{\sqrt{\dfrac{\omega_1'}{\omega_1}}}{\sqrt{\dfrac{\omega_1''}{\omega_1}}}.$$

On a évidemment $\varepsilon^2 = 1$, d'où $\varepsilon = \pm 1$. Cherchons dans quelles circonstances on aura $\varepsilon = -1$.

Il faut, pour cela, que l'argument de ε soit égal à π. Celui de $\sqrt{a' + b'\tau'}$ est $> -\frac{\pi}{2}$, mais $\overline{\overline{<}}\,\frac{\pi}{2}$; l'argument du second facteur devra donc être $< \frac{3\pi}{2}$, mais $\overline{\overline{>}}\,\frac{\pi}{2}$.

Donnons à τ la valeur particulière $\mathrm{R}i$, R étant un infini positif, et posons

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2\mathrm{R}^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \qquad \sin\varphi = \frac{b\mathrm{R}}{\rho},$$

nous aurons

$$a + bRi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\sqrt{a + bRi} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

où $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}$ sont déterminés par les formules

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{\rho + a}{2\rho}},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{bR}{2\rho\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

La valeur du radical $\sqrt{\frac{\rho+a}{2\rho}}$ doit être prise positivement, puisque l'argument de $\sqrt{a+bRi}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas particulier où $b = 0$, $a = -1$, ce radical s'annule, et ces formules devront être remplacées par celles-ci

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Posons de même

$$\sqrt{a''^2 + b''^2 R^2} = \rho''$$

et

$$\cos\frac{\varphi''}{2} = \sqrt{\frac{\rho'' + a''}{2\rho''}}, \quad \sin\frac{\varphi''}{2} = \frac{b''R}{2\rho''\cos\frac{\varphi''}{2}}$$

ou, si $b'' = 0$, $a'' = -1$,

$$\cos\frac{\varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi''}{2} = 1;$$

nous aurons

$$\sqrt{a'' + b''Ri} = \sqrt{\rho''}\left(\cos\frac{\varphi''}{2} + i\sin\frac{\varphi''}{2}\right),$$

et l'argument de

$$\frac{\sqrt{a + bRi}}{\sqrt{a'' + b''Ri}}$$

sera $\frac{\varphi - \varphi''}{2}$. Pour qu'il soit $< \frac{3\pi}{2}$ et $\gtreqless \frac{\pi}{2}$, il faut qu'on ait

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} < 0$$

ou

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = +1.$$

Considérons d'abord le cas général où $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ sont positifs, on aura

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi''}{2}.$$

Remplaçons les sinus par leurs valeurs et multiplions par le facteur positif $4\rho\rho''\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2}$; nous obtiendrons l'expression

$$4\rho\rho''\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi''}{2} + bb''R^2 = (\rho + a)(\rho'' + a'') + bb''R^2,$$

qui devra être négative ou nulle.

Or les facteurs

$$\rho + a = \sqrt{a^2 + b^2R^2} + a, \qquad \rho'' + a''$$

sont positifs; on aura donc, pour première condition,

$$bb'' < 0$$

et, par suite,

$$bb'' = -|b|\,|b''|.$$

On a d'ailleurs

$$\rho + a = |b|R\left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{a}{|b|R}\right]$$
$$= |b|R\left(1 + \frac{a}{|b|R} + \ldots\right).$$

Développant de même $\rho'' + a''$, il viendra

$$(\rho + a)(\rho'' + a'') + bb''R^2 = |bb''|R^2\left[\left(\frac{a}{|b|} + \frac{a''}{|b''|}\right)\frac{1}{R} + \ldots\right].$$

Pour $R = \infty$, cette expression a le signe de la quantité

$$\frac{a}{|b|} + \frac{a''}{|b''|}$$

ou, en multipliant par le facteur positif $|b|\,|b''|^2$, celui de la quantité

$$a|b''|^2 + a''|bb''| = ab''^2 - a''bb''.$$

Or celle-ci est égale à $b'b''$; car on a

$$ab'' - a''b = a(ba' + db') - (aa' + cb')b = (ad - bc)b' = b'.$$

Nous obtenons donc cette nouvelle condition

$$b'b'' < 0.$$

Il y a encore doute si $b'b'' = 0$.

Dans ce dernier cas, bb'' étant supposé < 0, on aura $b' = 0$, $a' = d' = \pm 1$, $a'' = aa'$, $b'' = ba'$. D'ailleurs $bb'' < 0$. Donc $a' = -1$, $a'' = -a$, $b'' = -b$, $\rho'' = \rho$, d'où

$$(\rho + a)(\rho'' + a'') + bb''R^2 = \rho^2 - a^2 - b^2R^2 = 0.$$

Donc $\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = 0$. Mais cette condition ne suffit pas; il faut encore que

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2} - \sin\frac{\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

soit égal à $+1$. Or $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ sont positifs, $\sin\frac{\varphi}{2}$ a le signe de b, $\sin\frac{\varphi''}{2}$ le signe contraire. Donc $\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2}$ a le signe de b. On doit donc avoir cette condition nouvelle

$$b > 0,$$

qui, jointe à la condition $bb'' < 0$, réduira celle-ci à $b'' < 0$.

Venons enfin aux cas exceptionnels où l'une au moins des quantités $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ est nulle, le sinus correspondant étant égal à $+1$.

Soit d'abord $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, $\sin\frac{\varphi}{2} = 1$, mais $\cos\frac{\varphi''}{2} > 0$. On aura $b = 0$, $a = -1$, d'où

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi''}{2} = \frac{b''R}{2\rho''\cos\frac{\varphi''}{2}},$$

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \cos\frac{\varphi''}{2}.$$

Le cosinus sera négatif si $b'' < 0$; il sera nul, et le sinus égal à $+1$, si $b'' = 0$. Dans ce dernier cas, a'' devra être égal à $+1$, puisque, par hypothèse, $\cos\frac{\varphi''}{2} > 0$.

Soit $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, mais $\cos\frac{\varphi''}{2} = 0$, $\sin\frac{\varphi''}{2} = 1$, d'où $b'' = 0$, $a'' = -1$. On aura

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{bR}{2\rho\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Le cosinus sera négatif, si $b < 0$. Si $b = 0$ il sera nul, mais le sinus sera négatif.

Enfin, si

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi''}{2} = 1,$$

$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2}$ sera positif et égal à $+1$.

Comme conclusion de cette analyse, on voit que le facteur ε sera égal à -1 dans les cas suivants :

1° $\quad bb'' < 0, \quad b'b'' < 0;$

2° $\quad b > 0, \quad b' = 0, \quad b'' < 0;$

3° $\quad b = 0, \quad a = -1, \quad b'' < 0;$

4° $\quad b = 0, \quad a = -1, \quad b'' = 0, \quad a'' = 1;$

5° $\quad b'' = 0, \quad a'' = -1, \quad b < 0.$

448. La loi de composition du symbole E étant ainsi fixée, il nous reste à déterminer sa valeur pour les substitutions élémentaires dont toutes les autres sont composées (309) :

1° Considérons d'abord la substitution

$$A_2^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle transforme τ en $\tau + \lambda$, q en $e^{\pi i \lambda} q$. Elle multiplie donc le produit infini

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})$$

par ρ^λ, ρ désignant l'exponentielle $e^{\frac{\pi i}{12}}$, de sorte que nous aurons

$$\varphi(\tau + \lambda) = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\sqrt{1}\,\varphi\tau = \rho^\lambda \varphi\tau,$$

d'où

(29) $$E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \rho^\lambda.$$

2° Passons à la substitution

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle transforme τ en $\frac{-1}{\tau}$; on aura donc

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\tau}\,\varphi\tau.$$

Pour la valeur particulière $\tau = i = -\frac{1}{\tau}$, cette équation se réduit à

$$1 = E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{i},$$

donc

(30) $$E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{i}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} = \rho^{-3}.$$

De ces deux résultats on déduit successivement, par la règle de composition,

$$(31)\quad E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-6},$$

$$(32)\quad E\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\rho^{-9} = \rho^{3},$$

$$(33)\quad E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda-6},$$

$$(34)\quad E\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda+3},$$

$$(35)\quad E\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda}.$$

Les formules (29) et (33) donnent la valeur du symbole E toutes les fois que $b = 0$, car on a nécessairement dans ce cas $a = d = \pm 1$.

Si b est négatif, la règle de composition donnera

$$E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \rho^{6} E\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

formule qui réduit la recherche du symbole au cas où le second coefficient b est positif.

449. Écrivons, pour plus de symétrie, a_1, c_1 à la place de b, d. Pour déterminer la valeur de

$$E\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix},$$

a_1 étant positif, cherchons le plus grand commun diviseur de a et de a_1 ; on aura

$$a = \lambda a_1 + a_2, \qquad a_1 = \lambda_1 a_2 + a_3, \qquad \ldots, \qquad a_{m-1} = \lambda_{m-1} a_m,$$

a_1, a_2, ... étant des entiers positifs décroissants, dont le dernier a_m est égal à l'unité (car a, a_1 sont premiers entre eux). Comme on peut, au besoin, remplacer la dernière équa-

tion par les deux suivantes

$$a_{m-1} = (\lambda_{m-1} - 1) a_m + a_{m+1}, \qquad a_m = a_{m+1},$$

il est permis de supposer m pair.

Soient $c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}$ des entiers déterminés par les relations

$$c = \lambda c_1 + c_2, \quad c_1 = \lambda_1 c_2 + c_3, \quad \ldots, \quad c_{m-1} = \lambda_{m-1} c_m + c_{m+1}.$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} 1 &= ac_1 - a_1 c = a_2 c_1 - a_1 c_2 \\ &= a_2 c_3 - a_3 c_2 = \ldots = a_m c_{m+1} - c_m a_{m+1}, \end{aligned}$$

a_{m+1} étant égal à zéro et ne figurant dans la formule que pour la symétrie.

D'ailleurs $a_m = 1$; on en déduit donc $c_{m+1} = 1$.

Cela posé, $a_1, a_2, \ldots$ étant positifs, la règle de composition nous donnera successivement

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda}\ \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda_1} \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ c_4 & c_3 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda_2}\ \mathrm{E}\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ c_4 & c_3 \end{pmatrix},$$

. . . .

Enfin, comme $a_m = 1$, $a_{m+1} = 0$, $c_{m+1} = 1$,

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a_m & a_{m+1} \\ c_m & c_{m+1} \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_m & 1 \end{pmatrix} = \rho^{c_m}.$$

Multipliant toutes ces équations, il viendra

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 - \ldots + c_m}.$$

450. On peut déterminer par un procédé analogue la valeur des symboles $\mathrm{E}_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supposons, en effet, qu'en posant

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad \tau'' = \frac{c' + d'\tau'}{a' + b'\tau'},$$

on ait

$$\varphi_{\alpha'}\tau' = \mathrm{E}_{\alpha'}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\varphi_\alpha \tau,$$

$$\varphi_{\alpha''}\tau'' = \mathrm{E}_{\alpha''}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\varphi_{\alpha'}\tau'.$$

En désignant comme précédemment par

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

la résultante des substitutions

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

on aura

$$\tau'' = \frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau}$$

et

$$\varphi_{\alpha''}\tau'' = \mathrm{E}_{\alpha''}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\mathrm{E}_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi_\alpha\tau,$$

formule qui contient la règle de composition des symboles considérés.

451. Cherchons l'effet des substitutions élémentaires. Considérons d'abord la substitution

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

laquelle change q en $e^{\pi i}q$. Opérée sur les produits

$$\varphi_1\tau = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}}\,\Pi(1 + q^{2n}),$$

$$\varphi_2\tau = \qquad q^{-\frac{1}{24}}\,\Pi(1 - q^{2n-1}),$$

$$\varphi_3\tau = e^{-\frac{\pi i}{8}}\, q^{-\frac{1}{24}}\,\Pi(1 + q^{2n-1}).$$

elle les changera respectivement en

$$\rho\varphi_1, \quad e^{\frac{\pi i}{8}} e^{-\frac{\pi i}{24}} \varphi_3 = \rho\varphi_3, \quad e^{-\frac{\pi i}{8}-\frac{\pi i}{24}} \varphi_2 = \rho^{-2}\varphi_2.$$

La substitution A_2^2 les change en $\rho^2\varphi_1$, $\rho^{-1}\varphi_2$, $\rho^{-1}\varphi_3$; A_2^{-1} les change en $\rho^{-1}\varphi_1$, $\rho^2\varphi_3$, $\rho^{-1}\varphi_2$.

Passons à la substitution

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme elle appartient à la classe VI (313), elle les changera en

$$\varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_2\tau,$$

$$\varphi_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_1\tau,$$

$$\varphi_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_3\tau.$$

Or, si l'on suppose τ purement imaginaire, $\frac{1}{\tau}$ le sera également et

$$\varphi_1\tau, \quad \varphi_2\tau, \quad e^{\frac{\pi i}{8}}\varphi_3\tau, \quad \varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \ldots$$

seront réels et positifs. Donc

$$E_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad E_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

le sont aussi; étant des racines $24^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ils se réduisent à $+1$. Donc B transforme φ_1, φ_2, φ_3 en φ_2, φ_1, φ_3; son carré

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les laisse inaltérées. Enfin B^{-1} les change en φ_2, φ_1, φ_3.

Partant de ces résultats, et appliquant la règle de composition donnée plus haut, nous pourrons calculer sans peine l'effet des substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 = BA_2^{-1}B^{-1}, \quad A_1^2, \quad A_1A_2, \quad A_2A_1, \quad A_1A_2A_1.$$

Tous ces résultats sont consignés dans le Tableau suivant :

	$1.$	$\varphi_1.$	$\varphi_2.$	$\varphi_3.$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$	A_2	$\rho\varphi_1$	$\rho\varphi_3$	$\rho^{-2}\varphi_2$
	A_2^2	$\rho^2\varphi_1$	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_3$
	A_2^{-1}	$\rho^{-1}\varphi_1$	$\rho^2\varphi_3$	$\rho^{-1}\varphi_2$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$	B..........	φ_2	φ_1	φ_3
	B^2........	φ_1	φ_2	φ_3
	B^{-1}.......	φ_2	φ_1	φ_3
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$	A_1.........	$\rho^2\varphi_3$	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_1$
	A_1^2	$\rho\varphi_1$	$\rho^{-2}\varphi_2$	$\rho\varphi_3$
	$A_1 A_2$.....	$\rho^3\varphi_3$	φ_1	$\rho^{-3}\varphi_2$
	$A_2 A_1$......	φ_2	φ_3	φ_1
	$A_1 A_2 A_1$...	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_1$	$\rho^2\varphi_3$

452. Soit maintenant T une substitution quelconque de la première classe. On peut (313), par une opération analogue à la recherche du plus grand commun diviseur, la mettre sous l'une des deux formes

$$A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} A_2^{2\mu_k}$$

ou

$$B^2 A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} A_2^{2\mu_k},$$

et il résulte du Tableau précédent qu'elle reproduira les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 respectivement multipliées par

$$\rho^{\Sigma\lambda+2\Sigma\mu}, \quad \rho^{-2\Sigma\lambda-\Sigma\mu}, \quad \rho^{\Sigma\lambda-\Sigma\mu}.$$

Enfin une substitution S, appartenant à une des cinq autres classes, peut (313) se mettre sous la forme TU, T étant de la première classe, et U l'une des substitutions A_1, A_2, $A_1 A_2$, $A_2 A_1$, $A_1 A_2 A_1$. Connaissant l'effet de ces dernières, on n'a qu'à appliquer la règle de composition.

453. Si l'on suppose les fonctions elliptiques déterminées non par leurs périodes, mais par leurs invariants, les quan-

tités φ_α seront données (397) par les équations binômes

$$\varphi_\alpha^{24} = \frac{16(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

On lèvera l'ambiguïté que présente cette formule en précisant comme il suit les arguments des quantités φ_α.

Supposons d'abord qu'on ait choisi pour périodes fondamentales les périodes principales et considérons le cas particulier où e_1, e_2, e_3 sont réels, et tels que l'on ait

$$e_2 < e_3 < e_1.$$

Dans ce cas, q sera réel et positif et les expressions de φ_1, φ_2, $e^{\frac{\pi i}{8}}\varphi_3$ en produits infinis montrent qu'ils seront réels et positifs.

Si le triangle $e_1 e_2 e_3$, à ce moment infiniment aplati, se déforme de manière à prendre une autre position quelconque, l'inspection de la figure montre immédiatement comment varieront les arguments de $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$ et, par suite, les arguments des radicaux qui représentent φ_1, φ_2, φ_3.

Enfin, si l'on remplace les périodes principales par d'autres périodes équivalentes, les nouvelles valeurs de φ_1, φ_2, φ_3 se déduiront des anciennes par les formules de transformation données ci-dessus.

454. Posons

$$x_\alpha = \tfrac{1}{16}\varphi_\alpha^{24}.$$

Les substitutions A_1, A_2 transforment respectivement les trois fonctions x_1, x_2, x_3 en x_3, x_2, x_1 et en x_1, x_3, x_2, et les substitutions A_1^2, A_2^2, B^2 ne les altèrent pas. Elles sont donc simplement permutées entre elles par toute substitution linéaire de déterminant 1, et les substitutions de la première classe les laissent inaltérées.

En éliminant e_α, e_β, e_γ entre les équations

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0,$$

$$J = \frac{-4(e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\gamma + e_\gamma e_\alpha)^3}{(e_\alpha - e_\beta)^2 (e_\beta - e_\gamma)^2 (e_\gamma - e_\alpha)^2},$$

$$x_\alpha = \frac{(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)},$$

on obtiendrait une équation

$$F(J, x) = 0,$$

ayant pour racines x_1, x_2, x_3.

Cette équation peut se former plus rapidement comme il suit :

A chaque valeur de x_α correspondent deux systèmes de valeurs des rapports $e_1 : e_2 : e_3$ et, par suite, deux valeurs de J; réciproquement, à chaque valeur de J correspondent six systèmes de valeurs des rapports $e_1 : e_2 : e_3$, mais ils se déduisent l'un de l'autre en permutant ces trois lettres; x_α, restant inaltéré par l'échange de e_β et de e_γ, n'aura que trois valeurs.

L'équation cherchée sera donc de la forme

$$AJ^2 + BJ + C = 0,$$

où A, B, C sont des polynômes du troisième degré par rapport à l'inconnue x_α (que nous désignerons plus simplement par x pour abréger l'écriture).

Dans le cas particulier où $e_1 = e_2$, nous aurons

$$J = \infty, \qquad x_1 = x_2 = \infty, \qquad x_3 = 0,$$

donc

$$A = x.$$

Pour

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

on aurait

$$J = 0, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = -1,$$

d'où

$$C = a(x+1)^3,$$

a désignant une constante.

Enfin, pour $e_1 = 0$, $e_3 = -e_2$, on aurait

$$J = 1, \qquad x_1 = -4, \qquad x_2 = x_3 = \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$A + B + C = b(x+4)(x - \tfrac{1}{2})^2,$$

b désignant une constante.

L'équation cherchée sera donc de la forme

$$F(J, x) = x(J^2 - J) + b(x+4)(x-\tfrac{1}{2})^2 J \\ - a(x+1)^3(J-1) = 0.$$

Pour déterminer les constantes restantes a, b, on pourra poser

$$e_1 = -1 - h, \qquad e_2 = -1 + h, \qquad e_3 = 2,$$

d'où

$$J = \frac{12 + 4h^2}{4h^2(9-h^2)^2} = \frac{1}{27h^2} + \frac{5}{9 \cdot 27} + \ldots$$

$$x_1 = \frac{(3-h)^2}{2h(3+h)} = \frac{3}{2h} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}h + \ldots.$$

En substituant ces développements dans l'équation

$$F(J, x_1) = 0,$$

et égalant à zéro les coefficients des termes en $\frac{1}{h^5}$ et $\frac{1}{h^3}$, on obtiendra deux équations linéaires en a et b.

455. On obtient de nouvelles fonctions modulaires par la combinaison des fonctions φ_1, φ_2, φ_3.

Posons, par exemple,

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}.$$

Les six fonctions ainsi obtenues éprouveront, par les sub-

stitutions A_1, A_2, $A_1 A_2$, ..., les altérations consignées au Tableau suivant, où r désigne l'exponentielle $e^{\frac{\pi i}{4}}$.

1.	φ_{12}.	φ_{23}.	φ_{31}.	φ_{21}.	φ_{32}.	φ_{13}.
A_1	$r\varphi_{32}$	φ_{21}	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r^{-1}\varphi_{23}$	φ_{12}	$r\varphi_{31}$
A_2	φ_{13}	$r\varphi_{32}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	φ_{31}	$r^{-1}\varphi_{23}$	$r\varphi_{12}$
$A_1 A_2$	$r\varphi_{31}$	$r\varphi_{12}$	$r^{-2}\varphi_{23}$	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	$r^2\varphi_{32}$
$A_2 A_1$	φ_{23}	φ_{31}	φ_{12}	φ_{32}	φ_{13}	φ_{21}
$A_1 A_2 A_1$ ...	φ_{21}	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r\varphi_{32}$	φ_{12}	$r\varphi_{31}$	$r^{-1}\varphi_{23}$
A_1^2	$r\varphi_{12}$	$r^{-1}\varphi_{23}$	φ_{31}	$r^{-1}\varphi_{21}$	$r\varphi_{32}$	φ_{13}
A_2^2	$r\varphi_{12}$	φ_{23}	$r^{-1}\varphi_{31}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	φ_{32}	$r\varphi_{13}$
B^2	φ_{12}	φ_{23}	φ_{31}	φ_{21}	φ_{32}	φ_{13}

456. Ces fonctions peuvent s'exprimer au moyen des invariants par la formule (n° 397)

$$\varphi_{\beta\alpha}^8 = -\frac{\varphi_\beta^8}{\varphi_\alpha^8} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma} = k_{\alpha\beta}^2,$$

dont on lèvera l'ambiguïté comme au n° 453.

Pour former l'équation algébrique qui lie les modules $k_{\alpha\beta}^2$ à J, nous remarquerons que l'un d'eux, k^2 étant donné, les rapports $e_1 : e_2 : e_3$ et, par suite, J seront déterminés sans ambiguïté. D'autre part, à chaque valeur de J correspondent six modules k^2. L'équation sera donc de la forme

$$AJ + B = 0,$$

A et B étant du sixième degré en k^2.

Or, si l'on suppose $e_2 = e_3$, on aura

$$J = \infty, \quad k_{12}^2 = k_{13}^2 = \infty, \quad k_{21}^2 = k_{31}^2 = 0, \quad k_{23}^2 = k_{32}^2 = 1;$$

donc

$$A = k^4(k^2 - 1)^2.$$

Posons, d'autre part,

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}};$$

nous aurons

$$J = 0, \quad k_{12}^2 = k_{23}^2 = k_{31}^2 = -e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad k_{21}^2 = k_{32}^2 = k_{13}^2 = -e^{\frac{4\pi i}{3}};$$

d'où

$$B = b\left(k^2 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 \left(k^2 + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3 = b(k^4 - k^2 + 1)^3,$$

b désignant une constante.

Pour la déterminer, posons $e_1 = 0$, $e_2 = -e_3$; on aura

$$J = 1, \qquad k_{23}^2 = -1,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation,

$$4 + b.3^3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = -\tfrac{4}{27}.$$

457. Nous pouvons encore signaler les fonctions modulaires

$$\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16},$$

$$(\varphi_2^8 - \varphi_3^8)(\varphi_3^8 - \varphi_1^8)(\varphi_1^8 - \varphi_2^8),$$

dont la première a pour cube $3^3.2^9 J$, et la seconde a pour carré $3^3.2^8(J-1)$ (397).

VIII. — Division.

458. On a vu (360) que, si n est entier, pnu s'exprime rationnellement au moyen de pu par la formule

$$(1) \qquad pnu - pu = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

Réciproquement, supposons pnu donné, et proposons-nous de déterminer pu.

A la valeur donnée a de pnu correspondent une infinité de valeurs de u; en désignant par u_0 l'une d'elles choisie à volonté, elles seront données par la formule

$$\pm u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} \qquad (m_1, m_2 \text{ entiers}),$$

et les valeurs correspondantes de l'inconnue $x = pu$ seront les suivantes

$$p\left(u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right),$$

car on reproduirait la même suite de valeurs en prenant u_0 avec le signe — et changeant en même temps les signes de m_1, m_2.

Comme l'expression ci-dessus ne change pas si l'on fait varier m_1, m_2 de multiples de n, on n'obtiendra que n^2 racines distinctes. Tel est effectivement le degré de l'équation (1) par rapport à pu.

Soient, plus généralement,

$$\frac{2\omega'_1}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}, \qquad \frac{2\omega'_2}{n} = \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{n}$$

deux $n^{\text{ièmes}}$ de périodes, tels que

$$\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$$

ne puisse être une période que si m_1 et m_2 sont multiples de n (il faut et il suffit pour cela que $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ soit premier à n). Les quantités

$$x_{m_1 m_2} = p\left(u_0 + \frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}\right),$$

où m_1, m_2 varient de 0 à $n-1$, seront toutes distinctes, et représenteront la suite complète des racines de l'équation (1).

En combinant les formules d'addition et de multiplication, on voit immédiatement que chacune des racines $x_{m_1 m_2}$ s'exprime rationnellement en pu_0, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'u_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$. D'ailleurs, en dérivant l'équation (1), on trouve un résultat de la forme

$$n p' nu = R(pu)\, p'u,$$

R étant une fonction rationnelle. Donc $p'u_0$ est rationnel en pu_0 et $p'nu_0$, et $x_{m_1 m_2}$ s'exprimera rationnellement au moyen de $x_{00} = pu_0$, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$.

459. Posons, pour abréger,

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

La quantité

$$\Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} \alpha^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2} x_{m_1 m_2}$$

$$(m_1 = 0, 1, \ldots, n-1; \quad m_2 = 0, 1, \ldots, n-1)$$

pourra, d'après ce qui précède, s'exprimer rationnellement en x_{00}, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$, α. Représentons-la par $P_{\mu_1 \mu_2}(x_{00})$.

Changeons, dans l'égalité

$$(2) \qquad P_{\mu_1 \mu_2}(x_{00}) = \Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} \alpha^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2} x_{m_1 m_2},$$

u_0 en $u_0 + \frac{2\lambda_1 \omega'_1 + 2\lambda_2 \omega'_2}{n}$, et changeons en même temps les indices de sommation m_1, m_2 en $m_1 - \lambda_1$, $m_2 - \lambda_2$; il viendra

$$(3) \qquad \begin{cases} P_{\mu_1 \mu_2}(x_{\lambda_1 \lambda_2}) = \Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} \alpha^{\mu_1(m_1 - \lambda_1) + \mu_2(m_2 - \lambda_2)} x_{m_1 m_2} \\ \qquad = \alpha^{-\mu_1 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_2} P_{\mu_1 \mu_2}(x_{00}). \end{cases}$$

On en déduit

$$P^n_{\mu_1 \mu_2}(x_{\lambda_1 \lambda_2}) = P^n_{\mu_1 \mu_2}(x_{00}) = \frac{1}{n^2} \Sigma_{\lambda_1} \Sigma_{\lambda_2} P^n_{\mu_1 \mu_2}(x_{\lambda_1 \lambda_2}).$$

Cette dernière expression, étant symétrique par rapport aux racines de l'équation en x, s'exprime rationnellement par les coefficients de cette équation et les constantes α, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$ que renferment ses coefficients. Désignons-la par $A_{\mu_1 \mu_2}$.

On aura, en particulier,

$$P_{10}^n(x_{00}) = A_{10}, \qquad P_{01}^n(x_{00}) = A_{01};$$

d'où

$$P_{10}(x_{00}) = A_{10}^{\frac{1}{n}}, \qquad P_{01}(x_{00}) = A_{01}^{\frac{1}{n}}.$$

L'équation (3) donne, d'autre part,

$$\begin{aligned} & P_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2})\, P_{10}^{-\mu_1}(x_{\lambda_1\lambda_2})\, P_{01}^{-\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}) \\ & \quad = P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})\, P_{10}^{-\mu_1}(x_{00})\, P_{01}^{-\mu_2}(x_{00}) \\ & \quad = \frac{1}{n^2}\Sigma_{\lambda_1}\Sigma_{\lambda_2} P_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2})\, P_{10}^{-\mu_1}(x_{\lambda_1\lambda_2})\, P_{01}^{-\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}) = B_{\mu_1\mu_2}, \end{aligned}$$

$B_{\mu_1\mu_2}$ étant encore une fonction rationnelle des coefficients de l'équation en x et des constantes α, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p' nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$. On en déduit

$$P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) = A_{10}^{\frac{\mu_1}{n}}\, A_{01}^{\frac{\mu_2}{n}}\, B_{\mu_1\mu_2}.$$

Les quantités $P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})$ étant ainsi déterminées, on en déduira immédiatement les racines $x_{\lambda_1\lambda_2}$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\alpha^{-\mu_1\lambda_1-\mu_2\lambda_2} P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) \\ & \quad = \Sigma_{m_1}\Sigma_{m_2} x_{m_1 m_2}\big(\Sigma_{\mu_1}\alpha^{\mu_1(m_1-\lambda_1)}\big)\big(\Sigma_{\mu_2}\alpha^{\mu_2(m_2-\lambda_2)}\big). \end{aligned}$$

Or, si $m_1 \gtrless \lambda_1$, on aura

$$\Sigma_{\mu_1}\alpha^{\mu_1(m_1-\lambda_1)} = \frac{\alpha^{n(m_1-\lambda_1)}-1}{\alpha^{m_1-\lambda_1}-1} = 0,$$

et, si $m_1 = \lambda_1$, cette somme est égale à n. De même, pour le second facteur $\Sigma_{\mu_2}\alpha^{\mu_2(m_2-\lambda_2)}$, suivant qu'on a $m_2 \gtrless \lambda_2$ ou $m_2 = \lambda_2$. Le second membre se réduit donc à $n^2 x_{\lambda_1\lambda_2}$, et l'on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{\lambda_1\lambda_2} & = \frac{1}{n^2}\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\alpha^{-\mu_1\lambda_1-\mu_2\lambda_2} P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) \\ & = \frac{1}{n^2}\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\Big(\alpha^{-\lambda_1}A_{10}^{\frac{1}{n}}\Big)^{\mu_1}\Big(\alpha^{-\lambda_2}A_{01}^{\frac{1}{n}}\Big)^{\mu_2} B_{\mu_1\mu_2}. \end{aligned} \right.$$

Il faudra donc, pour résoudre l'équation proposée : 1° calculer les quantités auxiliaires α, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$; 2° déterminer, par des opérations rationnelles, les quantités A_{10}, A_{01}, $B_{\mu_1\mu_2}$; 3° extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de A_{10} et de A_{01}. Les racines $x_{\lambda_1\lambda_2}$ seront données par la formule (4); et l'on passera de l'une à l'autre en changeant la détermination des radicaux $A_{10}^{\frac{1}{n}}$, $A_{01}^{\frac{1}{n}}$.

460. Dans la solution précédente, u_0 désigne l'une quelconque des solutions de l'équation

$$pnu = a,$$

et $\frac{2\omega'_1}{n}$, $\frac{2\omega'_2}{n}$ sont deux $n^{\text{ièmes}}$ de périodes

$$\frac{2\omega'_1}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}, \qquad \frac{2\omega'_2}{n} = \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{n},$$

assujettis à cette seule condition que $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ soit premier à n; $pnu_0 = a$ est donc une des données de la question, et $p'nu_0$ sera fourni par la formule

$$p'nu_0 = \sqrt{4a^3 - g_2 a - g_3}.$$

Lorsqu'on aura déterminé $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, on aura de même

$$p'\frac{2\omega'_1}{n} = \sqrt{4p^3\frac{2\omega'_1}{n} - g_2 p\frac{2\omega'_1}{n} - g_3},$$

$$p'\frac{2\omega'_2}{n} = \sqrt{4p^3\frac{2\omega'_2}{n} - g_2 p\frac{2\omega'_2}{n} - g_3}.$$

Les signes de ces trois radicaux peuvent être choisis à volonté, car on ne cesse pas de satisfaire aux conditions imposées à u_0, $\frac{2\omega'_1}{n}$, $\frac{2\omega'_2}{n}$ en changeant leur signe, ce qui n'al-

tère pas les quantités pu_0, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, mais change le signe des dérivées $p'u_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$.

461. Tout revient donc à calculer les deux constantes $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$. Ces quantités sont (358) des racines de l'équation

$$(5)\qquad o = \psi_n^2(y) = n^2 \prod \left(y - p\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right),$$

de degré $n^2 - 1$, et dont les coefficients sont des polynômes entiers en g_2, g_3. Mais ce couple de racines n'est pas arbitraire, car il faut que

$$\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$$

ne puisse se réduire à une période que si m_1, m_2 sont multiples de m, ou, ce qui revient au même, que deux expressions

$$p\frac{2m'_1\omega'_1 + 2m'_2\omega'_2}{n}, \qquad p\frac{2m''_1\omega'_1 + 2m''_2\omega'_2}{n},$$

où m'_1, m'_2, m''_1, m''_2 varient de o à $n - 1$, ne puissent être égales que si l'on a

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, n).$$

Il sera facile de déterminer s'il en est ainsi pour un couple de racines $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$ supposé connu. En effet, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$ seront donnés en fonction de $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$ par des radicaux carrés, dont nous pouvons prendre le signe à volonté. Les formules d'addition et de multiplication nous permettront dès lors de déterminer, en fonction rationnelle de $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$, chacune des quantités $p\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$ $\left(\text{et aussi les dérivées } p'\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}\right)$,

et par suite de reconnaître si deux de ces quantités sont ou non égales.

462. Soient

$$y_{m_1 m_2} = \wp \frac{2 m_1 \omega_1 + 2 m_2 \omega_2}{n}$$

une des racines de l'équation (5); d le plus grand commun diviseur de m_1, m_2, n; posons

$$m_1 = d\mu_1, \qquad m_2 = d\mu_2, \qquad n = d\nu,$$

$$\frac{2 m_1 \omega_1 + 2 m_2 \omega_2}{n} = \frac{2 \mu_1 \omega_1 + 2 \mu_2 \omega_2}{\nu}$$

sera un $\nu^{\text{ième}}$ de période, et nous dirons que la racine $y_{m_1 m_2}$ appartient au diviseur ν.

Désignons par χ_ν^2 le produit des facteurs linéaires $y - y_{m_1 m_2}$ correspondant aux racines qui appartiennent au diviseur ν; on aura évidemment

$$\psi_n^2 = n^2 \prod \chi_\nu^2,$$

le produit s'étendant à tous les diviseurs ν de n, y compris ce nombre lui-même, mais l'unité exceptée.

Les polynômes χ_ν^2 ont leurs coefficients rationnels et entiers en g_2, g_3. En effet, décomposons ν en facteurs premiers; soit $\nu = a^\alpha b^\beta \ldots$. L'équation

$$\psi_\nu^2 = 0$$

aura évidemment pour racines celles des racines $y_{m_1 m_2}$ qui appartiennent à ν ou à l'un de ses diviseurs. Ces dernières appartiendront à l'un des nombres $\frac{\nu}{a}$, $\frac{\nu}{b}$, $\cdots$ ou à l'un de ses diviseurs. Elles satisferont donc à l'une au moins des équations

$$\psi_{\frac{\nu}{a}}^2 = 0, \qquad \psi_{\frac{\nu}{b}}^2 = 0, \qquad \ldots .$$

Si donc on détermine : 1° le plus grand commun diviseur

de ψ_ν^2 avec chacun des polynômes $\psi_{\frac{\nu}{a}}^2$, $\psi_{\frac{\nu}{b}}^2$, ...; 2° le plus petit multiple M de ces plus grands communs diviseurs; enfin, si l'on divise ψ_ν^2 par M, on obtiendra un polynôme n'ayant plus pour racines que celles qui appartiennent à ν; il sera donc égal à χ_ν^2 à un facteur numérique près. D'ailleurs, ψ_ν^2, $\psi_{\frac{\nu}{a}}^2$, ... ayant pour coefficients des polynômes entiers en g_2, g_3, dont le premier est purement numérique, $\frac{\psi_\nu^2}{M}$ jouira évidemment de la même propriété.

463. Cherchons le degré du polynôme χ_ν^2. Il a pour racines les quantités

$$p\,\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{\nu},$$

μ_1, μ_2 étant $\gtreqless 0$ mais $< \nu$, et μ_1, μ_2, ν n'ayant pas de facteur commun.

Les entiers $\frac{\nu}{a^\alpha}$, $\frac{\nu}{b^\beta}$, ... étant premiers entre eux, on pourra déterminer des entiers A, B, ... tels que l'on ait

$$\frac{\nu}{a^\alpha}A + \frac{\nu}{b^\beta}B + \ldots = \mu_1,$$

d'où

$$\frac{\mu_1}{\nu} = \frac{A}{a^\alpha} + \frac{B}{b^\beta} + \ldots = \frac{A_1}{a^\alpha} + \frac{B_1}{b^\beta} + \ldots + k_1,$$

A_1 désignant un entier $< a^\alpha$ et non négatif; B_1 un entier $< b^\beta$ et non négatif, etc., k_1 un entier. On pourra mettre $\frac{\mu_2}{\nu}$ sous une forme analogue

$$\frac{\mu_2}{\nu} = \frac{A_2}{a^\alpha} + \frac{B_2}{b^\beta} + \ldots + k_2.$$

Pour que μ_1, μ_2, ν n'aient pas de facteur commun, il faut et il suffit que μ_1 et μ_2 ne soient simultanément divisibles ni par a, ni par b, ... ou, ce qui revient au même, que A_1, A_2

ne soient pas tous deux divisibles par a, ni B_1, B_2 tous deux divisibles par b, etc.

Or A_1, A_2 sont chacun susceptibles des a^α valeurs $0, 1, \ldots, a^\alpha - 1$, ce qui donne $a^{2\alpha}$ combinaisons. Celles où A_1, A_2 sont tous deux divisibles par a sont au nombre de $a^{2\alpha-2}$. En les excluant, il restera

$$a^{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

combinaisons admissibles.

Le nombre des combinaisons admissibles pour B_1, B_2 sera de même

$$b^{2\beta}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right),$$

etc. Le nombre des valeurs admissibles pour μ_1, μ_2 (ou le degré du polynôme χ_ν^2) sera donc

$$a^{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) b^{2\beta}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\cdots = \nu^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\cdots.$$

Si n est pair, dans la suite des facteurs χ_ν^2 figurera le facteur

$$\chi_2^2 = (y - e_1)(y - e_2)(y - e_3) = y^3 - \tfrac{1}{4} g_2 y - \tfrac{1}{4} g_3$$

correspondant aux demi-périodes. Les autres polynômes χ_ν^2, où $\nu > 2$, sont des carrés parfaits ; car à chaque racine $y_{m'_1 m'_2}$ appartenant au diviseur ν, on peut associer une autre racine $y_{m''_1 m''_2}$ par la relation

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} n),$$

et ces deux racines, évidemment égales, appartiennent au même diviseur.

464. La résolution de l'équation $\chi_n^2 = 0$ entraîne celle de l'équation $\psi_n^2 = 0$.

Soit, en effet, $p\,\dfrac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\dfrac{2\omega'_2}{n}$ un couple de racines de l'équation $\chi_n^2 = 0$; nous pourrons, après avoir choisi à volonté les

signes des radicaux $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$, calculer par des opérations rationnelles les quantités

$$p\,\frac{2m_1\omega'_1+2m_2\omega'_2}{n},\qquad p'\,\frac{2m_1\omega'_1+2m_2\omega'_2}{n},$$

où m_1, m_2 varient de o à $n-1$. Si les quantités

$$p\,\frac{2m_1\omega'_1+2m_2\omega'_2}{n}$$

sont toujours distinctes lorsque la somme de leurs arguments n'est pas une période, elles reproduiront toute la suite des racines $y_{m_1 m_2}$ de $\psi_n^2=0$.

Si la condition précédente n'était pas satisfaite, on essayerait un autre couple de racines; on est d'ailleurs certain qu'il en existe qui conduisent au résultat désiré.

465. Si l'on décompose n d'une façon quelconque en facteurs q, r, ... premiers entre eux, on pourra remplacer la résolution de l'équation $\chi_n^2=0$ par celle des équations

$$\chi_q^2=0,\qquad \chi_r^2=0,\qquad \ldots.$$

Car cette résolution, entraînant celle des équations

$$\psi_q^2=0,\qquad \psi_r^2=0,\qquad \ldots,$$

fait connaître les valeurs de pu et de $p'u$ pour tous les arguments qui sont des $q^{\text{ièmes}}$ de périodes, des $r^{\text{ièmes}}$ de périodes, etc.

Cela posé, soit

$$\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}$$

un $n^{\text{ième}}$ de période; nous pourrons déterminer des entiers μ_1, μ_2; ν_1, ν_2; ..., k_1, k_2 tels que l'on ait

$$\frac{m_1}{n}=\frac{\mu_1}{q}+\frac{\nu_1}{r}+\ldots+k_1,$$

$$\frac{m_2}{n}=\frac{\mu_2}{q}+\frac{\nu_2}{r}+\ldots+k_2,$$

d'où

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{q} + \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{r} + \ldots,$$

et comme on connaît les valeurs de pu, $p'u$ pour les arguments

$$\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{q}, \quad \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{r}, \quad \ldots$$

qui sont des $q^{\text{ièmes}}$, des $r^{\text{ièmes}}$, etc., de périodes, on en déduira par la formule d'addition les valeurs de

$$p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}, \quad p'\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}.$$

Si donc $n = a^\alpha b^\beta \ldots$, a, b, ... étant premiers, la résolution de $\psi_n^2 = 0$ se ramènera à celle des équations

$$\chi_{a^\alpha}^2 = 0, \qquad \chi_{b^\beta}^2 = 0, \qquad \ldots.$$

466. Considérons donc une de celles-ci, telle que

$$\chi_{a^\alpha}^2 = 0,$$

et supposons $\alpha > 1$. Ses racines sont les quantités

$$p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{a^\alpha},$$

où m_1, m_2 ne sont pas tous deux divisibles par a. Soient respectivement μ_1, μ_2 les restes de leur division par $a^{\alpha-1}$; ils ne seront pas nuls à la fois, et nous pourrons écrire

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{a^\alpha} = \frac{1}{a}\left(\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}} + \text{période}\right).$$

Considérons celles des racines $p\,\dfrac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{a^\alpha}$ pour lesquelles μ_1, μ_2 ont la même valeur. On pourra, en posant dans les formules (4),

$$n = a, \qquad u_0 = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},$$

les exprimer en fonction de

$$p\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},\qquad p'\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},$$

$$p\frac{2\omega_1}{a},\qquad p'\frac{2\omega_1}{a},\qquad p\frac{2\omega_2}{a},\qquad p'\frac{2\omega_2}{a}.$$

Mais toutes ces quantités auxiliaires seront connues (au signe près des dérivées, qui est arbitraire), si l'on suppose résolues les équations

$$\psi_a^2=0,\qquad \chi^2_{a^{\alpha-1}}=0.$$

La résolution de cette dernière se ramènera de même à celle de

$$\psi_a^2=0\qquad \text{et}\qquad \chi^2_{a^{\alpha-2}}=0.$$

La résolution de l'équation

$$\psi_n^2=0,\qquad \text{où}\qquad n=a^\alpha b^\beta\ldots,$$

se ramène donc finalement :

1° A celle des équations

$$\psi_a^2=0,\qquad \psi_b^2=0,\qquad \ldots;$$

2° A des extractions de racines.

467. On peut obtenir une réduction ultérieure du problème de la manière suivante :

Soit

$$\frac{w}{n}=\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{n}$$

un $n^{\text{ième}}$ de période *propre*, c'est-à-dire tel que μ_1, μ_2, n n'aient pas de facteur commun; toutes les quantités de la forme

$$m\frac{w}{n}+\text{période},$$

où m est premier à n, seront également des $n^{\text{ièmes}}$ de période propres. Nous les réunirons dans un même groupe.

Un autre $n^{\text{ième}}$ de période propre, w', donnera de même naissance à un nouveau groupe

$$m\frac{w'}{n}+\text{période}.$$

Ces deux groupes n'auront aucun $n^{\text{ième}}$ de période propre commun, s'ils ne sont pas identiques. Supposons, en effet, qu'on ait

$$m\frac{w}{n}\equiv m'\frac{w'}{n}.$$

Soit μ un entier quelconque; on pourra déterminer un nombre λ satisfaisant à la congruence

$$\lambda m\equiv\mu \bmod n.$$

On aura dès lors

$$\mu\frac{w}{n}\equiv\lambda m\frac{w}{n}\equiv\lambda m'\frac{w'}{n};$$

donc tout $n^{\text{ième}}$ de période du premier groupe est contenu dans le second. La réciproque se démontre de même.

On peut donc répartir les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres en groupes, chacun d'eux étant caractérisé par l'un quelconque des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes qu'il contient.

Le nombre total des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes non équivalents entre eux est, comme nous l'avons vu,

$$n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\cdots.$$

Ceux qui sont contenus dans un groupe

$$\frac{w}{n},\quad\ldots,\quad m\frac{w}{n},\quad\ldots+\text{période}$$

s'obtiendront évidemment en donnant à m la suite des valeurs premières à n et $<n$. Leur nombre M sera égal à

$$n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots.$$

Le nombre N des groupes sera donc

$$n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots.$$

En particulier, si n est premier, on aura $n+1$ groupes; et l'on pourra choisir pour les caractériser les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes ci-dessous

$$\frac{w}{n}=\frac{2\omega_1}{n},\qquad \frac{w_k}{n}=\frac{2k\omega_1+2\omega_2}{n}\qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

ou, plus généralement,

$$\frac{w}{n}=\frac{2\omega_1}{n},\qquad \frac{w_k}{n}=\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n}\qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

λ étant un entier fixe premier à n et arbitrairement choisi. Ces $n^{\text{ièmes}}$ de périodes appartiennent, en effet, à des groupes différents; car on ne peut avoir

$$\frac{2m\omega_1}{n}\equiv\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n},$$

et la relation

$$m\,\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n}\equiv\frac{2\lambda k'\omega_1+2\omega_2}{n}$$

donnerait

$$m\equiv 1,\qquad 2\lambda k\equiv 2\lambda k' \bmod n,$$

d'où

$$k=k'.$$

468. Soient $\frac{w}{n}, \frac{w'}{n}, \ldots$ des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes choisis à volonté dans chaque groupe pour le caractériser. Tout $n^{\text{ième}}$ de période propre sera équivalent à l'un de ceux-ci

$$m\,\frac{w}{n},\qquad m\,\frac{w'}{n},\qquad \ldots,$$

où m prendra la suite des valeurs premières à n et moindres que n.

Les quantités

$$\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}$$

(où μ_1, μ_2 sont $\gtreqless 0$, mais $< n$, et μ_1, μ_2, n n'ont pas de facteur commun) forment également un système complet de $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres non équivalentes entre elles. Elles seront donc équivalentes, à l'ordre près, aux quantités précédentes. Les racines $p\,\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}$ de l'équation $\chi_n^2 = 0$ seront donc les quantités

$$pm\frac{w}{n}, \qquad pm\frac{w'}{n}, \qquad \dots.$$

Nous les répartirons en groupes en réunissant ensemble celles dont les arguments sont multiples d'une même quantité $\frac{w}{n}$.

469. Soit F une fonction rationnelle de

$$p\frac{w}{n}, \qquad p\frac{2w}{n}, \qquad \dots, \qquad p\frac{(n-1)w}{n}.$$

Toutes ces quantités peuvent s'exprimer rationnellement en $p\frac{w}{n}$, g_2, g_3; on pourra donc écrire

$$F = \varphi\left(p\frac{w}{n}\right),$$

φ désignant une fonction rationnelle en $p\frac{w}{n}$, g_2, g_3.

Si l'on change $\frac{w}{n}$ en $m\frac{w}{n}$, m étant premier à n, le système des quantités $p\frac{w}{n}, \dots, p\frac{(n-1)w}{n}$ se reproduira. Celles de ces racines qui appartiennent à un même diviseur ν seront seulement permutées entre elles. Si donc nous admettons qu'elles figurent symétriquement dans F, cette fonction ne

sera pas changée; on aura donc

$$F = \varphi\left(p\frac{w}{n}\right) = \ldots = \varphi\left(p\frac{mw}{n}\right) = \ldots = \frac{1}{M}\sum_m \varphi\left(p\frac{mw}{n}\right).$$

Soient F', ... les fonctions analogues à F, formées avec les racines des autres groupes; on aura de même

$$F' = \frac{1}{M}\sum_m \varphi\left(p\frac{mw'}{n}\right), \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$F + F' + \ldots = \frac{1}{M}\sum \varphi(y),$$

la sommation s'étendant à toutes les racines y de l'équation $\chi_n^2 = 0$.

Le second membre, étant une fonction symétrique de ces racines, pourra s'exprimer rationnellement au moyen de g_2, g_3 et des coefficients de l'équation, qui sont eux-mêmes rationnels en g_2 et g_3.

D'ailleurs F^2, F^3, ... sont comme F des fonctions symétriques; on pourra donc exprimer aussi rationnellement les quantités

$$F^2 + F'^2 + \ldots, \qquad F^3 + F'^3 + \ldots, \qquad \ldots$$

et, par suite, tous les coefficients de l'équation de degré N,

$$(6) \qquad (z - F)(z - F')\ldots = 0,$$

dont F, F', ... sont les racines.

470. Supposons que la fonction F ait été choisie de telle sorte que les quantités F, F', ... aient des valeurs numériques distinctes. Toute fonction symétrique Φ des racines d'un même groupe pourra s'exprimer rationnellement au moyen de F, F', ... et des coefficients de χ_n^2.

En effet, les fonctions Φ, ΦF, ΦF^2, ... sont encore symétriques par rapport aux racines qui appartiennent à un

même diviseur; on aura donc

$$\begin{aligned}\Phi+\Phi' \quad +\ldots &= \mathrm{R},\\ \Phi\mathrm{F}+\Phi'\mathrm{F}'+\ldots &= \mathrm{R}_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\end{aligned}$$

R, R_1, ... étant rationnels. Ces équations linéaires, dont le déterminant n'est pas nul (car il est égal au produit des différences $\mathrm{F}-\mathrm{F}'$), détermineront Φ, Φ', ...

Donc, lorsqu'on aura résolu l'équation en z, on pourra, par des opérations rationnelles, calculer les coefficients de chacune des équations

$$\begin{gathered}\left(y-\wp\frac{w}{n}\right)\cdots\left(y-\wp\frac{mw}{n}\right)\cdots=0,\\ \left(y-\wp\frac{w'}{n}\right)\cdots\left(y-\wp\frac{mw'}{n}\right)\cdots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

dont dépendent les racines de chaque groupe.

471. Ces dernières équations peuvent se résoudre par des extractions de racines. Pour plus de simplicité, nous supposerons n premier; cas auquel les autres peuvent se réduire, ainsi que nous l'avons vu.

Soit, en effet, g une *racine primitive* de n, c'est-à-dire un entier tel que les nombres $1, g, g^2, \ldots, g^{n-2}$, divisés par n, donnent des restes tous différents, reproduisant, à l'ordre près, tous les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n-1$ (g^{n-1} donnant d'ailleurs l'unité pour reste, d'après un théorème de Fermat). A chaque entier m', positif et $< n$, correspond un exposant r non négatif et $< n-1$, tel que l'on ait

$$m' \equiv g^r \equiv g^{r+k(n-1)} \bmod n.$$

Les racines $\wp\frac{w}{n}$, ..., $\wp\frac{mw}{n}$ pourront donc, en les rangeant dans un ordre convenable, se mettre sous la forme

$$\wp\frac{w}{n},\quad \wp\left(g\frac{w}{n}\right),\quad \ldots,\quad \wp\left(g^r\frac{w}{n}\right),\quad \ldots,\quad r=0,1,\ldots,n-2.$$

En donnant à r les valeurs suivantes $n-1$, n, ..., les mêmes racines se reproduiraient périodiquement.

Posons

$$\beta = e^{\frac{2\pi i}{n-1}},$$

et considérons l'expression

$$\Sigma_r \beta^{\mu r} p\left(g^r \frac{\varpi}{n}\right), \qquad r \equiv 0, 1, \ldots, n-2 \bmod (n-1).$$

Ce sera une fonction rationnelle de $p\frac{\varpi}{n}$ et de β; désignons-la par $P_\mu\left(p\frac{\varpi}{n}\right)$.

Dans l'équation

$$P_\mu\left(p\frac{\varpi}{n}\right) = \Sigma_r \beta^{\mu r} p\left(g^r \frac{\varpi}{n}\right)$$

changeons ϖ en $g^\lambda \varpi$ et changeons en même temps l'indice de sommation r en $r-\lambda$, il viendra

$$P_\mu\left(p\frac{g^\lambda \varpi}{n}\right) = \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(p\frac{\varpi}{n}\right).$$

Les fonctions

$$\left[P_1\left(p\frac{\varpi}{n}\right)\right]^{n-1} = G\left(p\frac{\varpi}{n}\right),$$

$$\left[P_1\left(p\frac{\varpi}{n}\right)\right]^{-\mu} P_\mu\left(p\frac{\varpi}{n}\right) = H_\mu\left(p\frac{\varpi}{n}\right)$$

resteront donc inaltérées, et l'on aura

$$G\left(p\frac{\varpi}{n}\right) = G\left(p\frac{g^\lambda \varpi}{n}\right) = \frac{G\left(p\frac{\varpi}{n}\right) + \ldots + G\left(p\frac{g^\lambda \varpi}{n}\right) + \ldots}{n-1}.$$

Cette quantité, symétrique par rapport aux racines de l'équation

$$\left(y - p\frac{\varpi}{n}\right)\cdots\left(y - p\frac{g^\lambda \varpi}{n}\right)\cdots = 0,$$

pourra s'exprimer rationnellement par ses coefficients. Il en sera de même pour les fonctions

$$H_\mu\left(\wp\,\frac{\varpi}{n}\right).$$

Désignons par G, H_μ les expressions ainsi trouvées, il viendra

$$P_1\left(\wp\,\frac{\varpi}{n}\right) = G^{\frac{1}{n-1}},$$

$$P_\mu\left(\wp\,\frac{\varpi}{n}\right) = H_\mu G^{\frac{\mu}{n-1}}.$$

Cela posé, on aura

$$\Sigma_\mu \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(\wp\,\frac{\varpi}{n}\right) = \Sigma_r \Sigma_\mu \beta^{\mu(r-\lambda)}\,\wp\,\frac{g^r\varpi}{n}.$$

Mais $\Sigma_\mu \beta^{\mu(r-\lambda)}$ est égal à o si $r \gtrless \lambda$, à $n-1$ si $r=\lambda$. Le second membre se réduit donc à

$$(n-1)\,\wp\,\frac{g^\lambda\varpi}{n},$$

et l'on aura

$$(n-1)\,\wp\,\frac{g^\lambda\varpi}{n} = \Sigma_\mu \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(\wp\,\frac{\varpi}{n}\right)$$
$$= H_0 + \beta^{-\lambda} G^{\frac{1}{n-1}} + \beta^{-2\lambda} G^{\frac{2}{n-1}} H_2 + \ldots.$$

Cette formule donnera toutes les racines, qui se déduisent d'ailleurs les unes des autres en changeant la détermination du radical $G^{\frac{1}{n-1}}$.

472. Le problème de la division des périodes serait donc résolu si l'on savait trouver les racines de l'équation auxiliaire (6) dont dépend la fonction symétrique F. Cette équation a reçu le nom d'*équation modulaire*. En variant le choix de la fonction F, on obtiendrait une infinité de semblables équations.

IX. — Transformation.

473. Pour que deux fonctions elliptiques $p(u, \omega'_1, \omega''_2)$ et $p(u, \omega''_1, \omega''_2)$ soient liées par une équation algébrique, il faut et il suffit (321) que leurs périodes soient liées par deux relations

$$(1)\quad \begin{cases} a'\omega'_1 + b'\omega'_2 = a''\omega''_1 + b''\omega''_2, \\ c'\omega'_1 + d'\omega'_2 = c''\omega''_1 + d''\omega''_2. \end{cases}$$

Posons

$$(2)\quad \begin{cases} \Omega_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2, \\ \Omega_2 = c'\omega'_1 + d'\omega'_2. \end{cases}$$

Il existera une relation algébrique entre $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$, et une relation analogue entre $p(u, \omega''_1, \omega''_2)$ et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. L'élimination de cette dernière fonction donnera la relation entre $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ et $p(u, \omega''_1, \omega''_2)$. Nous pouvons donc nous borner à chercher la relation entre deux fonctions dont les périodes sont liées par la relation (2).

Comme la fonction pu ne change pas si l'on change le signe d'une de ses périodes, il est permis d'admettre que $\frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ et $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ ont leur partie imaginaire positive. Dans ce cas, $a'd' - b'c'$ sera un entier positif. Ce déterminant se nomme le *degré* de la *transformation* (2).

Soit r le plus grand commun diviseur de a', b', c', d'. La transformation (2) est la résultante des deux suivantes

$$\Omega'_1 = \frac{a'}{r}\omega'_1 + \frac{b'}{r}\omega'_2, \qquad \Omega'_2 = \frac{c'}{r}\omega'_1 + \frac{d'}{r}\omega'_2$$

et

$$\Omega_1 = r\Omega'_1, \qquad \Omega_2 = r\Omega'_2,$$

dont la première relie $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ à $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ et la seconde $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ à $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. Mais on a

$$p(u, \Omega'_1, \Omega'_2) = r^2 p(ru, r\Omega'_1, r\Omega'_2) = r^2 p(ru, \Omega_1, \Omega_2).$$

D'ailleurs la théorie de la multiplication nous a donné,

sous forme explicite, la relation entre cette quantité et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. Nous n'avons donc plus qu'à chercher la relation entre $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ et $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$.

Le problème général de la transformation est ainsi réduit au cas des transformations *propres*, où les coefficients a', b', c', d' n'ont pas de facteur commun.

474. Une transformation propre

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

de degré $a'd' - b'c' = n$ est (309) la résultante de trois autres

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

dont la première et la dernière sont de déterminant 1. Posons

$$\bar{\omega}_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \qquad \bar{\omega}_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2,$$

et

$$\Omega_1 = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2, \qquad \Omega_2 = \gamma'\omega'_1 + \delta'\omega'_2.$$

Nous aurons

$$p(u, \omega'_1, \omega'_2) = p(u, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2),$$
$$p(u, \Omega_1, \Omega_2) = p(u, \omega_1, \omega_2),$$

et la relation entre les nouvelles périodes aura pris la forme simple

$$\omega_1 = n\bar{\omega}_1, \qquad \omega_2 = \bar{\omega}_2$$

ou

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2.$$

Nous désignerons par $\bar{p}u$, $\bar{\zeta}u$, $\bar{\sigma}u$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, ... ce que deviennent pu, ζu, σu, g_2, g_3, ..., lorsqu'on y remplace ainsi ω_1 par $\frac{\omega_1}{n}$ sans altérer la seconde période.

Les périodes de $\bar{p}u$ sont, comme on le voit, celles de pu, et, en outre, des $n^{\text{ièmes}}$ de période $\frac{2\omega_1}{n}$, $\frac{4\omega_1}{n}$, ... formant un

des N groupes définis au paragraphe précédent. Au lieu de ces $n^{\text{ièmes}}$ de périodes, on aurait pu adjoindre ceux d'un quelconque des autres groupes.

On obtiendrait ainsi N réseaux différents, à chacun desquels correspond une fonction elliptique p liée à la primitive par une transformation de degré n. Les formules relatives à ces diverses transformations se déduiront évidemment de celles que nous allons établir pour la fonction $\bar{p}u$, en y remplaçant $\frac{2\omega_1}{n}$ par les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres qui caractérisent respectivement ces divers groupes.

La transformation

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

étant évidemment la résultante de transformations analogues où n est remplacé par ses facteurs premiers, tous les cas pourraient être ramenés à celui-là. Nous nous bornerons donc à considérer les deux cas suivants : 1° $n = 2$; 2° n impair.

475. *Transformation de degré* 2. — La fonction $\bar{p}u$ admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$; elle a, aux périodes près, les pôles 0 et $2\bar{\omega}_1 = \omega_1$. Aux environs de ces points, les parties infinies de son développement sont $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{(u-\omega_1)^2}$. Enfin le développement relatif à l'origine est privé de terme constant. On aura donc, par la formule de décomposition en éléments simples

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{p}u &= -\zeta' u - \zeta'(u-\omega_1) + \zeta'(-\omega_1) \\ &= pu + p(u-\omega_1) - e_1 \\ &= pu + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{pu - e_1}. \end{aligned}\right.$$

Intégrons et déterminons la constante de telle sorte que le développement des deux membres suivant les puissances de u n'ait pas de terme constant ; il vient

$$(4)\qquad \bar{\zeta}u = \zeta u + \zeta(u-\omega_1) + e_1 u + \eta_1.$$

Une seconde intégration donnera

$$(5)\quad \begin{cases} \log\bar\sigma u = \log\sigma u + \log\sigma(u-\omega_1) + \dfrac{e_1 u^2}{2} + \eta_1 u + \log\sigma(-\omega_1), \\ \bar\sigma u = e^{\frac{e_1 u^2}{2} + \eta_1 u} \dfrac{\sigma u \, \sigma(u-\omega_1)}{\sigma(-\omega_1)} \\ \quad = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u \, \sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{\wp u - e_1}. \end{cases}$$

Pour déduire de là les expressions de $\bar\sigma_1 u \bar\sigma$, ${}_2 u$, $\bar\sigma_3 u$, considérons les rapports $\dfrac{\bar\sigma_1 u}{\bar\sigma u}$, $\dfrac{\bar\sigma_2 u}{\bar\sigma u}$, $\dfrac{\bar\sigma_3 u}{\bar\sigma u}$. Ce sont des fonctions elliptiques admettant les périodes $2\omega_1$, $4\omega_2$; leur valeur principale pour $u = 0$ est $\dfrac{1}{u}$; leurs pôles sont ceux de $\bar\sigma u$; leurs zéros sont, aux multiples près de $2\omega_1$ et de $2\omega_2$,

$$\tfrac{1}{2}\omega_1 \quad \text{et} \quad \tfrac{3}{2}\omega_1, \qquad \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_2 + \omega_1 = -\omega_3,$$
$$\overline{\omega_3} = -\omega_2 - \tfrac{1}{2}\omega_1 \quad \text{et} \quad \overline{\omega_3} + \omega_1.$$

Les rapports des quatre fonctions

$$\sigma u \, \sigma_1 u, \qquad \frac{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{-\sigma^2 \frac{\omega_1}{2}} = \sigma^2 u \left(\wp u - \wp \frac{\omega_1}{2}\right)$$

$$\sigma_2 u \, \sigma_3 u, \qquad \frac{\sigma\left(u + \omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right)}{-\sigma^2\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} = \sigma^2 u \left[\wp u - \wp\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\right]$$

jouissent évidemment des mêmes propriétés; ils seront donc égaux aux précédents, et l'on aura, en conséquence,

$$(6)\quad \begin{cases} \bar\sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(\wp u - \wp \dfrac{\omega_1}{2}\right), \\ \bar\sigma_2 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma_2 u \, \sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}, \\ \bar\sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left[\wp u - \wp\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

et

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \dfrac{\bar{\sigma}_1^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{\left(pu - p\dfrac{\omega_1}{2}\right)^2}{pu - e_1}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_2 = \dfrac{\bar{\sigma}_2^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - e_1}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_3 = \dfrac{\bar{\sigma}_2^3 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{\left[pu - p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right)\right]^2}{pu - e_1}. \end{cases}$$

Développons les deux membres des équations (7) suivant les puissances de u; l'identification des termes constants donnera

$$(8)\quad \begin{cases} \bar{e}_1 = 2p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1, \\ \bar{e}_2 = e_2 + e_3 - e_1 = -2e_1, \\ \bar{e}_3 = 2p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right) - e_1. \end{cases}$$

Pour calculer les constantes $p\dfrac{\omega_1}{2}$, $p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right)$, qui figurent dans les formules précédentes, ajoutons ces trois dernières; nous obtiendrons cette première relation

$$2p\frac{\omega_1}{2} + 2p\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) - 4e_1 = 0.$$

Posons, d'autre part, $u = -\dfrac{\omega_1}{2}$ dans l'identité

$$[p(u + \omega_1) - e_1](pu - e_1) = \frac{1}{U_1^4},$$

et extrayons la racine carrée, il vient

$$p\frac{\omega_1}{2} - e_1 = \pm\frac{1}{U_1^2}.$$

Mais, dans le cas particulier où ω_1 est réel et ω_2 purement imaginaire, U_1 est réel; lorsque u varie de 0 à ω_1, pu est également réel et varie de $+\infty$ à e_1; donc $p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1$ est po-

sitif. Il faut donc prendre

$$(9)\qquad \mathrm{p}\frac{\omega_1}{2} = e_1 + \frac{1}{\mathrm{U}_1^2},\qquad \mathrm{p}\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = e_1 - \frac{1}{\mathrm{U}_1^2}.$$

Calculons enfin $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$. A cet effet, changeons u en $u + 2\omega_1 = u + 4\bar\omega_1$ dans la formule (5). Le premier membre sera multiplié par $e^{4\bar\eta_1(u+\omega_1)}$, le second par $e^{2e_1\omega_1(u+\omega_1)}\,e^{2.2\eta_1(u+\omega_1)}$. L'identification donne

$$(10)\qquad \bar\eta_1 = \eta_1 + \tfrac{1}{2}e_1\omega_1.$$

L'équation

$$\bar\eta_1\omega_2 - \bar\eta_2\,\tfrac{1}{2}\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

donne ensuite

$$(11)\qquad \bar\eta_2 = -\frac{\pi i}{\omega_1} + \frac{2\eta_1\omega_2}{\omega_1} + e_1\omega_2.$$

476. *Transformations de degré impair.* — Soit

$$n = 2m + 1.$$

La fonction $\bar{\mathrm{p}}u$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et les pôles $0, \pm\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, \pm\frac{2m\omega_1}{n}$. La décomposition en éléments simples donnera

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{\mathrm{p}}u &= \mathrm{p}u + \sum_{-m}^{+m}\mathrm{p}\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) - a\\ &= \mathrm{p}u + \sum_{1}^{n-1}\mathrm{p}\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) - a,\end{aligned}\right.$$

a désignant la constante

$$(13)\qquad a = \sum_{-m}^{m}\mathrm{p}\frac{2\mu\omega_1}{n} = \sum_{1}^{n-1}\mathrm{p}\frac{2\mu\omega_1}{n}.$$

D'ailleurs, la formule d'addition donne

$$\sum_{-m}^{m}\mathrm{p}\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) = \sum_{-m}^{m}\left[-\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2\mu\omega_1}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'\frac{2\mu\omega_1}{n}}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)^2\right].$$

En remarquant que les termes impairs en u doivent se détruire dans la somme, on aura

$$\sum_{-m}^{m} \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)^2$$

$$= \sum_{-m}^{m} \frac{1}{4} \frac{\wp'^2 u + \wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}$$

$$= \sum_{-m}^{m} \frac{1}{4} \frac{\wp'^2 u - \wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2} + \frac{1}{2}\sum_{-m}^{m} \frac{\wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}.$$

Le premier terme est égal à

$$\sum_{-m}^{m} \frac{\wp^3 u - \wp^3 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2 \left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}$$

$$= \sum_{-m}^{m} \frac{\wp^2 u + \wp u\, \wp \frac{2\mu\omega_1}{n} + \wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}}$$

$$= \sum_{-m}^{m} \left(\wp u + 2\wp \frac{2\mu\omega_1}{n} + \frac{3\wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)$$

Substituant dans l'équation (12), nous obtiendrons l'expression de $\bar{\wp} u$ par une somme de fractions simples

$$(14) \quad \bar{\wp} u = \wp u + \sum_{-m}^{m} \frac{3\wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}} + \sum_{-m}^{m} \frac{\frac{1}{2}\wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{u}\right)^2}.$$

Intégrons l'équation (12); il viendra

$$(15)\qquad \bar{\zeta} u = \zeta u + \sum_{-m}^{m} \zeta\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) + au.$$

On n'a pas à ajouter de constante, la différence des deux membres étant nulle pour $u = 0$, puisque ζu est une fonction impaire.

Intégrons encore, nous aurons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \log \bar{\sigma} u &= \log \sigma u + \sum_{-m}^{m} \log \sigma\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) + \frac{au^2}{2} \\ &\qquad - \sum_{-m}^{m} \log \sigma \frac{2\mu\omega_1}{n}, \\ \bar{\sigma} u &= e^{\frac{au^2}{2}} \sigma u \prod_{1}^{m} \frac{\sigma\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) \sigma\left(u - \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{-\sigma^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}} \\ &= e^{\frac{au^2}{2}} \sigma^n u \prod_{1}^{m} \left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right). \end{aligned}\right.$$

On en déduit, pour $\bar{\sigma}_1 u$, $\bar{\sigma}_2 u$, $\bar{\sigma}_3 u$, les formules analogues

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha u &= e^{\frac{au^2}{2}} \sigma_\alpha u \prod_{1}^{m} \frac{\sigma_\alpha\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) \sigma_\alpha\left(u - \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{\sigma_\alpha^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}} \\ &= e^{\frac{au^2}{2}} \sigma_\alpha u \, \sigma^{n-1} u \prod_{1}^{m} \left[\wp u - \wp\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Car, en divisant membre à membre par l'égalité (16), on obtient des deux côtés des fonctions elliptiques aux périodes $4\omega_1$ et $4\omega_2$, ayant mêmes zéros, mêmes pôles, et même valeur principale $\frac{1}{u}$ pour $u = 0$. Elles sont donc égales.

On aura encore

$$(18)\qquad \bar{\wp} u - \bar{e}_\alpha = \frac{\bar{\sigma}_\alpha^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = (\wp u - e_\alpha) \prod_{1}^{m} \left[\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}}\right]^2.$$

477. Changeons, dans la formule (16), u en

$$u + 2\omega_1 = u + 2n\bar{\omega}_1.$$

Le premier membre sera multiplié par

$$(-1)^n e^{2n\eta_1(u+\omega_1)},$$

et le second par

$$e^{2a\omega_1(u+\omega_1)}(-1)^n e^{2\bar{\eta}_1(u+\omega_1)n}.$$

L'identification donnera

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1 + \frac{a\omega_1}{n}. \tag{19}$$

De l'équation $\bar{\eta}_1\omega_2 - \bar{\eta}_2\frac{\omega_1}{n} = \frac{\pi i}{2}$, on tire ensuite

$$\bar{\eta}_2 = -\frac{n\pi i}{2\omega_1} + a\omega_2 + n\eta_1\frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{20}$$

Comme on a $\omega_1 = \bar{\omega}_1 + 2m\bar{\omega}_1$, on obtiendra les valeurs de $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ en posant $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans l'équation (12). Il vient

$$\left\{\begin{aligned}\bar{e}_\alpha &= -a + e_\alpha + \sum_1^{n-1} p\left(\omega_\alpha + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right),\\ &= -a + ne_\alpha + \frac{1}{U_\alpha^2}\sum_1^{n-1}\frac{1}{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Développons les deux membres de l'équation (12) suivant les puissances de u. L'identification des termes en u^2 et u^4 donnera

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{20}\bar{g}_2 &= \frac{1}{20}g_2 + \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} p''\frac{2\mu\omega_1}{n},\\ \frac{1}{28}\bar{g}_3 &= \frac{1}{28}g_3 + \frac{1}{24}\sum_1^{n-1} p^{\text{IV}}\frac{2\mu\omega_1}{n}.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Comme $p''u$ et $p^{\text{IV}}u$ s'expriment rationnellement en

pu, g_2, g_3, ces formules montrent que $\bar{g}_2$ et $\bar{g}_3$ et l'invariant absolu $\bar{J}$ sont racines d'équations modulaires.

478. Il est évident, d'après l'homogénéité, que l'équation modulaire à laquelle $\bar{J}$ satisfait ne doit contenir g_2 et g_3 que dans la combinaison J. Elle sera donc de la forme

$$F_n(J, \bar{J}) = 0.$$

Cette équation sera symétrique en J et $\bar{J}$. Soient, en effet, $R = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ le réseau de périodes auquel correspond l'invariant J; $\bar{R} = 2m_1\frac{\omega_1}{n} + 2m_2\omega_2$ l'un des réseaux transformés, $\bar{J}$ l'invariant correspondant. En divisant à son tour la période ω_2 par n, on obtiendra un nouveau réseau $R' = 2m_1\frac{\omega_1}{n} + 2m_2\frac{\omega_2}{n}$, qui sera l'un des transformés de $\bar{R}$. Son invariant J′ sera donc lié à $\bar{J}$ par la relation

$$F_n(\bar{J}, J') = 0.$$

Mais, d'autre part, l'invariant absolu ne dépendant que du rapport des périodes, on a $J' = J$. Donc l'équation

$$F_n(J, \bar{J}) = 0$$

entraîne celle-ci

$$F_n(\bar{J}, J) = 0.$$

479. L'équation (18) fournit de nouvelles équations modulaires plus simples que les précédentes. Posons, en effet,

$$u = \omega_\beta, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{p}u = \bar{e}_\beta, \qquad pu = e_\beta,$$

et remplaçons $p\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)$ par sa valeur

$$e_\alpha + \frac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha};$$

il viendra

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}\bar{e}_\beta - \bar{e}_\alpha &= (e_\beta - e_\alpha)^n \prod_1^m \left[\frac{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma}{\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha\right)\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\beta\right)}\right]^2 \\ &= (e_\beta - e_\alpha)^n \prod_1^m \left[\frac{2\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma\right)}{p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right]^4.\end{aligned}\right.$$

Or on a (397)

$$e_\beta - e_\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4\tau\,\varphi_\gamma^8\tau,$$

$$\bar{e}_\beta - \bar{e}_\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2\bar{\omega}_1}\right)^2 \varphi^4\bar{\tau}\,\varphi_\gamma^8\bar{\tau} = \pm\left(\frac{n\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4 n\tau\,\varphi_\gamma^8 n\tau$$

(le signe dépendant de l'ordre circulaire des indices α, β, γ). Cette équation peut donc s'écrire ainsi

$$(24)\quad n^2\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{2n-2} \frac{\varphi^4 n\tau\,\varphi_\gamma^8 n\tau}{\varphi^{4n}\tau\,\varphi_\gamma^{8n}\tau} = \prod_1^m \left(\frac{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma}{p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)^4.$$

En la combinant avec ses homologues, et tenant compte de l'identité

$$\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3 = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{2},$$

ainsi que des relations

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{8}}\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}, \qquad \Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}\varphi^{24}$$

(397 et 455), on en déduit aisément

$$(25)\quad \frac{\varphi_{\alpha\beta}^8 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^{8n}\tau} = \prod_1^m \left(\frac{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha}{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\beta}\right)^4,$$

(26) $$\frac{\varphi_\alpha^{24} n\tau}{\varphi_\alpha^{24n}\tau} = \prod_1^m \frac{\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha\right)^{12}}{p'^8 \frac{2\mu\omega_1}{n}},$$

(27) $$\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n} = n^{12}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12n-12} \frac{\varphi^{24} n\tau}{\varphi^{24n}\tau} = \prod_1^m \frac{1}{p'^8 \frac{2\mu\omega_1}{n}}.$$

Les quantités

$$\frac{\varphi_{\alpha\beta}^2 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^{2n}\tau}, \qquad \frac{\varphi_\alpha^6 n\tau}{\varphi_\alpha^{6n}\tau}, \qquad \sqrt[4]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}} = n^3\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{3n-3} \frac{\varphi^6 n\tau}{\varphi^{6n}\tau}$$

sont donc rationnelles et symétriques par rapport aux quantités $p\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\frac{2m\omega_1}{n}$.

De semblables expressions sont racines d'équations modulaires; car, d'une part, elles peuvent s'exprimer rationnellement par $p\frac{2\omega_1}{n}$; d'autre part, elles restent inaltérées par le changement de ω_1 en $\lambda\omega_1$, λ étant un entier quelconque premier à n. Soit, en effet, $\pm r_\mu$ le reste positif ou négatif, mais $< \frac{n}{2}$, qu'on obtient en divisant $\lambda\mu$ par n; on aura

$$p\frac{2\lambda\mu\omega_1}{n} = p\frac{2r_\mu\omega_1}{n},$$

et les nombres r_μ reproduisent, à l'ordre près, la suite 1, 2, ..., m.

On doit toutefois remarquer que, les expressions de $\frac{\varphi_{\alpha\beta}^2 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^{2n}\tau}$, $\frac{\varphi_\alpha^6 n\tau}{\varphi_\alpha^{6n}\tau}$ contenant les constantes e_α, e_β, celles-ci figureront conjointement avec g_2 et g_3 dans les coefficients des équations modulaires correspondantes.

480. Nous allons montrer, d'après M. Kiepert, que, si n est premier à 3, le produit

$$\prod_1^m p'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}$$

est le cube d'une fonction rationnelle et symétrique de $p\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\frac{2m\omega_1}{n}$, d'où cette conséquence que

$$\frac{\varphi_\alpha^2 n\tau}{\varphi_\alpha^{2n}\tau}, \qquad \sqrt[12]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = n\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{n-1}\frac{\varphi^2 n\tau}{\varphi^{2n}\tau}$$

sont elles-mêmes des racines d'équations modulaires.

Nous partirons de l'expression

$$(28) \qquad t_\mu = \frac{\theta'(0)}{2\omega_1\,\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{2\mu^2\eta_1\omega_1}{n^2}}}{\sigma\frac{2\mu\omega_1}{n}}$$

$\left(\text{remarquons en passant que, pour } n = 2,\ \mu = 1, \text{ elle se réduirait à } \frac{1}{U_1}\right)$. On a évidemment

$$(29) \qquad t_{-\mu} = -t_\mu = t_{n-\mu}, \qquad t_{\mu+\lambda n} = (-1)^\lambda t_\mu,$$

$$(30) \qquad \frac{t_\mu^{\lambda^2}}{t_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma\frac{2\lambda\mu\omega_1}{n}}{\sigma^{\lambda^2}\frac{2\mu\omega_1}{n}} = \psi_\lambda\frac{2\mu\omega_1}{n}.$$

Considérons le produit

$$(31) \qquad f = \prod_1^m t_\mu.$$

Son carré n'est pas altéré par le changement de μ en $\lambda\mu$, si λ est premier à n. Soit, en effet, $\pm r_\mu$ le plus petit reste de la division de $\lambda\mu$ par n; on aura

$$t_{\lambda\mu}^2 = t_{r_\mu}^2,$$

d'où

$$\prod_1^m t_{\lambda\mu}^2 = \prod_1^m t_{r_\mu}^2 = \prod_1^m t_\mu^2,$$

car r_μ prend, à l'ordre près, la suite des valeurs $1, 2, \ldots, m$.

Cela posé, l'équation (30) donnera

$$(32) \qquad \left(\prod_1^m \frac{t_\mu^{\lambda^2}}{t_{\lambda\mu}}\right)^2 = \frac{f^{2\lambda^2}}{f^2} = f^{2(\lambda^2-1)} = \prod_1^m \psi_\lambda^2\frac{2\mu\omega_1}{n}.$$

Mais $\psi_\lambda^2 \dfrac{2\mu\omega_1}{n}$ est un polynôme entier en $\wp \dfrac{2\mu\omega_1}{n}$. Donc, $f^{2(\lambda^2-1)}$ est racine d'une équation modulaire (si λ est premier à n).

Puisque nous supposons n impair et non divisible par 3, nous pourrons prendre successivement $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, et nous en conclurons que f^6, f^{16}, et par suite

$$f^2 = \frac{(f^{16})^2}{(f^6)^5},$$

sont racines d'équations modulaires.

Cela posé, considérons l'équation

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}.$$

Posons

$$u = \frac{2\mu\omega_1}{n}, \qquad v = \frac{2\mu\omega_1}{n} + h,$$

h étant infiniment petit. L'identification des valeurs principales donnera

$$\wp' \frac{2\mu\omega_1}{n} = -\frac{\sigma \dfrac{4\mu\omega_1}{n}}{\sigma^4 \dfrac{2\mu\omega_1}{n}} = -\frac{t_\mu^4}{t_{2\mu}},$$

d'où

$$(33)\qquad \prod_1^m \wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} = \prod_1^m \frac{t_\mu^8}{t_{2\mu}^2} = \frac{f^8}{f^2} = (f^2)^3.$$

En comparant cette expression à la formule (27), on voit qu'on aura

$$(34)\qquad f = \sqrt[24]{\frac{\Delta^n}{\overline{\Delta}}} = \alpha \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi^n \tau}{\varphi n \tau},$$

α désignant une racine $24^{\text{ième}}$ de l'unité.

Nous supposerons qu'on ait choisi pour $2\omega_1$ une période principale, et pour préciser davantage, la période de module minimum. On aura dans ce cas $\alpha = 1$; car, dans le cas particulier où ω_1 est réel et ω_2 purement imaginaire, $\varphi\tau$, $\varphi n\tau$

sont réels et positifs; quant aux $\frac{n-1}{2}$ facteurs du produit f, ils sont réels et ont le signe de ω_1.

481. Supposons, pour plus de simplicité, n premier et > 3, et cherchons à former l'équation modulaire à laquelle satisfait f^2. Une première racine est donnée par la formule

$$f^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{2n}\tau}{\varphi^2 n\tau}.$$

Les autres s'en déduiront en remplaçant $\frac{2\omega_1}{n}$ par d'autres $n^{\text{ièmes}}$ de période propres choisis à volonté dans les n autres groupes. Comme n est premier à 24, on pourra prendre les suivants (467)

$$\frac{48k\omega_1 + 2\omega_2}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On devra, en conséquence, substituer à $2\omega_1$ la nouvelle période

$$2\omega'_1 = 48k\omega_1 + 2\omega_2 = 2\omega_1(24k + \tau),$$

et à $2\omega_2$ une nouvelle période $2\omega'_2$ formant avec celle-ci un couple primitif. On pourra prendre, par exemple,

$$2\omega'_2 = -2\omega_1.$$

Par là τ se trouvera changé en

$$\frac{-2\omega_1}{48k\omega_1 + 2\omega_2} = \frac{-1}{24k + \tau}.$$

Les autres racines auront donc pour expression

$$f_k^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\pi}{\omega_1(24k+\tau)}\right]^{n-1} \frac{\varphi^{2n}\left(\frac{-1}{24k+\tau}\right)}{\varphi^2\left(\frac{-n}{24k+\tau}\right)}.$$

Mais on a (448)

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\tau}\,\varphi\tau$$

et, par suite,

$$\varphi\left(\frac{-1}{24k+\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{24k+\tau}\,\varphi(24k+\tau),$$

$$\varphi\left(\frac{-n}{24k+\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{24k+\tau}{n}}\,\varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right),$$

d'où

$$f_k^2 = \left(\frac{\pi}{i\omega_1}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{2n}(24k+\tau)}{\varphi^2\left(\frac{24k+\tau}{n}\right)}.$$

Or on a

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1-q^{2\mu}),$$

d'où

$$\varphi n\tau = q^{\frac{n}{12}} \prod_1^\infty (1-q^{2n\mu}),$$

$$\varphi(24k+\tau) = \varphi\tau$$

et, en posant pour abréger $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \varepsilon$,

$$\varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right) = \varepsilon^k q^{\frac{1}{12n}} \prod_1^\infty \left(1-\varepsilon^{24k\mu} q^{\frac{2\mu}{n}}\right).$$

Les racines auront donc en fonction de ω_1 et de q les expressions suivantes :

$$(35)\quad \begin{cases} f^2 = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{\omega_1}\right)^{n-1} \displaystyle\prod_1^\infty \frac{(1-q^{2\mu})^{2n}}{(1-q^{2n\mu})^2}, \\ f_k^2 = \left(\dfrac{\pi}{i\omega_1}\right)^{n-1} \varepsilon^{-2k} q^{\frac{n^2-1}{6n}} \displaystyle\prod_1^\infty \frac{(1-q^{2\mu})^{2n}}{\left(1-\varepsilon^{24k\mu} q^{\frac{2\mu}{n}}\right)^2}. \end{cases}$$

482. Il est maintenant aisé de former l'équation modulaire

$$(36)\qquad \Phi(f^2) = f^{2n+2} + A_1 f^{2n} + \ldots + A_{n+1} = 0,$$

dont f^2, f_k^2 sont les racines. Nous savons que ses coefficients sont rationnels en g_2, g_3. Mais ils sont entiers ; car, en sup-

posant qu'on ait choisi pour $2\omega_1$ la période de module minimum (un changement de périodes fondamentales ne ferait que permuter les racines), q a un module au plus égal à $e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}$, et les racines seront toujours finies. Les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ resteront donc finis, quels que soient g_2 et g_3; ce seront donc des polynômes entiers.

En outre, si nous supposons Δ infiniment petit du premier ordre, la relation

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2\mu})^{24}$$

montre que q sera infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$; f^2 sera fini et les autres racines f_k^2 seront infiniment petites d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}$. Le coefficient A_r est une somme de produits de r racines; dans chacun d'eux $r-1$ racines au moins sont infiniment petites d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}$. Donc A_r est d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}(r-1)$ au moins. Il contiendra donc Δ^a en facteur, a étant l'entier égal ou immédiatement supérieur à ce nombre. On aura, par suite,

$$A_r = \Delta^a B_r,$$

B_r étant un polynôme entier en g_2, g_3, satisfaisant à la condition d'homogénéité. Or, les racines f^2, f_k^2 ont, par rapport à ω_1, ω_2 le poids $1-n$; Δ, g_2, g_3 ont respectivement les poids -12, -4, -6. Le polynôme B_r aura donc pour poids

$$r(1-n) + 12a.$$

Si ce nombre est positif, la formation du polynôme B_r sera impossible, puisque g_2, g_3 ont des poids négatifs; A_r sera donc identiquement nul. Dans le cas contraire, l'homogénéité permettra d'écrire la partie littérale de B_r. Il ne restera ainsi à déterminer qu'un nombre restreint de coefficients numériques. Pour les obtenir, on substituera dans l'équation les développements de g_2, g_3, Δ et des racines f^2, f_k^2 et

l'on égalera à zéro les coefficients des puissances successives de q.

483. Les quantités

$$e^{\frac{(n-1)\pi i}{4}}\frac{1}{f}, \quad \frac{1}{f_k}$$

sont proportionnelles aux produits

$$\varphi n\tau, \quad \varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right).$$

Il existe entre ces expressions des relations linéaires remarquables, que nous allons établir.

On a (396)

$$\prod_1^{\infty}(1-q^{2\mu}) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}q^{3\mu^2+\mu},$$

d'où

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}q^{3\mu^2+\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12}},$$

$$\varphi n\tau = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}q^{\frac{n(6\mu+1)^2}{12}},$$

$$\varphi\,\frac{24k+\tau}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}\varepsilon^{k(6\mu+1)^2}q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12n}}.$$

Posons, dans cette dernière équation, $k=0, 1, \ldots, n-1$ et ajoutons les résultats. La somme

$$\sum \varepsilon^{k(6\mu+1)^2}$$

sera égale à n ou à zéro, suivant que $6\mu+1$ sera ou non divisible par n. D'ailleurs n étant, par hypothèse, premier impair et différent de 3, sera de la forme $6a+1$ ou $6a-1$. Dans le premier cas, pour que $6\mu+1$ soit divisible par n,

il faut poser $\mu = a + n\mu'$, d'où

$$6\mu + 1 = n(6\mu' + 1)$$

et, par suite,

$$(37)\quad \sum_0^{n-1} \varphi \frac{24k+\tau}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{a+n\mu'} n e^{\frac{n(6\mu'+1)^2}{12}} = (-1)^a n \varphi n\tau.$$

Si $n = 6a - 1$, il faudra poser

$$\mu = -a - n\mu', \qquad \text{d'où} \qquad 6\mu + 1 = -n(6\mu' + 1),$$

et l'on arrivera à la même conclusion.

Soit enfin s l'un quelconque des $\frac{n-1}{2}$ non résidus quadratiques de n; on aura

$$(38)\quad \sum_0^{n-1} \varepsilon^{-ks} \varphi \frac{24k+\tau}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu} \varepsilon^{k[(6\mu+1)^2 - s]} q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12n}} = 0,$$

car, quel que soit μ, l'exposant

$$(6\mu + 1)^2 - s$$

ne sera jamais multiple de n.

484. Les cubes des fonctions $\varphi n\tau$, $\varphi \frac{24k+\tau}{n}$ sont liés par des relations analogues. Elles se déduisent du développement

$$\varphi^3 \tau = \frac{1}{2\pi} \theta'(0) = \sum_0^{\infty} (-1)^{\mu} (2\mu + 1) q^{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2},$$

d'où

$$\varphi^3 n\tau = \sum_0^{\infty} (-1)^{\mu} (2\mu + 1) q^{n\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2},$$

$$\varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = \sum_0^{\infty} (-1)^{\mu} (2\mu + 1) \varepsilon^{3k(2\mu+1)^2} q^{\frac{1}{n}\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2}.$$

Formons la somme $\sum \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n}$. Les termes où $2\mu+1$ n'est pas divisible par n se détruisent. Les autres s'obtiennent en posant

$$\mu = \frac{n-1}{2} + n\mu',$$

d'où

$$2\mu + 1 = n(2\mu'+1), \qquad (-1)^\mu = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\mu'}.$$

Leur somme sera donc

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\mu'} n(2\mu'+1) n q^{n\left(\frac{2\mu'+1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^2 \varphi^3 n\tau.$$

Donc

$$(39) \qquad \sum \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^2 \varphi^3 n\tau.$$

On trouvera de même, s désignant un non-résidu quadratique de n,

$$(40) \qquad \sum \varepsilon^{-3ks} \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = 0,$$

car, quel que soit μ, l'exposant

$$3k[(2\mu+1)^2 - s]$$

ne sera jamais divisible par n.

485. On sait que les fonctions symétriques des quantités $p\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\frac{2m\omega_1}{n}$ doivent s'exprimer rationnellement en f^2, g_2, g_3. Pour réaliser ce calcul, on peut recourir aux considérations suivantes :

Les deux fonctions $\sigma(u, \omega_1, \omega_2)$ et $\theta(v, \tau)$, liées par la relation

$$\sigma(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{2\pi}\, \Delta^{-\frac{1}{8}} \omega_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta(v, \tau),$$

satisfont respectivement aux équations aux dérivées partielles

(41) $$D\sigma = \sigma'' + \tfrac{1}{12} g_2 u^2 \sigma,$$

(42) $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta}{\partial \tau},$$

lesquelles sont les conséquences l'une de l'autre (433). Or la fonction $\theta(v\sqrt{n}, n\tau)$ satisfait évidemment encore à l'équation (42). L'équation (41) admettra donc la solution

$$F(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{2\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{8}}\omega_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta(v\sqrt{n}, n\tau).$$

Mais on a

$$\bar{\sigma}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sigma\left(\frac{u}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \sqrt{2\pi}\,\bar{\Delta}^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{\omega_1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\bar{\eta}_1 u^2}{2\omega_1}} \theta(v\sqrt{n}, n\tau).$$

On a d'ailleurs $\bar{\eta}_1 = \eta_1 + \dfrac{a\omega_1}{n}$ (477).

La solution précédente pourra donc se mettre sous la forme

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^{\frac{1}{8}} e^{-\frac{au^2}{2n}} \bar{\sigma}\frac{u}{\sqrt{n}} = F(u, \omega_1, \omega_2).$$

Cette expression satisfait à l'équation

$$DF = F'' + \tfrac{1}{12} g_2 u^2 F.$$

Si donc nous changeons u en $u\sqrt{n}$, la fonction

$$x = F(u\sqrt{n}, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^{\frac{1}{8}} c^{-\frac{au^2}{2}} \bar{\sigma} u$$

satisfera à l'équation transformée

$$Dx = \frac{1}{n} x'' + \tfrac{1}{12} g_2 n u^2 x.$$

Cette équation est semblable à celle à laquelle satisfait $\sigma n u$, sauf le remplacement de n^2 en n.

Nous avons déduit de cette dernière (434 et 435) une équation aux dérivées partielles pour l'expression

$$\psi_n = \frac{\sigma nu}{\sigma^{n^2} u},$$

considérée comme fonction de pu, g_2, g_3. Par le même calcul (sauf le changement de n^2 en n), nous trouverons que $\frac{x}{\sigma^n u} = z$ satisfait à l'équation

$$(43) \quad \begin{cases} n\left(12 g_3 \frac{\partial z}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial z}{\partial g_3}\right) \\ \quad = (4p^3 - g_2 p - g_3) \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \\ \quad + \left[(6-4n)p^2 - \frac{3-4n}{6} g_2\right] \frac{\partial z}{\partial p} + n(n-1)pz, \end{cases}$$

semblable à l'équation (17) du n° 435, sauf le changement de n^2 en n.

Comme Δ est indépendant de u, et satisfait à la relation $D\Delta = 0$, la quantité

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta^{-\frac{n-1}{8}} z = \left(\frac{\Delta}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{8}} \frac{e^{-\frac{au^2}{2}} \sigma u}{\sigma^n u}$$

satisfera à cette même équation.

Or on a [formules (34) et (16)]

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{f^3}, \qquad \frac{e^{-\frac{au^2}{2}} \sigma u}{\sigma^n u} = \prod_1^m \left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right).$$

Donc

$$y = \frac{1}{f^3} \prod_1^m \left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right) = A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_m$$

sera un polynôme en pu.

On connaît déjà le premier coefficient

$$A_0 = \frac{1}{f^3}.$$

L'équation ci-dessus fournit une formule récurrente pour déterminer les autres. Substituons, en effet, ce polynôme dans l'équation et égalons à zéro les termes en p^μ. On aura

$$(44)\quad \begin{cases} n\left(12 g_3 \dfrac{\partial A_\mu}{\partial g_2} + \dfrac{2}{3} g_2^2 \dfrac{\partial A_\mu}{\partial g_3}\right) \\ = [4(\mu-1)(\mu-2)+(6-4n)(\mu-1)+n(n-1)]A_{\mu-1} \\ -\left[(\mu+1)\mu + \dfrac{3-4n}{6}(\mu+1)\right] g_2 A_{\mu+1} \\ - g_3(\mu+2)(\mu+1)A_{\mu+2}. \end{cases}$$

Supposons qu'on ait déterminé les expressions des coefficients jusqu'à $A_{\mu+1}$ inclusivement en fonction rationnelle de g_2, g_3, f. Soit $A_\mu = \varphi_\mu(g_2, g_3, f)$. On aura

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial g_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial g_2}, \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial g_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial g_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial g_3}.$$

D'ailleurs $\dfrac{\partial f}{\partial g_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial g_3}$ s'obtiendront en dérivant l'équation modulaire.

La formule (44) donnera donc $A_{\mu+2}$ au moyen des coefficients précédents.

Connaissant ainsi les coefficients de l'équation qui a pour racines $p\dfrac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\dfrac{2m\omega_1}{n}$, on obtiendra par des formules connues l'expression d'une fonction symétrique quelconque.

486. Multiplication complexe. — On a vu que, si m est entier, pmu s'exprime rationnellement en pu. Cherchons avec Abel sous quelles conditions cette propriété peut subsister pour d'autres valeurs de m.

Puisque pmu est, par hypothèse, rationnel en pu, il admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$; mais ses périodes fondamentales sont évidemment $\dfrac{2\omega_1}{m}$, $\dfrac{2\omega_2}{m}$: on aura donc

$$2\omega_1 = \frac{2a\omega_1 + 2b\omega_2}{m}, \qquad 2\omega_2 = \frac{2c\omega_1 + 2d\omega_2}{m}$$

ou

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

a, b, c, d étant des entiers.

Ces équations sont satisfaites, quels que soient ω_1, ω_2, si l'on pose $m = a = d$, $b = c = 0$; mais alors m est entier : c'est le cas de la multiplication ordinaire.

Si m n'est pas entier, son élimination donnera entre les périodes la relation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{c\omega_1 + d\omega_2}{a\omega_1 + b\omega_2}$$

ou

$$b\omega_2^2 + (a - d)\omega_1\omega_2 - c\omega_1^2 = 0$$

ou enfin

$$(45) \qquad b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0.$$

Cette équation doit avoir ses racines imaginaires, et τ représentera celle dont la partie imaginaire est positive. Quant au multiplicateur

$$m = a + b\tau,$$

ce sera aussi une quantité complexe.

Si les relations précédentes sont satisfaites, $\wp mu$ étant une fonction paire, qui admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, sera bien rationnel en $\wp u$; nous dirons, en conséquence, que $\wp u$ admet une *multiplication complexe*. Nous venons de voir que cela ne peut avoir lieu que si τ est racine d'une équation du second degré, à coefficients entiers et à racines imaginaires.

487. Supposons réciproquement que τ satisfasse à une équation de ce genre. Comme on peut multiplier ou diviser tous les coefficients par un même entier positif ou négatif, cette équation pourra se mettre sous la forme

$$(46) \qquad A\tau^2 + 2B\tau + C = 0,$$

A, C étant positifs, et A, B, C premiers entre eux. Le discri-

minant

$$D = AC - B^2$$

sera positif.

Nous distinguerons deux sortes d'équations (46) suivant que A, 2B, C ont pour plus grand commun diviseur 1 ou 2. Dans ce second cas, A, C seront pairs, B impair, et D de la forme $4n - 1$.

Pour déterminer les multiplications complexes dont pu est susceptible, il nous faut identifier l'équation (46) avec (45), ce qui donnera

$$b = Ax, \qquad a - d = 2Bx, \qquad c = -Cx.$$

Nous joindrons à ces relations la suivante

$$a + d = 2y,$$

et nous en tirerons

$$a = y + Bx, \qquad b = Ax, \qquad c = -Cx, \qquad d = y - Bx;$$

et le déterminant $ad - bc$, que nous désignerons par n, sera donné par la formule

$$n = y^2 + Dx^2.$$

Enfin

$$\tau = \frac{-B + i\sqrt{D}}{A},$$

$$m = a + b\tau = y + ix\sqrt{D}.$$

Si l'équation (46) est de la première sorte, il faudra, pour que a, b, c, d soient entiers, que x, y le soient. Si elle est de la seconde sorte, A, 2B, C admettant 2 comme diviseur commun, x, y pourront contenir 2 en dénominateur : posant donc $x = \frac{x'}{2}$, $y = \frac{y'}{2}$, on aura

$$a = \frac{y' + Bx'}{2}, \qquad b = \frac{Ax'}{2},$$

$$c = -\frac{Cx'}{2}, \qquad d = \frac{y' - Bx'}{2},$$

$$4n = y'^2 + Dx'^2, \qquad m = \frac{y' + ix'\sqrt{D}}{2}$$

et a, b, c, d seront entiers, si x', y' sont entiers et de même parité.

La fonction pu considérée admet donc une infinité de multiplicateurs complexes m, qu'on obtiendra en faisant varier dans ces formules les entiers x, y (ou x', y'). Nous pouvons toutefois nous borner à donner à ces deux indéterminées des valeurs premières entre elles ; car, si l'on changeait x, y en rx, ry, m serait changé en rm, et la relation entre pu et $prmu$ se déduirait de la combinaison de celle qui lie pu, pmu avec celle que donne la multiplication ordinaire et qui lie pmu avec $prmu$.

Supposons donc x, y (ou x', y') premiers entre eux ; a, b, c, d auront évidemment l'unité pour plus grand commun diviseur.

488. On voit, par cette analyse, que toute équation

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0$$

ou

$$(47) \qquad A\omega_2^2 + 2B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad D > 0,$$

caractérise une fonction pu admettant des multiplicateurs complexes. Mais cette même fonction pu correspond à une infinité d'équations de ce genre. En effet, pu ne change pas si l'on remplace ω_1, ω_2 par un autre système de demi-périodes fondamentales ω'_1, ω'_2. Soient

$$\omega_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \qquad \omega_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$$

les équations qui lient ces deux systèmes de périodes. L'équation (47) sera transformée en

$$(48) \qquad A'\omega'^2_2 + 2B'\omega'_1\,\omega'_2 + C'\omega'^2_1 = 0,$$

où

$$(49) \qquad \begin{cases} A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2, \\ B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta, \\ C' = A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2. \end{cases}$$

Nous considérerons comme équivalentes et nous rangerons

dans la même classe toutes les équations qui peuvent ainsi se déduire de l'une d'elles, et qui répondent à une même fonction pu.

Toutes ces équations ont le même discriminant, car on a

$$D' = A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = D.$$

En outre, elles sont de la même sorte; car les formules (49) montrent que le plus grand commun diviseur de A, B, C divise celui de A', B', C', et que celui de A, 2B, C divise celui de A', 2B', C'; et la réciproque est vraie, car on peut revenir de l'équation (48) à l'équation (47) par la substitution inverse

$$\omega'_1 = \delta\omega_1 - \beta\omega_2, \qquad \omega'_2 = -\gamma\omega_1 + \alpha\omega_2.$$

On sait, par la théorie des formes quadratiques, que les équations d'un même discriminant D et de même sorte ne formant qu'un nombre fini de classes. Nous allons retrouver ce résultat en cherchant l'expression des fonctions pu à multiplication complexe, qui correspondent à ce discriminant D.

489. Toutes ces fonctions admettent les mêmes multiplicateurs, donnés (487) par les formules

$$y + ix\sqrt{D} \quad \text{ou} \quad \frac{y' + ix'\sqrt{D}}{2}.$$

Soit m un de ces multiplicateurs, choisi à volonté (il conviendra dans le calcul effectif de choisir le plus simple, correspondant à $x = 1$, $y = 0$, ou à $x' = y' = 1$). On aura

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

a, b, c, d étant des entiers encore inconnus, car nous ne supposons pas donnés les coefficients A, B, C, mais seulement le discriminant D.

Posons

$$\frac{\omega_1}{m} = \Omega_1, \qquad \frac{\omega_2}{m} = \Omega_2;$$

les équations précédentes deviennent

$$\omega_1 = a\Omega_1 + b\Omega_2, \qquad \omega_2 = c\Omega_1 + d\Omega_2.$$

Remplaçons ω_1, ω_2, d'une part, et Ω_1, Ω_2 d'autre part, par d'autres demi-périodes équivalentes ω'_1, ω'_2 et Ω'_1, Ω'_2. Nous pourrons, par un choix convenable de ces nouvelles périodes, (474) réduire la relation entre les périodes à la forme plus simple

$$\omega'_1 = n\Omega'_1, \qquad \omega'_2 = \Omega'_2.$$

Cela posé, $\wp mu$ admet pour périodes primitives $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, ou leurs équivalentes $2\Omega'_1$, $2\Omega'_2$. Elle admet donc les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ qui sont des périodes primitives pour $\wp u$. Ses pôles sont, à ces périodes près, les points o, $\frac{2\omega'_1}{n}$, ..., $\frac{2(n-1)\omega'_1}{n}$. La décomposition en éléments simples donnera donc

$$(50) \qquad \wp mu = \wp u + \sum_1^{n-1} \left[\wp\left(u + \frac{2\mu\omega'_1}{n}\right) - \wp\frac{2\mu\omega'_1}{n} \right].$$

Identifions les développements des deux membres, suivant les puissances de u, en remarquant que $\wp mu$, ayant pour périodes $\frac{2\omega_1}{m}$, $\frac{2\omega_2}{m}$, aura, en vertu de l'homogénéité, les invariants $m^4 g_2$, $m^6 g_3$; il viendra

$$(51) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{20}(m^4 - 1)g_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_1^{n-1} \wp''\frac{2\mu\omega'_1}{n}, \\[2ex] \dfrac{1}{28}(m^6 - 1)g_3 = \dfrac{1}{24}\displaystyle\sum_1^{n-1} \wp^{\text{IV}}\frac{2\mu\omega'_1}{n}. \end{cases}$$

Prenons une de ces deux équations. Nous savons que la somme du second membre est liée à g_2, g_3 par une équation algébrique. Substituant dans celle-ci la valeur obtenue ci-dessus pour cette somme, nous obtiendrons une équation algébrique entre g_2 et g_3. Cette équation, en vertu de l'homogénéité, déterminera J.

Il n'existe donc qu'un nombre limité d'invariants absolus J correspondant aux multiplications complexes de discrimi-

nant D et d'une sorte donnée. Ils sont racines d'une équation algébrique, à coefficients entiers, dont le degré sera le nombre des classes d'équations quadratiques du discriminant et de la sorte donnés.

La connaissance de ces invariants déterminera, à un facteur d'homogénéité près, les fonctions pu correspondantes.

490. Les deux cas les plus simples de la multiplication complexe sont ceux où l'équation en τ se réduit à

$$\tau^2 + 1 = 0 \qquad (D = 1)$$

ou à

$$2\tau^2 + 2\tau + 2 = 0 \qquad (D = 3, \quad \text{deuxième sorte}).$$

Nous avons déjà signalé l'intérêt de ces cas particuliers; on a dans le premier $J = 0$, et dans le second $J = 1$.

491. Soient pu et $\bar{p}u$ deux fonctions elliptiques dont les périodes soient liées par les relations

$$\omega_1 = a\bar{\omega}_1 + b\bar{\omega}_2, \qquad \omega_2 = c\bar{\omega}_1 + d\bar{\omega}_2 \qquad (ad - bc = n).$$

Leurs invariants J et $\bar{J}$ sont liés par une équation modulaire

$$F_n(J, \bar{J}) = 0,$$

et les diverses valeurs de $\bar{J}$ fournies par cette équation correspondent aux diverses manières de déterminer a, b, c, d, sous la condition $ad - bc = n$.

Pour que $\bar{J}$ soit égal à J, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1};$$

d'où

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{m}, \qquad \bar{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{m},$$

m désignant une constante. On aura donc

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

et la fonction pu devra être l'une de celles qui admettent une multiplication complexe. De plus, D désignant le discriminant correspondant, on aura

$$n = x^2 + Dy^2 \qquad \text{ou} \qquad 4n = x'^2 + Dy'^2.$$

L'équation

$$F_n(J, J) = 0$$

se décomposera donc en facteurs rationnels, donnant respectivement les invariants J qui correspondent :

1° Aux multiplications complexes de la première sorte, pour les discriminants D qui satisfont à la relation

$$n = x^2 + Dy^2,$$

x, y étant des entiers premiers entre eux;

2° Aux multiplications complexes de la seconde sorte, pour les discriminants D qui satisfont à la relation

$$4n = x'^2 + Dy'^2,$$

x', y' étant impairs et premiers entre eux.

X. — Intégration des différentielles abéliennes de genre 1.

492. Considérons la différentielle abélienne

$$R(x, y)\,dx,$$

R désignant une fonction rationnelle et y étant lié à x par une équation algébrique

$$f(x, y) = 0.$$

Si l'on effectue une transformation birationnelle

$$x = \varphi(x', y'), \qquad y = \varphi_1(x', y').$$

l'équation $f = 0$ sera changée en une équation analogue

$$f(\varphi, \varphi_1) = f_1(x', y') = 0.$$

$R(x, y)$ deviendra une fonction rationnelle de x', y'; enfin

dx s'exprimera au moyen de x', y', dx' au moyen des relations

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy', \qquad 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy'.$$

La différentielle proposée est donc transformée en une autre, $R_1(x', y')\,dx'$, où la relation entre les variables sera

$$f_1(x', y') = 0.$$

Si $f(x, y) = 0$ représente une courbe de genre 1, la transformation pourra être choisie (t. I, n° 596) de telle sorte que la courbe transformée soit du troisième ordre.

On peut encore simplifier cette dernière équation par une suite de transformations homographiques. Par une première transformation, qui rejette à l'infini un des points d'inflexion, on la réduira à la forme

$$(ax + by)^3 + P_2 = 0,$$

P_2 étant du second degré. Un autre changement d'axe la réduira à

$$ax^3 + P_2 = 0.$$

Le polynôme P_2 contient un terme en y^2, car autrement la courbe serait unicursale. En changeant y en $y + \lambda x + \mu$, on fera disparaître les termes du premier degré en y; l'équation prendra la forme

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Enfin, changeant x en $\alpha x + \beta$, on pourra réduire A à 4, B à 0; appelant $-g_2$ et $-g_3$ les deux autres coefficients, nous aurons l'équation définitive

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Soit $\wp u$ la fonction elliptique construite avec les invariants g_2, g_3; cette équation équivaudra aux deux suivantes

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u.$$

Donc, *les coordonnées de toute courbe de genre* 1

peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un même paramètre.

493. Prenons ce paramètre u pour variable indépendante, la différentielle $R(x, y)\,dx$ se changera en

$$R(pu, p'u)p'u\,du.$$

Pour l'intégrer, décomposons la fonction $Rp'u$ en éléments simples. Le développement sera de la forme

$$\Sigma[A_0\zeta(u-a) + A_1\zeta'(u-a) + A_2\zeta''(u-a) + \ldots] + C,$$

avec la condition $\Sigma A_0 = 0$.

L'intégrale sera

$$\Sigma[A_0 \log\sigma(u-a) + A_1\zeta(u-a) - A_2 p(u-a) - \ldots] + Cu + C'.$$

Éliminons les quantités $\zeta(u-a)$ par la formule

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa}$$

et posons, pour abréger, $\Sigma A_1 = B$. L'intégrale deviendra

$$(1) \qquad \Sigma A_0 \log\sigma(u-a) + B\zeta u + Cu + \psi u,$$

ψu désignant une somme de termes doublement périodiques.

494. Cherchons à quelles conditions cette intégrale sera une fonction algébrique de x.

Il est nécessaire qu'elle n'ait qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de $x = pu$, et *a fortiori* pour chaque valeur de u. Or, pour une même valeur de u, chacun des logarithmes $\log\sigma(u-a)$ a une infinité de valeurs. Il faut donc que tous les coefficients A_0 soient nuls.

Cette première condition remplie, l'intégrale sera uniforme en u. Mais il faut de plus que, pour tous les systèmes de valeurs de la forme $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, qui n'altèrent pas pu, le nombre de ces valeurs soit limité.

Or, le changement de u en $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ augmente la valeur de l'intégrale de

$$(2B\eta_1 + 2C\omega_1)m_1 + (2B\eta_2 + 2C\omega_2)m_2,$$

expression qui prendrait une infinité de valeurs, si l'on n'avait pas

$$2B\eta_1 + 2C\omega_1 = 0, \qquad 2B\eta_2 + 2C\omega_2 = 0.$$

Comme le déterminant $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1$ est égal à $\frac{\pi i}{2}$, on en conclut ces nouvelles conditions

$$B = 0, \qquad C = 0.$$

Réciproquement, si les conditions trouvées ci-dessus sont remplies, l'intégrale sera doublement périodique; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen de $pu = x$ et de $p'u = y$, et sera algébrique en x.

495. Cherchons encore à quelles conditions les termes non elliptiques

$$(2) \qquad \Sigma A_0 \log\sigma(u-a) + B\zeta u + Cu$$

peuvent représenter le logarithme d'une fonction algébrique de x.

Il sera nécessaire que cette expression n'admette, aux multiples près de $2\pi i$, qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de x, et *a fortiori* pour chaque valeur de u. Or, pour une même valeur de u, $A_0 \log\sigma(u-a)$ a une infinité de valeurs, différant de multiples de $A_0 2\pi i$. Il faut donc tout d'abord que les coefficients A_0 soient rationnels.

Supposons qu'il en soit ainsi. Soit μ le plus petit multiple de leurs dénominateurs. L'expression (2) sera égale à $\frac{1}{\mu}\log F$, F désignant la fonction uniforme

$$e^{\mu(B\zeta u + Cu)}\,\Pi\,\sigma^{A_0\mu}(u-a),$$

laquelle ne devra prendre qu'un nombre limité de valeurs quand on change u en $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Or ce chan-

gement la reproduit au signe près, multipliée par une exponentielle, dont l'exposant est

$$\begin{aligned}&\mu B(2m_1\eta_1+2m_2\eta_2)+\mu C(2m_1\omega_1+2m_2\omega_2)\\&\qquad+(2m_1\eta_1+2m_2\eta_2)\,\Sigma A_0\mu(u-a+m_1\omega_1+m_2\omega_2).\end{aligned}$$

En remarquant que ΣA_0 est nul, cet exposant se réduit à

$$\begin{aligned}&[2\eta_1(B-\Sigma A_0 a)+2\omega_1 C]\mu m_1\\&+[2\eta_2(B-\Sigma A_0 a)+2\omega_2 C]\mu m_2,\end{aligned}$$

et, pour que l'exponentielle ait un nombre limité de valeurs, il faut et il suffit que les multiplicateurs de μm_1, μm_2 soient commensurables à $2\pi i$. On aura donc les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}2\eta_1(B-\Sigma A_0 a)+2\omega_1 C&=f_1 2\pi i,\\2\eta_2(B-\Sigma A_0 a)+2\omega_2 C&=f_2 2\pi i,\end{aligned}$$

f_1, f_2 étant rationnels, ou en résolvant, et remarquant que

$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=\dfrac{\pi i}{2}$,

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}B-\Sigma A_0 a&=-f_2 2\omega_1+f_1 2\omega_2,\\C&=\quad f_2 2\eta_1-f_1 2\eta_2.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, supposons ces conditions satisfaites; soit ν le plus petit multiple des dénominateurs de f_1, f_2 ; on aura

$$\frac{1}{\mu}\log F=\frac{1}{\mu\nu}\log F^\nu,$$

F^ν étant doublement périodique et pouvant, par conséquent, s'exprimer rationnellement en pu et $p'u$.

496. Les différentielles elliptiques

$$R(x,\sqrt{X})\,dx,$$

où X est un polynôme du quatrième degré

$$X=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4,$$

rentrent dans la classe considérée ci-dessus, car la courbe

$$y^2 = X$$

est de genre 1.

La représentation simultanée de x et de $y = \sqrt{X}$ par des fonctions elliptiques d'un même paramètre peut se réaliser comme il suit.

Nous pouvons écrire

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 z + \ldots + a_4 z^4,$$

z étant égal à 1 et n'étant introduit que pour l'homogénéité. Ce polynôme homogène admet les deux invariants

$$I_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$I_3 = a_0 a_2 a_4 - 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Posons $x = t - \dfrac{a_1}{a_0} z$; X se changera en un polynôme sans second terme

$$T = a_0 (t^4 + 6 \alpha_2 t^2 z^2 + 4 \alpha_3 t z^3 + \alpha_4 z^4),$$

et les invariants restent inaltérés; on aura donc

$$a_0^2 (\alpha_4 + 3 \alpha_2^2) = I_2,$$
$$a_0^3 (\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2) = I_3,$$

ce qu'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct. Remettant l'unité à la place de z, on aura

$$T = a_0 (t^4 + 6 \alpha_2 t^2 + 4 \alpha_3 t + \alpha_4)$$

et

$$y^2 - T = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut identifier cette dernière équation avec celle qui lie les deux fonctions elliptiques

$$f = \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \qquad \varphi = [pu - p(u+v)] \sqrt{a_0},$$

en déterminant convenablement la constante v et les invariants g_2 et g_3.

En effet, on a identiquement

$$(p u - p v) - [p(u+v) - p v] = \frac{\varphi}{\sqrt{a_0}},$$

et la formule d'addition donne, d'autre part,

$$p(u+v) + p u + p v = \frac{1}{4}\left(\frac{p' u - p' v}{p u - p v}\right)^2 = f^2$$

ou

$$(p u - p v) + [p(u+v) - p v] = f^2 - 3 p v.$$

On en conclut

$$\frac{\varphi^2}{a_0} = (f^2 - 3 p v)^2 - 4(p u - p v)[p(u+v) - p v].$$

Cela posé, la fonction

$$\xi = (p u - p v)[p(u+v) - p v]$$

admet les mêmes pôles o et $-v$ que la fonction f; ces pôles sont simples dans toutes deux, et pour u infiniment petit, on a

$$\begin{aligned}\xi &= \left(\frac{1}{u^2} - p v + \ldots\right)\left(u p' v + \frac{u^2}{2} p'' v + \ldots\right)\\ &= \frac{p' v}{u} + \tfrac{1}{2} p'' v + \ldots,\end{aligned}$$

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{2}{u^3} - p' v + \ldots}{\frac{1}{u^2} - p v + \ldots}\right) = -\frac{1}{u} + \ldots.$$

Donc

$$\xi + f p' v - \tfrac{1}{2} p'' v$$

est nul, car cette fonction elliptique, ayant perdu l'un des deux pôles o et $-v$, est une constante; de plus, elle s'annule pour $u = 0$.

On aura donc

$$\frac{\varphi^2}{a_0} = (f^2 - 3 p v)^2 + 4 f p' v - 2 p'' v$$

ou, en remplaçant $p''v$ par sa valeur en pv,

$$\varphi^2 = a_0(f^4 - 6f^2 pv + 4f p'v + g_2 - 3p^2 v).$$

Pour identifier les coefficients de ce polynôme avec ceux de T, il faudra poser

$$pv = -\alpha_2, \qquad p'v = \alpha_3, \qquad g_2 - 3p^2 v = \alpha_4,$$

d'où

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2 = \frac{I_2}{a_0^2},$$

$$g_3 = 4p^3 v - g_2 pv - p'^2 v = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2 = \frac{I_3}{a_0^3}.$$

Enfin, pv se déterminera par la relation

$$pv = -\alpha_2.$$

Celle-ci a, aux périodes près, deux solutions, auxquelles correspondent des valeurs égales et opposées de $p'v$. Il faut choisir celle pour laquelle $p'v = +\alpha_3$.

Les constantes g_2, g_3, v étant ainsi calculées, on satisfera identiquement à l'équation $y^2 = X$ en posant

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}, \\ y = \sqrt{X} = \pm\sqrt{a_0}\,[pu - p(u+v)], \end{cases}$$

le double signe pouvant être fixé arbitrairement.

Enfin, d'après une formule précédemment trouvée (352),

$$(5) \qquad dx = \tfrac{1}{2}\, d\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = [pu - p(u+v)]\,du.$$

On a obtenu ainsi tous les éléments nécessaires pour la transformation de la différentielle.

497. La fonction $\dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}$ étant du second ordre, à chaque valeur de x correspondent (aux périodes près) deux valeurs de u. Leur somme est égale à celle des pôles, qui est $-v$;

les valeurs correspondantes de y sont égales et contraires, car le changement de u en $-u-v$ change le signe de $pu - p(u+v)$. A chaque point (x, y) de la courbe $y^2 = X$ répond donc une seule valeur du paramètre u.

La fonction y s'annule pour les valeurs de u qui satisfont à la relation

$$u + v = -u + \text{période}$$

ou

$$u = -\frac{v}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Les valeurs correspondantes de x sont les racines de l'équation $X = 0$. Il suffira, pour les avoir, de donner à chacun des entiers m_1, m_2 les valeurs 0 et 1.

Nous obtenons ainsi une résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

498. *Équation différentielle d'Euler.* — Appliquons les formules précédentes à la transformation de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx}{y}.$$

Elle se réduira à

$$\pm \frac{du}{\sqrt{a_0}},$$

le signe $\pm$ restant à notre disposition.

Soient donc x, x_1 deux variables, liées par l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

X_1 étant un polynôme formé avec x_1 comme X l'est avec x. En posant

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \psi u,$$

$$x_1 = \psi u_1,$$

nous pourrons réduire cette équation à la forme

$$\frac{du}{\sqrt{a_0}} = \frac{du_1}{\sqrt{a_0}},$$

d'où

$$u_1 = u + c,$$

c désignant une constante. On aura donc

$$x = \psi(u), \qquad x_1 = \psi(u + c).$$

Ces deux fonctions elliptiques, d'ordre 2 et aux mêmes périodes, sont liées par une équation algébrique du second degré par rapport à chacune d'elles. Soit

$$F(x, x_1, c) = 0$$

cette équation. Elle sera évidemment symétrique par rapport à x et x_1, et sera équivalente à l'équation différentielle, sur laquelle on retombera en éliminant c entre $F = 0$ et sa dérivée.

499. Cette équation F peut être formée comme il suit :

Soit t une variable auxiliaire, liée à x par une équation algébrique du second degré par rapport à chaque variable. En ordonnant successivement par rapport à chacune d'elles, on pourra l'écrire ainsi

$$0 = \varphi(x, t) = At^2 + 2Bt + C = Mx^2 + 2Nx + P.$$

On en déduit

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = (Mx + N)\,dx + (At + B)\,dt$$

ou, en substituant pour x et t leurs valeurs

$$x = -\frac{N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}, \qquad t = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

$$\pm\sqrt{N^2 - MP}\,dx \pm \sqrt{B^2 - AC}\,dt = 0,$$

et enfin

$$\frac{dx}{\sqrt{B^2 - AC}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{N^2 - MP}}.$$

Soient x_1 la seconde racine de l'équation $\varphi(x, t) = 0$, et soient A_1, B_1, C_1 ce que deviennent les polynômes A, B, C quand on y change x en x_1; on aura de même

$$\frac{dx_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{N^2 - MP}};$$

on aura donc, en choisissant des déterminations convenables pour les deux radicaux $\sqrt{B^2 - AC}$, $\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}$,

$$(7) \qquad \frac{dx}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{dx_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}.$$

D'autre part, en éliminant t entre les deux équations

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \qquad A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1 = 0,$$

on obtiendra entre x et x_1 l'équation

$$(8) \qquad \left(\frac{2BB_1 - AC_1 - CA_1}{2}\right)^2 = (B^2 - AC)(B_1^2 - A_1 C_1).$$

Or A, B, C sont des polynômes en x du second degré. Si nous les déterminons de telle sorte que $B^2 - AC$ soit identique à X, l'équation différentielle (7) se confondra avec la proposée (6), et l'équation (8) représentera la relation algébrique entre x et x_1 [après suppression du facteur $(x - x_1)^2$ que nous mettrons tout à l'heure en évidence].

On pourra prendre pour B un polynôme arbitraire du second degré, pour A un des diviseurs quadratiques de $B^2 - X$ (lequel ne sera déterminé qu'à un facteur constant près); et pour C le quotient $\frac{B^2 - X}{A}$. Cette solution comporte en apparence quatre constantes arbitraires; mais il est aisé de voir que l'équation (8) ne dépendra, en réalité, que d'une seule combinaison de ces constantes.

En effet, le polynôme $\frac{2BB_1 - AC_1 - CA_1}{2}$ symétrique en x, x_1 sera de la forme

$$\alpha_{22}x^2x_1^2 + 2\alpha_{21}(x^2x_1 + xx_1^2)$$
$$+ \alpha_{20}(x^2 + x_1^2) + 4\alpha_{11}xx_1 + 2\alpha_{10}(x + x_1) + \alpha_{00}.$$

Mais, de plus, pour $x_1 = x$, il se réduit identiquement à

$$B^2 - AC = X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + \ldots;$$

d'où les relations

$$\alpha_{22} = a_0, \quad \alpha_{21} = a_1, \quad 2\alpha_{20} + 4\alpha_{11} = 6a_2, \quad \alpha_{10} = a_3, \quad \alpha_{00} = a_4.$$

Joignons-y celle-ci

$$\alpha_{20} = a_2 - 2\mu,$$

μ étant une nouvelle inconnue. Tous les coefficients α pourront s'exprimer au moyen de cette seule indéterminée, et l'on aura

$$\frac{2BB_1 - A_1C - AC_1}{2} = \Psi - 2\mu(x - x_1)^2,$$

Ψ désignant le polynôme

$$(9)\quad \begin{cases} \Psi = a_0x^2x_1^2 + 2a_1(x^2x_1 + xx_1^2) \\ \qquad + a_2(x^2 + x_1^2) + 4a_2xx_1 + 2a_3(x + x_1) + a_4. \end{cases}$$

La relation entre x et x_1 sera donc

$$(10)\qquad [\Psi - 2\mu(x - x_1)^2]^2 = XX_1$$

ou

$$\Psi^2 - XX_1 - 4\mu(x - x_1)^2\Psi + 4\mu^2(x - x_1)^4 = 0.$$

500. Il reste à y mettre en évidence le facteur $(x - x_1)^2$ Posons, à cet effet,

$$M = a_0x^2 + 2a_1x + a_2,$$
$$N = a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$
$$P = a_2x^2 + 2a_3x + a_4,$$

et soient M_1, N_1, P_1 les polynômes analogues en x_1. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\Psi &= M\,x_1^2 + 2N\,x_1 + P = M_1 x^2 + 2N_1 x + P_1,\\
X &= M\,x^2 + 2N\,x + P,\\
X_1 &= M_1 x_1^2 + 2N_1 x_1 + P_1;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Psi^2 - XX_1 = &\quad (Mx_1^2 + 2Nx_1 + P)(M_1 x^2 + 2N_1 x + P_1)\\
&- (Mx^2 + 2Nx + P)(M_1 x_1^2 + 2N_1 x_1 + P_1)\\
= (x - x_1)[&\ 2(NM_1 - N_1 M)xx_1\\
&+ (PM_1 - P_1 M)(x + x_1)\\
&+ 2(PN_1 - P_1 N)].
\end{aligned}$$

Or les déterminants $NM_1 - N_1 M$, $PM_1 - P_1 M$, $PN_1 - P_1 N$ sont évidemment encore divisibles par $x - x_1$; les quotients peuvent se calculer sans difficulté, et la relation entre x, x_1, débarrassée du facteur étranger $(x - x_1)^2$, prendra la forme définitive

$$\Pi - 4\mu\Psi + 4\mu^2(x - x_1)^2 = 0, \tag{11}$$

Π désignant le polynôme

$$\left\{\begin{aligned}
\Pi = &\ 4(a_0 a_2 - a_1^2)x^2 x_1^2 + 4(a_0 a_3 - a_1 a_2)(x + x_1)xx_1\\
&+ (a_0 a_4 - a_2^2)(x + x_1)^2 + 8(a_1 a_3 - a_2^2)xx_1\\
&+ 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)(x + x_1) + 4(a_2 a_4 - a_3^2).
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

501. L'équation (10), résolue par rapport à la constante μ, donnera cette relation sous la forme irrationnelle

$$\frac{\Psi \pm \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x - x_1)^2} = \mu. \tag{13}$$

Il reste à fixer le double signe. Nous allons établir que le signe — doit être rejeté.

Supposons, en effet, que x, x_1, partant d'une même valeur initiale a, varient de manière à conserver une valeur

constante à la fonction

$$F = \frac{\Psi - \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x-x_1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Pi}{\Psi + \sqrt{X}\sqrt{X_1}},$$

les radicaux $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$ ayant d'ailleurs la même détermination initiale.

On aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 = 0.$$

Cette équation sera applicable à l'origine, car en ce point F et ses dérivées partielles sont finies. D'ailleurs F est symétrique en x et x_1; on aura donc en ce point $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, et, par suite, $dx = -dx_1$. L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

donnerait, au contraire, $dx = dx_1$.

L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

entraîne donc la suivante

$$\frac{\Psi + \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x-x_1)^2} = \text{const.},$$

où les radicaux $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$ ont la même détermination que dans l'équation différentielle.

502. *Polygones de Poncelet.* — Soit C une conique; les coordonnées de ses points pourront s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre x. Soit C′ une seconde conique, donnée en coordonnées tangentielles. Les coordonnées de ses tangentes pourront s'exprimer rationnellement par un autre paramètre t.

La condition pour qu'un point x se trouve sur une tangente t sera exprimée par une équation algébrique

$$F(x, t) = 0$$

du second degré par rapport à chacune des variables, car chaque tangente t coupe C en deux points et réciproquement, de chaque point x, on peut mener deux tangentes à C'.

Soit

$$F(x, t) = A t^2 + 2B t + C = 0,$$

et posons $B^2 - AC = X$; soient x_0, x_1 les deux racines de cette équation; on aura, comme nous l'avons vu,

$$(14) \qquad \frac{dx_0}{\sqrt{X_0}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Posons, comme au nº **496**,

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

On pourra se servir pour caractériser les points de la courbe C du nouvel argument u. A chaque point correspondent, aux périodes près, deux valeurs u et $-u-v$ de cet argument. A ces deux arguments correspondent deux valeurs de $\frac{dx}{du}$ égales et contraires et qui représentent les deux déterminations du radical $\sqrt{\frac{X}{a_0}}$.

Soient u_0 l'un des arguments correspondants au point x_0, u_1 l'un de ceux qui correspondent à x_1; on pourra choisir ce dernier de telle sorte que l'équation (14) se réduise à

$$du_0 = +du_1, \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = u_0 + c,$$

c désignant une constante.

Cela posé, par un point x_0 de la conique C menons une tangente t_0 à C'; elle coupera C en un second point x_1. De ce point menons la seconde tangente t_1 à C'; elle coupera C en un nouveau point x_2, duquel nous mènerons une nouvelle tangente t_2 et ainsi de suite. Cherchons à quelles con-

ditions ce polygone de tangentes se fermera au bout de n opérations.

Il faut pour cela que le point x_n se confonde avec x_0. Or les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ admettent respectivement pour l'un de leurs arguments elliptiques $u_0, u_0 + c, \ldots, u_0 + nc$. Ce dernier doit se confondre avec l'un des deux arguments elliptiques u_0 ou $-u_0 - v$ du point x_0. Nous devrons donc avoir

$$u_0 + nc = u_0 + \text{période}$$

ou

$$u_0 + nc = -u_0 - v + \text{période}.$$

La première relation sera satisfaite si c est un $n^{\text{ième}}$ de période. Il est remarquable que cette condition ne dépende pas du choix du point x_0.

La seconde relation est satisfaite pour les quatre systèmes de valeurs

$$u_0 \equiv \frac{-v - nc}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \qquad (m_1 = 0, 1,\ m_2 = 0, 1).$$

Mais il est aisé de voir que, si elle est remplie, les tangentes ne forment pas un véritable polygone, mais une ligne polygonale décrite d'abord dans un sens, puis dans l'autre.

En effet, l'égalité

$$u_0 + nc = -u_0 - v + \text{période},$$

de laquelle résulte la coïncidence des points x_0, x_n peut s'écrire ainsi

$$u_0 + (n-k)c = -(u_0 + kc) - v + \text{période}$$

et montre que x_k coïncide avec x_{n-k}. La tangente t_k qui joint les points x_k, x_{k+1} coïncidera de même avec t_{n-k-1} qui joint x_{n-k-1} à x_{n-k}.

Deux cas seront à distinguer suivant que n est pair ou impair.

Soit $n = 2m$. Les tangentes t_{m-1} et t_m coïncideront. Or ce sont les deux tangentes menées à C′ par le point x_m; ce

point sera donc sur C′, et sera l'un des quatre points d'intersection de C′ et de C.

Soit $n = 2m + 1$; les points x_m, x_{m+1} coïncident. Or ce sont les points d'intersection de t_m avec C. Donc t_m est l'une des quatre tangentes communes à C et à C′.

503. *Cubiques planes.* — Nous avons vu que ces courbes sont les transformées homographiques de la courbe particulière

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u,$$

sur laquelle il sera commode de faire l'étude de leurs propriétés projectives.

A chaque point de cette courbe correspond (aux périodes près) une seule valeur de u qui le caractérise.

Une courbe de degré n,

$$F(x, y) = 0,$$

coupe la proposée aux points dont les arguments sont les zéros de la fonction elliptique

$$F(\wp u, \wp' u) = 0.$$

Celle-ci n'a qu'un pôle, $u = 0$, d'ordre $3n$; elle a donc $3n$ zéros, dont la somme est une période. Cette remarque est féconde en conséquences.

Ainsi, pour que trois points u_1, u_2, u_3 soient en ligne droite, il faut que l'on ait

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car la droite qui joint les points u_1, u_2 coupe la cubique en un troisième point, qui ne pourra être que u_3. De même, pour que six points $u_1, \ldots, u_6$ soient sur une conique, il faut et il suffit qu'on ait

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \equiv 0.$$

Le point de contact U d'une tangente menée à la courbe

par un de ses points u sera fourni par l'équation

$$u + 2U \equiv 0,$$

d'où

$$U \equiv -\frac{u}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \qquad (m_1 = 0, 1, \; m_2 = 0, 1).$$

Il y a donc quatre tangentes.

Soient u_1, u_2, u_3 et u'_1, u'_2, u'_3 les points de rencontre de la courbe avec deux droites arbitraires; joignons $u'_1 u_1$, $u'_2 u_2$, $u'_3 u_3$. Ces droites rencontreront la cubique en trois nouveaux points u''_1, u''_2, u''_3 qui seront en ligne droite. En effet, des équations

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0, \qquad u'_1 + u'_2 + u'_3 \equiv 0,$$

$$u_1 + u'_1 + u''_1 \equiv 0, \qquad u_2 + u'_2 + u''_2 \equiv 0, \qquad u_3 + u'_3 + u''_3 \equiv 0,$$

on déduit

$$u''_1 + u''_2 + u''_3 \equiv 0.$$

La tangente en un point d'inflexion u coupe la courbe en trois points confondus en u; on aura donc

$$3u \equiv 0,$$

d'où

$$u \equiv \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3},$$

m_1, m_2 pouvant varier chacun de 0 à 2. Nous aurons donc 9 points d'inflexion, que nous représenterons commodément par la notation

$$u = (m_1 m_2) \qquad (m_1 = 0, 1, 2, \; m_2 = 0, 1, 2).$$

La droite qui joint deux points d'inflexion $(m_1 m_2)$, $(m'_1 m'_2)$ passera évidemment par le troisième point d'inflexion $(m''_1 m''_2)$, m''_1, m''_2 étant définis par les relations

$$m_1 + m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m_2 + m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3).$$

On obtient ainsi 12 droites

$$\begin{array}{lll}
(00)\,(01)\,(02), & (10)\,(11)\,(12), & (20)\,(21)\,(22),\\
(00)\,(10)\,(20), & (01)\,(11)\,(21), & (02)\,(12)\,(22),\\
(00)\,(11)\,(22), & (01)\,(12)\,(20), & (02)\,(10)\,(21),\\
(00)\,(12)\,(21), & (10)\,(22)\,(01), & (20)\,(02)\,(11),
\end{array}$$

formant quatre triangles, dont chacun contient tous les points d'inflexion.

L'équation du neuvième degré dont dépendent les points d'inflexion se résout par radicaux; car les triangles dépendent d'une équation du quatrième degré. L'un d'eux étant connu, ses côtés dépendront d'une équation du troisième degré. Ceux-ci trouvés, leurs intersections avec la cubique dépendront de nouvelles équations du troisième degré.

Les tangentes à la courbe menées par les points d'inflexion (autres que les tangentes d'inflexion) la couperont aux points dont l'argument est un sixième de période sans être en même temps un tiers de période. Ces points, au nombre de 27, seront ceux où il existe une conique (ne dégénérant pas en une droite double) qui coupe la courbe en six points coïncidents; etc.

504. On obtient des résultats analogues pour les courbes gauches, intersection de deux surfaces du second degré. On vérifie en effet facilement qu'elles sont les transformées homographiques de la courbe

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u, \qquad z = \wp'' u.$$

Elles sont coupées par une surface algébrique d'ordre n, $F(x, y, z) = 0$ en $4n$ points, tels que la somme de leurs arguments soit une période.

CHAPITRE VII.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — Surfaces de Riemann.

505. Soit u une fonction algébrique de z, définie par une équation irréductible de degré n

$$f(z, u) = 0.$$

Nous admettrons que la courbe $f = 0$ n'ait que des points multiples à tangentes séparées. S'il en était autrement, il nous faudrait opérer sur les variables z, u une transformation birationnelle telle que la courbe transformée jouisse de cette propriété.

En opérant encore, s'il est nécessaire, une transformation homographique, nous pourrons faire en sorte : 1° que la courbe f n'ait pas de point multiple à l'infini ; 2° que l'axe des u ne soit parallèle ni aux asymptotes de f, ni aux tangentes qui passent par les points multiples, ni aux tangentes d'inflexion.

Le nombre des points de f où la tangente est parallèle aux u sera égal à la classe ν de la courbe. Ces points seront des branchements, où deux valeurs de u deviennent égales. Aux points multiples, l'équation en u a aussi des racines égales; mais, en vertu des hypothèses faites, chacune des branches de la fonction u restera monodrome aux environs de ces points.

A partir de chacun des ν branchements, traçons une coupure s'étendant jusqu'à l'infini, et ne passant pas par les

points multiples. Dans le plan ainsi coupé, chacune des branches $u_1, \ldots, u_n$ de la fonction u sera monodrome; mais, si l'on traverse une coupure, deux de ces branches, u_i et u_k par exemple, seront permutées entre elles. Pour exprimer cette propriété, nous dirons que la coupure en question a le caractère (ik).

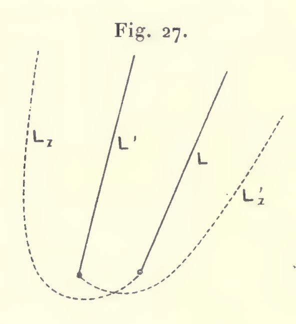
Soient $L_1, \ldots, L_\nu$ les diverses coupures, écrites dans l'ordre où se succèdent leurs points d'intersection avec un cercle de rayon infini, décrit dans le sens direct. La loi de permutation des branches $u_1, \ldots, u_n$ sera entièrement définie lorsque l'on connaîtra le tableau

$$T = (i_1 k_1)(i_2 k_2)\ldots(i_\nu k_\nu)$$

des caractères de ces coupures.

506. En changeant le tracé des coupures (*fig.* 27), on pourra modifier ce tableau. Soient, en effet, L, L' deux coupures consécutives; (ik), $(i'k')$ leurs caractères. Nous dirons que nous faisons *reculer* la coupure L par rapport à L' si nous lui donnons le nouveau tracé L_1 marqué en pointillé sur la *fig.* 27. La permutation entre les deux branches u_i,

Fig. 27.



u_k, qui se faisait le long de L, se trouve reportée le long de L_1. Dans la région du plan coupé comprise entre ces deux lignes, les branches primitivement dénommées u_i, u_k s'appelleront maintenant u_k, u_i, et les autres garderont leur dénomination. Le caractère de L' restera donc inaltéré si les

couples d'indices (i, k), (i', k') sont identiques ou complètement différents; mais, s'ils ont un seul indice commun $i'=i$, le caractère de L', qui était primitivement (ik'), se trouvera changé en (kk').

Supposons, au contraire, que, laissant la coupure L immobile, nous fassions *avancer* L' de manière à lui donner le nouveau tracé L'_1. On verra de la même manière que le caractère de L restera inaltéré après ce changement si i, k, i', k' sont différents, ou si $i'=i$, $k'=k$. Mais si $i'=i$ et $k' \gtrless k$, ce caractère, primitivement égal à (ik), sera changé en (kk').

Nous voyons donc qu'en déplaçant les coupures, nous pouvons intervertir l'ordre de deux caractères consécutifs du tableau T, à la condition, s'ils ont un indice commun, de remplacer cet indice dans l'un des deux caractères (choisi à volonté) par celui qui lui est associé dans l'autre caractère.

507. M. Lüroth a montré que, par une suite d'opérations de ce genre, on peut ramener le tableau T à une forme canonique très simple.

Partageons les caractères en deux classes, suivant qu'ils contiennent ou non l'indice 1. Il existera nécessairement des caractères de la première classe; car l'équation $f=0$ étant irréductible, on doit pouvoir passer de la branche u_1 aux autres branches (303). S'il existe aussi des caractères de la seconde classe, on pourra les faire passer en queue du tableau en les permutant avec les précédents; ceux-ci pourront être modifiés, mais en restant de première classe. Après cette première opération, on aura

$$T = P_1 T_1,$$

P_1 étant un produit de caractères de première classe, T_1 un produit de caractères de seconde classe.

Si tous les caractères du produit P_1 ne sont pas identiques, il contiendra deux caractères consécutifs différents $(1i)(1k)$, dont le produit pourra être transformé en $(1k)(ki)$. Nous avons fait ainsi apparaître un nouveau

caractère de seconde classe (ki), que nous amènerons à la queue de P_1 pour le réunir à T_1. Nous pourrons ainsi réduire successivement le nombre des facteurs de P_1 jusqu'à ce qu'ils soient tous égaux.

Supposons qu'on ait à ce moment

$$P_1 = (12)^{\lambda_1}, \qquad T = (12)^{\lambda_1} T_1$$

et que n soit > 2. Si $\lambda_1 > 2$, on pourra le réduire de deux unités. En effet, pour qu'on puisse passer de l'une des branches u_1, u_2 à l'une des autres branches $u_3, \ldots$, il faut que T_1 contienne un caractère au moins, tel que (23), où figure l'indice 2. Amenons-le en tête de T_1; T commencera par le produit $(12)^{\lambda_1}(23)$, qu'on peut transformer successivement dans les suivants :

$$\begin{array}{ll}
(12)^{\lambda_1-1}(23)(13), & (12)^{\lambda_1-2}(23)(13)^2, \\
(12)^{\lambda_1-2}(13)(12)(13), & (12)^{\lambda_1-2}(13)^2(23), \\
(12)^{\lambda_1-3}(23)(12)(13)(23), & (12)^{\lambda_1-3}(23)^2(12)(23), \\
(12)^{\lambda_1-3}(23)(13)(23)^2, & (12)^{\lambda_1-2}(23)^3.
\end{array}$$

En répétant au besoin cette opération, on amènera λ_1 à ne pas surpasser 2.

Cela fait, opérons sur le produit T_1 comme nous l'avons fait sur T; on pourra le mettre sous la forme

$$T_1 = (23)^{\lambda_2} T_2,$$

T_2 étant un produit de caractères où ne figure plus l'indice 2, et λ_2 étant au plus égal à 2 (si $n - 1 > 2$). Continuant ainsi, nous aurons finalement

$$T = (12)^{\lambda_1}(23)^{\lambda_2} \ldots (n-1, n)^{\lambda_{n-1}},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ étant des entiers positifs, dont le dernier seul peut surpasser 2.

Ces entiers sont pairs; car si λ_2, par exemple, était impair, en décrivant un cercle de rayon infini avec la détermination initiale u_3, on obtiendrait comme valeur finale u_2. L'infini

serait donc un branchement, contrairement à nos hypothèses.

On aura donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-2} = 2, \qquad \lambda_{n-1} = \nu - 2(n-2) = 2p + 2,$$

p désignant le genre de la courbe f (t. I, n° 586).

508. Concevons, avec Riemann, un système de n feuillets plans $P_1, \ldots, P_n$ étendus sur le plan P des z; chacun de ces feuillets, tel que P_i, étant d'ailleurs coupé suivant celles des lignes $L_1, \ldots, L_\nu$ dans le caractère desquelles figure l'indice i.

Une quelconque de ces lignes, L, ayant pour caractère (ik), sera une coupure pour les deux feuillets P_i, P_k. Imaginons qu'on soude chacun des bords de la coupure pratiquée sur P_i avec le bord opposé de la coupure faite sur P_k. Si nous opérons de même pour chacune des lignes $L_1, \ldots, L_\nu$, toutes ces soudures auront pour résultat de réunir nos n feuillets en une surface unique S.

A chaque point (z, u_i) de la courbe $f(z, u) = 0$, faisons correspondre sur S un point ζ ayant pour projection z et situé sur le feuillet P_i. Si le point (z, u_i) se déplace sur f d'une manière continue, le point ζ décrira sur S une ligne continue; car une discontinuité ne pourrait se produire dans cette trajectoire que, si z traversant une coupure, u_i se trouvait changé en une autre branche u_k; mais ζ passe alors du feuillet P_i sur le feuillet P_k et, ces deux feuillets étant soudés le long de la coupure, la continuité est maintenue.

La variation simultanée des deux quantités z, u (liées par l'équation $f = 0$) est donc figurée sans ambiguïté par le déplacement de ζ sur la surface S; et si ζ décrit un contour fermé, z et u reprendront au retour leur valeur primitive.

La variable ζ étant constamment égale à z en valeur numérique, nous pourrons l'appeler dorénavant z; comme elle ne parcourt plus le plan simple, mais la surface de Riemann, il ne suffira plus, pour qu'elle décrive un contour fermé, qu'elle

revienne à sa valeur primitive ; il faudra, de plus, qu'elle se trouve au retour sur le même feuillet qu'au départ.

509. Les points de la surface S correspondent uniformément aux cycles de la courbe f.

En effet, considérons d'abord un point (z_0, u_{0i}), qui soit simple sur la courbe f. C'est l'origine d'un cycle unique, ayant pour équations

$$(1)\qquad z = z_0 + t, \qquad u = u_{0i} + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots,$$

si la tangente n'est pas parallèle aux u, ou

$$(2)\qquad z = z_0 + t^2, \qquad u = u_{0i} + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

dans le cas contraire. D'autre part, ce point correspond à un point unique de la surface S.

Considérons maintenant un point multiple, où se croisent μ branches, telles que $u_1, \ldots, u_\mu$. Il sera l'origine de μ cycles, de la forme (1), représentant chacun l'une de ces branches aux environs du point multiple. D'autre part, il correspond à μ points de S, respectivement situés sur les feuillets $P_1, \ldots, P_\mu$, qui ne sont pas soudés entre eux en ce point.

Enfin la courbe f a n cycles dont l'origine est à l'infini, et dont les équations ont la forme

$$(3)\qquad z = \frac{1}{t}, \qquad u = \frac{\alpha}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots.$$

Nous les regarderons comme correspondant à autant de points situés à l'infini sur la surface S.

510. Une portion finie s de la surface S, bornée par un ou plusieurs contours fermés, est dite *connexe*, s'il est possible de réunir deux quelconques de ses points par une ligne continue entièrement située sur s.

La connexité sera *simple*, si toute transversale ab tracée à l'intérieur de s, entre deux points de sa frontière (et de manière à ne pas se couper elle-même), partage s en deux

régions distinctes, de telle sorte que, pour passer de l'une à l'autre, il faille nécessairement sortir de s ou traverser ab. Elle sera *double*, si, en coupant s par une transversale t_1 convenablement choisie, la nouvelle surface s_1 ainsi obtenue est simplement connexe. Généralement, elle sera d'ordre N, si une coupure, faite suivant une transversale convenable t_1, transforme s en une surface de connexité $N - 1$.

D'après cette définition, si s est connexe d'ordre N, on pourra la transformer en une surface simplement connexe, en la coupant successivement par $N - 1$ transversales, dont chacune ait ses extrémités, soit sur la frontière de s, soit sur une des transversales précédentes, mais n'ait aucun autre point commun avec ces lignes, et ne se coupe pas elle-même.

511. Lemme. — *Les deux régions s_1, s_2, dans lesquelles une surface simplement connexe s est partagée par une transversale ab, sont elles-mêmes simplement connexes.*

Coupons, en effet, s_1 par une transversale cd; trois cas peuvent se présenter :

1° Si c et d sont sur la frontière de s, cd sera une transversale sur s, qu'elle partagera en deux régions séparées. On ne pourra donc passer d'un côté à l'autre de cette ligne, en restant sur s, et, *a fortiori*, en restant sur s_1, sans la traverser;

2° Si c est sur la frontière de s, et d sur la première transversale ab, la ligne cdb sera une transversale de s. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra donc nécessairement, ou sortir de s, et par suite de s_1, ou traverser cdb. Mais, en traversant db, qui fait partie de la frontière de s_1, on sortirait de s_1. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra donc nécessairement traverser cette ligne, ou sortir de s_1.

3° Si c et d sont tous deux sur ab, la ligne $acdb$ sera une transversale sur s. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra ou sortir de s, et par suite de s_1, ou traverser $acdb$.

Or, en traversant ac ou db, on sortirait de s_1. Il faudra donc, ou sortir de s_1, ou traverser cd.

512. Théorème. — *Coupons une surface s, de connexité* N, *par* μ *transversales successives; soient* $s_1, \ldots, s_m$ *les régions distinctes en lesquelles elle se trouve partagée;* $N_1, \ldots, N_m$ *leurs connexités respectives. Nous aurons la relation*

$$\sum_1^m (N_i - 2) + \mu = N - 2. \tag{4}$$

On peut, en effet, en coupant la surface s_i par $N_i - 1$ transversales convenablement choisies, la changer en une surface σ_i simplement connexe. Opérant de même sur chacune des surfaces $s_1, \ldots, s_m$, on voit que, par un système de $\mu + \sum_1^m (N_i - 1)$ transversales successives $\theta_1, \theta_2, \ldots$, on a décomposé s en régions simplement connexes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

On peut, d'autre part, tracer sur s un second système de $N - 1$ transversales $t_1, t_2, \ldots$, qui la transforme en une surface σ simplement connexe.

Une surface simplement connexe restant évidemment telle, si l'on déplace infiniment peu une portion de sa frontière, nous pourrons, en modifiant légèrement, s'il y a lieu, le tracé des deux systèmes de transversales, faire en sorte qu'ils ne se coupent qu'en un nombre fini de points. Soit δ le nombre de ces points. Ils partagent les transversales $\theta_1, \theta_2, \ldots$ du premier système en $\mu + \sum_1^m (N_i - 1) + \delta$ tronçons et celles du second système $t_1, t_2, \ldots$ en $N - 1 + \delta$ tronçons.

Cela posé, cherchons en combien de régions distinctes s sera partagé par l'ensemble des lignes $t_1, t_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$. Traçons d'abord les lignes $t_1, t_2, \ldots$; nous obtiendrons une seule région simplement connexe σ. Traçons maintenant successivement les divers tronçons de θ_1, puis ceux de $\theta_2, \ldots$; chacun d'eux sera une transversale pour une des régions préexistantes, qu'il partagera en deux. Le nombre final des

régions sera donc

$$1 + \mu + \sum_1^m (N_i - 1) + \delta.$$

Supposons, au contraire, qu'on ait commencé par tracer les lignes $\theta_1, \theta_2, \ldots$. Nous aurons à ce moment m régions simplement connexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Traçons successivement les divers tronçons de t_1, puis ceux de t_2, etc. Chacun d'eux partageant en deux parties une des régions préexistantes, le nombre final des régions sera

$$m + N - 1 + \delta.$$

En égalant cette expression à la précédente, on obtient la formule (4).

513. Deux cas particuliers de cette formule méritent d'être signalés :

1° Si $m = 1$, elle se réduit à

$$N_1 = N - \mu.$$

Donc, *en coupant une surface s par μ transversales successives quelconques qui ne la partagent pas en régions séparées, on réduit de μ son ordre de connexité.*

Si, en outre, $N_1 = 1$, il vient $\mu = N - 1$.

Donc *le nombre des transversales nécessaires pour rendre s simplement connexe est indépendant du tracé de ces transversales.*

2° Si $N_1, \ldots, N_m$ sont tous égaux à l'unité, la formule se réduit à

$$\mu - m = N - 2, \tag{5}$$

et fournira N, si l'on connaît μ et m.

514. Théorème. — *Supposons :*

1° *Que la surface s soit bornée par λ contours fermés distincts* $A_1, \ldots, A_\lambda$;

2° *Qu'on puisse, sans détruire sa connexité, la couper*

suivant p contours fermés $C_1, \ldots, C_p$ *qui ne se traversent pas mutuellement;*

3° *Que l'adjonction d'un nouveau contour quelconque* C_{p+1} *ne traversant pas les précédents détruise la connexité.*

L'ordre de connexité de s sera $\lambda + 2p$.

Soit, en effet, s' la surface obtenue en coupant s suivant $C_1, \ldots, C_p$. Elle est encore connexe. Soient donc γ_1 un point de C_1; γ'_1, γ''_1 deux points infiniment voisins de γ_1, situés de part et d'autre de C_1. On pourra les réunir par une ligne Δ, tracée sur s'. Lorsque γ'_1, γ''_1 viendront se confondre avec γ_1, Δ deviendra un contour fermé D_1, qui traverse C_1 en un seul point γ_1.

Coupons s' suivant D_1. La nouvelle surface s'_1 ainsi obtenue sera encore connexe, car on peut passer d'un côté à l'autre de D_1 en suivant le contour C_1. On pourra de même tracer sur s'_1 un contour fermé D_2 traversant C_2 en un seul point γ_2; et en coupant s'_1 suivant D_2, on obtiendra une surface connexe s'_2. Continuant ainsi, on arrivera à une surface connexe s'' obtenue en coupant s suivant les $2p$ contours C_1, D_1; C_2, D_2; ...; C_p, D_p. Cette nouvelle surface sera limitée par $\lambda + p$ contours fermés, à savoir :

Les λ contours $A_1, \ldots, A_\lambda$;

Les p contours $R_1 = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}, \ldots, R_p = C_p D_p C_p^{-1} D_p^{-1}$ obtenus respectivement en suivant : 1° l'un des bords de la coupure C_i; 2° l'un des bords de la coupure D_i; puis, dans le sens inverse; 3° le second bord de C_i; 4° le second bord de D_i.

Nous donnons le nom de *rétrosections* à ces contours $R_1, \ldots, R_p$.

515. Soit maintenant ω un point quelconque de s''; joignons-le :

1° Aux contours $A_1, \ldots, A_\lambda$ par des lignes $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\lambda$;

2° Aux points $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ par des lignes $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p$.

Si nous coupons s'' suivant les lignes $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\lambda, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, nous obtiendrons une surface s''', bornée par un seul contour fermé Q qui résulte de la succession des lacets $\mathcal{L}_1 A_1 \mathcal{L}_1^{-1}, \ldots, \mathfrak{M}_1 R_1 \mathfrak{M}_1^{-1}, \ldots$. Cette surface sera encore connexe, car on peut passer d'un bord à l'autre d'une des sections $\mathcal{L}_i$ ou $\mathfrak{M}_i$ en suivant le contour A_i ou R_i.

D'ailleurs s''' sera simplement connexe. Supposons, en effet, qu'on pût la couper par une transversale $\delta\varepsilon$ sans détruire sa connexité. Soient β un point de la transversale; β', β'' deux points infiniment voisins de β, situés de part et d'autre de $\delta\varepsilon$; on pourrait les joindre par une ligne Γ située sur s'''. Lorsque β', β'' se confondront avec β, Γ deviendra un contour fermé C_{p+1}, lequel ne coupe pas $C_1, \ldots, C_p$. Il devrait donc, d'après l'hypothèse, partager s''' en deux régions distinctes, ce qui n'est pas, car on peut passer d'un bord à l'autre de la ligne C_{p+1} en suivant la ligne $\beta\delta$, puis la portion de Q comprise entre les points δ et ε, et enfin la ligne $\varepsilon\beta$.

516. Cela posé, pour passer de la surface s à la surface simplement connexe s''', il suffit d'y tracer les $\lambda + 2p - 1$ transversales successives

$$(6) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots, \mathcal{L}_\lambda, & \mathfrak{M}_1 C_1 \mathfrak{M}_1^{-1}, \ \ldots, \ \mathfrak{M}_p C_p \mathfrak{M}_p^{-1}, \\ & D_1, \qquad \ldots, \qquad D_p. \end{cases}$$

Donc l'ordre de connexité de s est bien $\lambda + 2p$.

Nous désignerons sous le nom de *système canonique* le système particulier de transversales (6) auquel nous venons d'arriver.

517. Nous dirons que deux lignes Λ, Λ', tracées entre deux points O et z de la surface s, sont *équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue (sans sortir de s).

La ligne Λ' est évidemment équivalente à la succession du contour fermé $\Lambda'\Lambda^{-1}$ et de la ligne Λ. Elle sera donc équivalente à Λ, si le contour $\Lambda'\Lambda^{-1}$ peut se réduire à un simple

point par une déformation continue, auquel cas nous dirons que ce contour est *équivalent à zéro*.

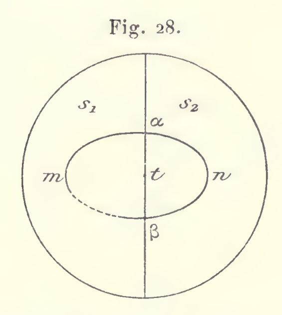
518. Théorème. — *Tout contour fermé* Γ *tracé sur une surface s à connexité simple, est équivalent à zéro.*

En effet, coupons la surface par une transversale t; elle la partage en deux régions distinctes, s_1 et s_2. Nous allons montrer que ce théorème est vrai pour s, s'il l'est pour s_1 et pour s_2.

Nous pouvons admettre que Γ ne traverse t qu'en un nombre fini de points, car nous pourrions au besoin substituer à Γ un contour polygonal infiniment voisin, et prendre aussi une transversale polygonale.

Soient α, β (*fig.* 28) deux points d'intersection consécutifs de Γ avec t. Le contour $\Gamma = m\alpha n\beta m$ équivaut évidem-

Fig. 28.



ment à $m\alpha n\beta.\beta\alpha.\alpha\beta.\beta m$, et, comme la portion $\alpha n\beta.\beta\alpha$, entièrement située sur s_2, est équivalente à zéro, C équivaut à $m\alpha\beta m$. Dans ce nouveau contour, le nombre des points d'intersection avec t est réduit de deux unités.

Par une suite de réductions de ce genre, on peut ramener le nombre des intersections à être < 2. Mais on ne peut passer de la région s_1 à la région s_2, ou réciproquement (en restant sur s) sans traverser t. Le nombre des intersections doit donc être pair pour que le contour se ferme. Il sera donc nul, et le contour considéré, étant entièrement situé dans la région s_1, sera équivalent à zéro.

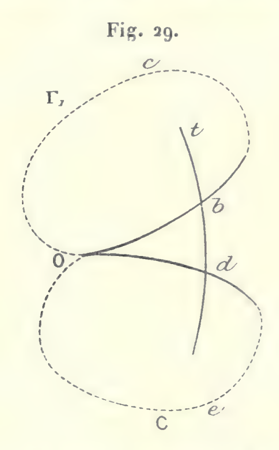
Nous pouvons subdiviser de même chacune des régions s_1, s_2 par une nouvelle transversale, et ainsi de suite, et ramener ainsi la démonstration du théorème au cas d'une région infiniment petite, pour laquelle il devient évident.

519. Théorème. — *Tout contour fermé tracé sur une surface s, de connexité* N, *à partir d'un de ses points* O, *équivaut à une combinaison de* $N-1$ *contours déterminés* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{N-1}$ *décrits successivement, une ou plusieurs fois chacun, dans un sens ou dans l'autre.*

Traçons, en effet, sur s une transversale t, qui la transforme en une surface s_1, $N-1$ fois connexe.

Soient b', b'' deux points situés en regard l'un de l'autre sur les deux bords de la coupure t. On pourra les joindre au point O par des lignes tracées sur s_1. La réunion de ces deux figures constituera un contour $\Gamma_1 = ObcO$ (*fig.* 29) tracé sur s et traversant t en un seul point $b' = b'' = b$.

Fig. 29.



Soit $C = OdeO$ un autre contour fermé partant de O. Supposons qu'il traverse la ligne t en m points. Soit d le premier de ces points d'intersection. Le contour C équivaut évidemment au suivant

$$Od.db.bO.Ob.bcO.Ocb.bd.deO,$$

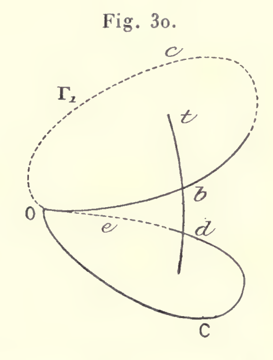
lequel est la combinaison de trois contours successifs : le premier, $OdbO$, ne traverse pas t; le second, $ObcO$, n'est autre que Γ_1; et le troisième, $OcbdeO = C'$, ne traverse plus t qu'en $m - 1$ points, car il a cessé de la traverser au point d.

Nous avons supposé, dans la figure précédente, que la ligne $C = OdeO$ franchissait la transversale de gauche à droite, comme la ligne Obc. Si elle la franchissait dans le sens contraire, comme dans la *fig.* 30, C serait équivalent à

$$OdbcOcbObdeO.$$

Ce nouveau contour se compose de trois contours partiels : le premier, $OdbcO = C'$, ne traverse plus t; le second, $OcbO$, n'est autre que Γ_1^{-1}; le dernier, $ObdeO$, ne coupe plus la transversale qu'en $m - 1$ points.

Fig. 30.



On verra de même que C' équivaut à la succession de trois contours, le premier ne traversant plus t; le second étant Γ_1 ou Γ_1^{-1}, et le troisième ne traversant plus t qu'en $m - 2$ points.

Donc, en dernière analyse, C équivaudra à une combinaison des contours Γ_1 et Γ_1^{-1} avec d'autres contours, lesquels, ne traversant plus t, seront situés sur s_1.

520. Coupons s_1 par une seconde transversale t_1, qui la transforme en une surface s_2 de connexité $N - 2$. On pourra

de même tracer sur s_1, à partir du point O, un contour fermé Γ_2, qui ne traverse t_1 qu'en un seul point; et l'on montrera que tout contour tracé sur s_1 équivaut à une combinaison des contours Γ_2 et Γ_2^{-1} avec des contours tracés sur s_2.

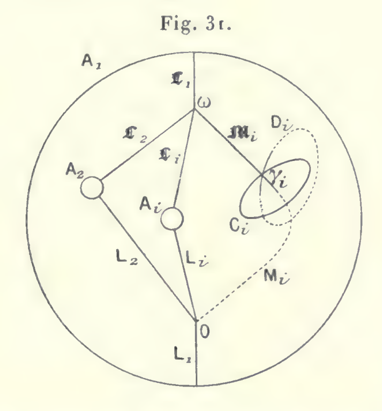
On poursuivra cette réduction jusqu'à ce qu'on arrive à une surface simplement connexe s_{N-1}. Les contours tracés sur celle-ci étant équivalents à zéro, on voit finalement que tout contour C tracé sur s se réduit à une combinaison des contours

$$\Gamma_1, \Gamma_1^{-1}, \ldots \Gamma_{N-1}, \Gamma_{N-1}^{-1},$$

Γ_i désignant un contour qui traverse en un seul point la transversale t_i, sans traverser les précédentes.

521. Soient (*fig.* 31)

Fig. 31.



$A_1, \ldots, A_\lambda$ les contours fermés qui limitent s;

$R_1 = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}, \ldots, R_p = C_p D_p C_p^{-1} D_p^{-1}$ les rétrosections que l'on peut tracer sur cette surface;

γ_i le point d'intersection de C_i et de D_i;

ω un point arbitraire de s;

$\mathfrak{L}_i$ une ligne joignant ω à A_i;

$\mathfrak{M}_i$ une ligne le joignant à γ_i.

Nous avons vu (516) qu'on peut adopter comme système

canonique de transversales le suivant :

$$\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2, \quad \mathcal{L}_3, \quad \ldots, \quad \mathcal{L}_\lambda, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_i C_i \mathfrak{M}_i^{-1}, \quad D_i, \quad \ldots.$$

Joignons le point O aux contours $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda$ par des lignes $L_1, \ldots, L_\lambda$. De même joignons-le aux points $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ par des lignes $M_1, \ldots, M_p$, tracées de telle sorte qu'aux environs du point γ_i la ligne M_i se trouve dans celui des quatre angles formés par C_i et D_i qui est opposé à celui qui contient $\mathfrak{M}_i$.

Considérons le système des lacets

$$(7) \qquad L_i A_i L_i^{-1}, \quad \ldots, \quad M_i D_i M_i^{-1}, \quad M_i C_i M_i^{-1}, \quad \ldots.$$

L'un de ces lacets, le premier, par exemple, équivaut à une combinaison des autres. Mais ces derniers sont indépendants et pourront être pris pour $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{N-1}$.

En effet, le contour $L_2 A_2 L_2^{-1}$ coupe une seule des transversales, à savoir $\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$, et cela en un seul point; si $i > 2$, $L_i A_i L_i^{-1}$ coupe la seule transversale $\mathcal{L}_i$ en un seul point, $M_i D_i M_i^{-1}$ coupe la seule transversale $\mathfrak{M}_i C_i \mathfrak{M}_i^{-1}$ en un seul point γ_i; enfin $M_i C_i M_i^{-1}$ ne coupe qu'une seule transversale D_i au seul point γ_i.

522. Cherchons à déterminer le nombre p des rétrosections que l'on peut tracer sur la surface S de Riemann, considérée dans toute son étendue (ou plus généralement sur la surface S' obtenue en excluant de S les portions intérieures à des contours fermés infiniment petits $A_1, \ldots, A_\mu$ tracés autour de quelques-uns de ses points $a_1, \ldots, a_\mu$, en nombre limité.

La surface S' s'étendant jusqu'à l'infini, il conviendra, pour lui appliquer les théorèmes précédents, d'en exclure les points à l'infini, en considérant seulement la portion s' de cette surface située dans l'intérieur d'un cylindre droit ayant pour base un cercle C de rayon infini tracé sur le plan des z.

L'infini étant un point ordinaire pour la courbe f, chacune des n racines de l'équation $f(z, u) = 0$ revient à sa valeur

initiale lorsque z décrit le cercle C. L'intersection de S' avec le cylindre se compose donc de n circuits fermés distincts, $A_{\mu+1}, \ldots, A_{\mu+n}$, qui constituent avec $A_1, \ldots, A_\mu$ la frontière de s'.

Le nombre p sera donné (514) par la formule

$$n + \mu + 2p = N,$$

N désignant l'ordre de connexité de s'.

Pour déterminer ce dernier nombre, nous remarquerons que la surface s' a été obtenue en soudant ensemble, suivant les coupures primitives, $L_1, \ldots, L_\nu$ les feuillets plans $P_1, \ldots, P_n$. Le long de chacune de ces lignes, telle que L_i, nous avons fait deux soudures σ_i et σ'_i, dont la réunion constitue une transversale $\sigma_i^{-1}\sigma'_i$ ayant ses extrémités sur la frontière de s'. En coupant s' suivant ces ν transversales, de manière à détruire les liaisons établies, nous serons revenu au système primitif de n feuillets. Joignons encore par une transversale chacun des contours $A_1, \ldots, A_\mu$ au circuit qui limite le feuillet plan sur lequel il est situé. Chaque feuillet deviendra simplement connexe.

La surface s' étant ainsi décomposée par $\nu + \mu$ transversales en n régions simplement connexes, on aura, d'après la formule (5),

$$\nu + \mu - n = N - 2$$

et par suite

$$n + 2p = \nu - n + 2,$$

$$p = \frac{\nu}{2} - n + 1.$$

Le nombre p ainsi obtenu n'est autre chose que le genre de la courbe f (t. I, 586).

II. — Intégrales abéliennes. Périodicité.

523. Aux environs d'un point $a = (z_0, u_0)$ de la surface de Riemann, z et u peuvent être développés (509) suivant les puissances entières et croissantes d'un paramètre t (égal

à $z - z_0$ dans le cas général, à $\sqrt{z - z_0}$ aux points où la tangente est parallèle avec u, à $\frac{1}{z}$ pour les points à l'infini).

Soit F une fonction analytique de z; nous dirons que le point a est *ordinaire* pour cette fonction, si aux environs de ce point, elle est développable en une série de puissances entières et positives de t.

Ce sera un *pôle,* si le développement, procédant toujours suivant les puissances entières et croissantes, commence par des puissances négatives.

Ce sera *un point critique logarithmique,* si le développement contient en outre un terme de la forme $C \log t$.

Nous dirons encore que la fonction F est *monodrome* dans une portion s de la surface de Riemann, si, lorsque la variable z varie arbitrairement sans sortir de s, F reprend toujours la même valeur lorsque z revient au même point; qu'elle est *synectique,* si elle est monodrome et sans point critique.

Enfin, si F est monodrome sur toute la surface S, nous dirons qu'elle est *uniforme* sur cette surface.

524. Théorème. — *Soient s une région de la surface de Riemann, finie et à connexion simple;* $F = P + Qi$ *une fonction qui n'acquière pas de point critique, lorsque z se meut arbitrairement sur s.*

1° *Les fonctions* F *et* $\int F\,dz$ *seront synectiques dans la région s.*

2° *L'intégrale* $\int F\,dz$ *prise suivant le contour qui limite s sera nulle.*

3° *L'intégrale* $\int P\,dQ$, *prise suivant ce même contour* (*supposé décrit dans un sens tel qu'on ait la région s à sa gauche*), *a une valeur positive* (*à moins que* F *ne se réduise à une constante, auquel cas elle s'annule évidemment*).

Coupons s par une transversale arbitraire; elle la décomposera en deux régions s_1, s_2. Et le théorème sera vrai pour s, s'il l'est pour s_1 et s_2, car les intégrales $\int F\,dz$, $\int P\,dQ$ prises

sur le contour de s, sont évidemment égales à la somme des intégrales analogues prises sur le contour de s_1 et sur celui de s_2.

Subdivisons s_1, s_2 par de nouvelles transversales; la démonstration sera ramenée au cas d'un élément de surface infiniment petit σ. Or, dans un semblable élément, F est représenté par une série de puissances

$$F = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.$$

On aura, d'autre part, suivant que la tangente au point (z_0, u_0) qui correspond à $t = 0$ est parallèle ou non à l'axe des u,

$$z = z_0 + t^2 \qquad \text{ou} \qquad z = z_0 + t,$$

d'où

$$dz = 2t\,dt \qquad \text{ou} \qquad dz = dt.$$

Donc F et $\int F\,dz$ sont des fonctions synectiques dans cet élément.

La première partie du théorème est donc établie; et la seconde en est une conséquence immédiate.

525. Pour établir la troisième, nous remarquerons que, lorsque z décrit σ de manière à laisser son intérieur à gauche, t décrit autour de l'origine des coordonnées, dans le sens direct, un contour fermé infiniment petit τ, qui ne se traverse pas lui-même. Un semblable contour est la limite d'un contour polygonal de même sorte. Celui-ci peut lui-même être considéré comme la limite d'un contour fermé de même nature, ayant en chaque point une tangente dont la direction varie d'une manière continue, et ne coupant une parallèle aux axes qu'en un nombre fini de points.

Tout revient donc à démontrer la proposition pour un contour τ de cette dernière sorte.

Soit

$$t = x + iy;$$

nous aurons (t. I, n° 189)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ces équations montrent que, si Q est une constante, il en sera de même de P, et par suite de F. Dans le cas contraire, l'intégrale double

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

prise dans l'intérieur de τ, a une valeur positive. Mais cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$\int\int\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx\,dy$$
$$=\int\int\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]dx\,dy,$$

ou, d'après le n° **133**, sous la forme

$$\int_\tau\left(-P\frac{\partial Q}{\partial x}\cos NY\,ds+P\frac{\partial Q}{\partial y}\cos NX\,ds\right),$$

NX et NY désignant les angles de la normale extérieure au contour avec les axes des x et des y.

Mais, si dx et dy représentent les accroissements de x et de y lorsque t passe du point s au point $s+ds$, en décrivant τ dans le sens direct, on aura

$$dx=-\cos NY\,ds,\qquad dy=\cos NX\,ds.$$

L'intégrale précédente devient donc

$$\int_\tau P\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)=\int_\tau P\,dQ.$$

Cette dernière intégrale est donc positive, comme nous voulions l'établir.

526. Soit $F=P+Qi$ une fonction qui n'admette sur la surface de Riemann qu'un nombre fini de points critiques $a_1, \ldots, a_\mu$. Prenons arbitrairement un point O sur cette surface et joignons-le par des lacets : 1° aux p rétrosections : 2° aux points $a_1, \ldots, a_\mu$; 3° aux n circuits à l'infini. Coupons S suivant ces lacets ; le contour ainsi formé délimitera

une surface finie s', à connexion simple, sur laquelle F n'a pas de point critique.

Si donc nous désignons par K l'ensemble des lacets des rétrosections, par $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ... les autres lacets, nous aurons

$$(1)\qquad \int_K F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_k} F\,dz = 0,$$

et si F ne se réduit pas à une constante,

$$(2)\qquad \int_K P\,dQ + \sum \int_{\mathcal{A}_k} P\,dQ > 0.$$

527. Si la fonction F n'a pas de point critique (même à l'infini) sur la surface de Riemann, l'inégalité (2) se réduira à

$$(3)\qquad \int_K P\,dQ > 0.$$

En effet, on n'a, dans ce cas, d'autres lacets $\mathcal{A}$ que ceux qui sont relatifs aux circuits. Or ceux-ci ne donnent que des intégrales infiniment petites.

Soit, en effet, $\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1}$ celui qui est relatif au circuit A_k. Les intégrales suivant L_k et L_k^{-1} se détruisent. Pour évaluer l'intégrale suivant A_k, posons

$$z = \frac{1}{t} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

et prenons φ pour variable indépendante; l'intégrale deviendra

$$\int_0^{2\pi} P\frac{dQ}{d\varphi}\,d\varphi,$$

Mais, sur le circuit A_k, F admet par hypothèse un développement de la forme

$$F = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.$$

On aura donc, en désignant par r_i le module et par α_i

l'argument de c_i,

$$P = r_0 \cos\alpha_0 + r_1 \rho \cos(\varphi + \alpha_1) + \ldots,$$
$$Q = r_0 \sin\alpha_0 + r_1 \rho \sin(\varphi + \alpha_1) + \ldots.$$

Si ρ tend vers zéro, P tendra donc vers une limite finie, et $\frac{dQ}{d\varphi}$, qui contient ρ en facteur, tendra vers zéro. L'intégrale est donc infiniment petite.

528. Théorème. — *Une fonction* F, *synectique sur toute la surface de Riemann, se réduit à une constante.*

La fonction F, n'ayant pas de point critique, il faudrait, pour qu'elle ne fût pas constante, que l'intégrale

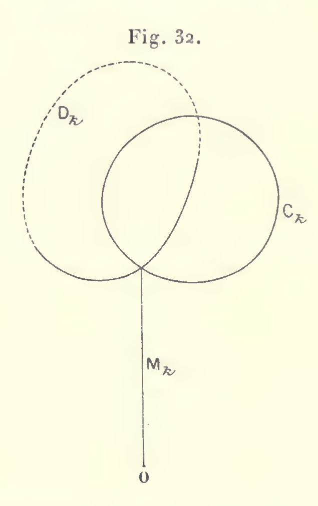
$$\int_K P\, dQ = \int_K P \frac{dQ}{dz} dz$$

fût positive. Mais elle est évidemment nulle.

Soit, en effet (*fig.* 32),

$$M_k C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1} M_k^{-1}$$

Fig. 32.



l'un des lacets dont K est composé. Les intégrales suivant

M_k et M_k^{-1}, ayant leurs éléments égaux et contraires, se détruiront. De même pour les intégrales $\int_{C_k}$ et $\int_{C_k^{-1}}$, $\int_{D_k}$ et $\int_{D_k^{-1}}$.

529. Discutons d'une manière analogue l'égalité (1).

L'un quelconque des lacets $\mathcal{A}_k$ est de la forme

$$\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1},$$

A_k désignant, soit un contour infiniment petit décrit dans le sens rétrograde autour de l'un des points $a_1, \ldots, a_\mu$, soit un circuit, décrit dans le sens direct, et isolant l'un des n points $a_{\mu+1}, \ldots, a_{\mu+n}$ situés à l'infini sur la surface de Riemann.

Nous avons vu que, aux environs du point $a_k = (z_k, u_k)$, z et u sont exprimables au moyen d'un paramètre t (égal, suivant le cas, à $z - z_k$, ou à $\sqrt{z - z_k}$, ou enfin à $\frac{1}{z}$ si a_k est à l'infini). Lorsque z décrit A_k, t décrira, dans le sens rétrograde, un contour infiniment petit, τ_k, autour du point $t = 0$. On aura donc

$$\int_{A_k} F\, dz = \int_{\tau_k} F \frac{dz}{dt}\, dt.$$

Si, aux environs de $t = 0$, $F \frac{dz}{dt}$ est développable suivant les puissances entières et positives de t, cette intégrale sera nulle.

Si $F \frac{dz}{dt}$ admet un développement suivant les puissances entières et croissantes de t, mais commençant par des termes à exposants négatifs

$$\alpha_{km} t^{-m} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1},$$

l'intégrale sera égale à $-2\pi i \alpha_{k1}$.

Dans l'un et l'autre cas, F reprenant sa valeur initiale

lorsque z décrit le contour A_k, les deux intégrales $\int_{L_k} F\,dz$ et $\int_{L_k^{-1}} F\,dz$ se détruiront.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

On a

$$(4) \qquad \int_K F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_k} F\,dz = 0,$$

la sommation s'appliquant seulement aux lacets $\mathcal{A}_k$ décrits autour des points (à distance finie ou à l'infini) qui sont critiques pour l'expression $F\frac{dz}{dt}$.

Si l'un de ces points a_k est un pôle pour $F\frac{dz}{dt}$, *soit α_{k1} le résidu correspondant. L'intégrale suivant le lacet relatif à ce point sera* $-2\pi i\alpha_{k1}$.

530. Cherchons l'expression générale des fonctions F uniformes sur la surface de Riemann et n'ayant pour points critiques que des pôles.

Une semblable fonction F, étant développable aux environs de chaque point (z_0, u_0) suivant les puissances entières et croissantes d'une variable t égale à $z - z_0$, ou à $\sqrt{z - z_0}$, ou à $\frac{1}{z}$, n'aura que des points critiques algébriques par rapport à la variable z.

A chaque valeur de z correspondent n points $a_1, \ldots, a_n$ de la surface de Riemann, et à chacun d'eux a_i des valeurs déterminées F_i, u_i des fonctions F et u. La somme

$$u_1^m F_1 + \ldots + u_u^m F_n = \Phi_m,$$

où m est un entier quelconque, sera une fonction uniforme de z. N'ayant que des points critiques algébriques, elle sera rationnelle en z.

Posons $m = 0, 1, \ldots, n-1$, et des équations ainsi ob-

tenues, tirons la valeur de F_1. Nous obtiendrons un résultat de la forme

$$F_1 = \frac{A_1\Phi_1 + \ldots + A_n\Phi_n}{D}.$$

Le déterminant D est le produit des différences $u_i - u_k$, et ses mineurs $A_1, \ldots, A_n$ sont divisibles par celles de ces différences où u_1 ne figure pas. On aura donc, après suppression de ces facteurs communs,

$$F_1 = \frac{B_1\Phi_1 + \ldots + B_n\Phi_n}{(u_1 - u_2)\ldots(u_1 - u_n)}.$$

Le dénominateur est égal, à un facteur constant près, à la valeur de $\frac{\partial f}{\partial u}$ pour $u = u_1$. D'autre part, les B, étant des fonctions symétriques entières des racines de l'équation $\frac{f(z, u)}{u - u_1} = 0$, sont des polynômes entiers en z et u_1; et s'ils contenaient des puissances de u_1 supérieures à $n - 1$, on pourrait les éliminer au moyen de l'équation $f(z, u_1) = 0$. On aura donc, en remplaçant u_1 par u dans l'identité précédente, une expression de la forme

$$F = \frac{C_1\Phi_1 + \ldots + C_n\Phi_n}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

$C_1, \ldots, C_n$ étant des polynômes entiers en z, u, de degré $n - 1$ au plus par rapport à u, ou enfin, en désignant par Δ le dénominateur commun des fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$,

$$(5) \qquad F = \frac{E_0 + E_1 u + \ldots + E_{n-1}u^{n-1}}{\Delta \frac{\partial f}{\partial u}},$$

$E_0, \ldots, E_{n-1}, \Delta$ étant des polynômes en z.

Cette expression est une fraction rationnelle en z, u. Réciproquement, toute fraction F rationnelle en z, u, étant évidemment de l'espèce considérée, pourra se mettre sous la forme précédente.

531. On donne le nom d'*intégrales abéliennes* aux intégrales de la forme

$$I = \int F\,dz,$$

où F désigne une fonction rationnelle en z, u. On achèvera de préciser cette intégrale en fixant sa valeur initiale en un point O, choisi à volonté sur la surface de Riemann, pour servir d'origine à la variation de z.

Cherchons le système des valeurs diverses que peut prendre cette fonction en un point a de la surface, lorsqu'on fait varier le trajet suivi par z pour passer de O à a.

Nous avons vu que tous les chemins possibles se ramènent à l'un d'entre eux, précédé d'une combinaison :

1° De lacets $M_k C_k M_k^{-1}$, $M_k D_k M_k^{-1}$ joignant le point O aux deux contours C_k, D_k qui forment chaque rétrosection;

2° De lacets $\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1}$ joignant ce même point aux pôles de F et aux n circuits à l'infini.

Les diverses valeurs de l'intégrale au point a différeront donc les unes des autres d'une somme de multiples entiers positifs ou négatifs des intégrales prises suivant ces lacets, ou plus simplement, suivant les contours C_k, D_k, A_k, car les intégrales suivant les lignes M_k, M_k^{-1} et L_k, L_k^{-1}, se détruisent évidemment.

Ces intégrales se nomment les *périodes* de I. Nous appellerons *premières périodes cycliques* les p intégrales $\int_{C_k}$; *deuxièmes périodes cycliques* les p intégrales $\int_{D_k}$; nous les désignerons respectivement par c_k, d_k.

Nous appellerons enfin *périodes polaires* les intégrales $\int_{A_k}$. Nous avons appris à déterminer ces dernières (529), et nous avons vu que $\int_{A_k}$ s'annule, si le point a_k, autour duquel est décrit le contour A_k, est un point ordinaire pour $F\frac{dz}{dt}$. Dans

le cas contraire, ce sera évidemment un pôle, et l'on aura

$$\int_{A_k} = -2\pi i \alpha_{k1},$$

α_{k1} désignant le résidu correspondant.

532. On a (526)

$$\int_K F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_k} F\,dz = 0.$$

Mais le premier terme s'annule, car chacun des lacets qui constituent K étant formé de lignes décrites deux fois en sens contraire, les intégrales correspondantes se détruisent.

Donc *la somme des périodes polaires* (et par suite *la somme des résidus*) *est nulle.*

533. Il peut d'ailleurs exister, dans certains cas, d'autres relations linéaires entre les périodes. Considérons, par exemple, l'expression $\log F$ (F étant rationnel en z, u). C'est une intégrale abélienne, car sa dérivée

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dz}\right)$$

devient rationnelle en z, u, lorsqu'on y remplace $\frac{du}{dz}$ par sa valeur déduite de l'équation $f = 0$; or toutes ses périodes se réduisent à des multiples entiers de la seule quantité $2\pi i$.

534. L'intégrale I n'a évidemment de points critiques qu'aux points a_k qui sont des pôles pour $F\frac{dz}{dt}$. Si, aux environs d'un de ces points a, la partie infinie du développement de $F\frac{dz}{dt}$ est

$$\alpha_m t^{-m} + \ldots + \alpha_1 t^{-1},$$

celle du développement de $I = \int F \frac{dz}{dt} dt$ sera évidemment

$$\frac{\alpha_m}{1-m} t^{-m+1} + \ldots + \alpha_1 \log t,$$

et a sera un point critique logarithmique (un pôle, dans le cas particulier où le résidu α_1 est nul).

535. Soit $I = P + Qi$. Proposons-nous de déterminer la valeur de l'intégrale $\int P\,dQ$, prise le long de l'un des lacets $M_k C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1} M_k^{-1}$ qui aboutissent à une rétrosection.

Soient $c_k = \gamma_k + i\gamma'_k$, $d_k = \delta_k + i\delta'_k$ les périodes cycliques relatives aux deux contours C_k et D_k.

Considérons deux éléments correspondants pris sur les deux lignes C_k et C_k^{-1}; dz y a des valeurs égales et opposées; $\frac{dQ}{dz}$ y reprend la même valeur, car c'est le coefficient de la partie imaginaire de la fonction $\frac{dI}{dz}$, qui est rationnelle en z, u, et, par suite, reste uniforme sur la surface de Riemann; mais P a changé de valeur; car, entre les lignes C_k et C_k^{-1}, on a décrit le contour D_k, ce qui a accru I de d_k, et sa partie réelle P de δ_k. La somme des deux éléments d'intégrale considérés sera donc

$$P\,dQ - (P + \delta_k)\,dQ = -\delta_k\,dQ.$$

On aura donc

$$\int_{C_k} + \int_{C_k^{-1}} = -\int_{C_k} \delta_k\,dQ = -\delta_k \gamma'_k.$$

Considérons de même deux éléments correspondants sur D_k et D_k^{-1}; comme P augmente de $-\gamma_k$ lorsque z décrit le contour intermédiaire C_k^{-1}, la somme de ces éléments sera

$$P\,dQ - (P - \gamma_k)\,dQ = \gamma_k\,dQ,$$

et l'on aura

$$\int_{D_k} + \int_{D_k^{-1}} = \gamma_k \delta'_k.$$

Enfin les éléments correspondants des intégrales, suivant M et M^{-1}, se détruisent; car, lorsque z décrit le contour $C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1}$, P augmente de $\gamma_k + \delta_k - \gamma_k - \delta_k = 0$; il reprend donc sa valeur primitive.

L'intégrale cherchée aura donc pour valeur

$$\gamma_k \delta'_k - \delta_k \gamma'_k.$$

Soit, comme précédemment, K le contour formé par l'ensemble des lacets des rétrosections; on aura

$$(6) \qquad \int_K P\,dQ = \sum_1^p (\gamma_k \delta'_k - \delta_k \gamma'_k).$$

536. Soient I, I' deux intégrales abéliennes ayant respectivement les périodes cycliques $c_1, d_1, \ldots, c_p, d_p$ et $c'_1, d'_1, \ldots, c'_p, d'_p$ et les points critiques $a_1, a_2, \ldots$, et $a'_1, a'_2, \ldots$. Nous admettrons pour plus de simplicité qu'elles n'aient pas de point critique commun.

Joignons un point arbitraire O par des lacets aux rétrosections et aux points critiques $a_1, a_2, \ldots$ et $a'_1, a'_2, \ldots$. Nous aurons soin de tracer ces lacets de telle sorte qu'en tournant autour de l'origine O, on rencontre d'abord les lacets des rétrosections, puis les lacets $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$, des points $a_1, a_2, \ldots$ et enfin les lacets $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots$ des points $a'_1, a'_2, \ldots$.

L'ensemble de ces lacets délimite une surface s simplement connexe et sur laquelle ni $\frac{dI}{dt}$, ni I', ni par suite l'intégrale $\int I'\,dI$ n'ont de point critique.

On aura donc

$$(7) \qquad \int_K I'\,dI + \sum \int_{\mathcal{A}_k} I'\,dI + \sum \int_{\mathcal{A}'_k} I'\,dI = 0.$$

Un calcul identique à celui du numéro précédent nous donnera pour la première intégrale la valeur suivante

$$\int_K I'\,dI = \sum_1^p (c'_k d_k - d'_k c_k).$$

537. Les points $a_1, a_2, \ldots$ sont des pôles pour l'$\frac{dI}{dt}$; en effet, aux environs d'un de ces points, a_k, $\frac{dI}{dt}$ admet un développement de la forme

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_{km} t^{-m} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1} + \ldots.$$

D'autre part, ce point étant ordinaire pour I', la série de Taylor donnera aux environs de ce point

$$I' = (I')_{a_k} + \left(\frac{dI'}{dt}\right)_{a_k} t + \left(\frac{d^2 I'}{dt^2}\right)_{a_k} \frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

On aura donc

$$\int_{\mathcal{A}_k} I'\, dI = -2\pi i \rho_k,$$

ρ_k désignant le résidu

$$(8) \qquad \rho_k = \alpha_{k1}(I')_{a_k} + \alpha_{k2}\left(\frac{dI'}{dt}\right)_{a_k} + \ldots + \frac{\alpha_{km}}{m-1)!}\left(\frac{d^{m-1} I'}{dt^{m-1}}\right)_{a_k}$$

et, par suite,

$$\sum \int_{\mathcal{A}_k} I'\, dI = -2\pi i \sum \rho_k.$$

538. Calculons enfin le dernier terme de l'équation (7). L'intégration par parties donne

$$\int I'\, dI = II' - \int I\, dI'.$$

Or, lorsqu'on parcourt la suite des lacets $\mathcal{A}'_k$, I ne change pas et I' s'accroît de la somme de ses périodes polaires; mais celle-ci est nulle. Donc II' reprend sa valeur initiale, et l'on a simplement

$$\sum \int_{\mathcal{A}'_k} I'\, dI = -\sum \int_{\mathcal{A}'_k} I\, dI'.$$

Mais, pour l'expression $I\frac{dI'}{dt}$, les points $a'_1, a'_2, \ldots$ sont des

pôles, dont les résidus se calculeront comme les précédents, et seront de la forme

$$(9)\qquad \rho'_k = \alpha'_{k1}(\mathrm{I})_{a'_k} + \alpha'_{k2}\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)_{a'_k} + \ldots .$$

Nous obtiendrons donc finalement la relation fondamentale suivante

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_1^p (c_k d'_k - d_k c'_k) = \sum \rho'_k - \sum \rho_k,$$

les résidus ρ_k ou ρ'_k relatifs à chaque point critique étant calculés comme ci-dessus.

539. Appliquons cette formule au cas où $\mathrm{I}' = \log \mathrm{F}$, F désignant une fraction rationnelle en z, u.

Les périodes c'_k, d'_k de cette fonction étant des multiples de $2\pi i$, le premier membre de la formule (10) se réduira à une fonction linéaire homogène, à coefficients entiers, des périodes cycliques de I.

D'autre part, les points critiques de $\log \mathrm{F}$ sont les zéros et les pôles de F, et la partie infinie du développement de $\frac{d \log \mathrm{F}}{dt}$ sera $-\mu t^{-1}$, pour un pôle b de multiplicité μ; $\mu' t^{-1}$, pour un zéro b' de multiplicité μ'.

On aura, par suite,

$$\sum \rho'_k = \sum \mu' (\mathrm{I})_{b'} - \sum \mu (\mathrm{I})_b,$$

ou si l'on considère un zéro de multiplicité μ' (ou un pôle de multiplicité μ) comme résultant de la coïncidence de μ' zéros simples (de μ pôles simples)

$$\sum \rho'_k = \sum (\mathrm{I})_{b'} - \sum (\mathrm{I})_b,$$

les sommes du second membre s'étendant respectivement à tous les zéros simples, et à tous les pôles simples de F.

Si donc nous convenons de considérer comme *équivalentes* deux quantités qui ne diffèrent que par des fonctions

linéaires homogènes, à coefficients entiers, des périodes de I, l'équation (10) nous donnera l'équivalence

$$\sum (\mathrm{I})_{b'} - \sum (\mathrm{I})_b \equiv \sum \rho_k, \tag{11}$$

ρ_k désignant l'expression

$$\rho_k = \alpha_{k1} (\log \mathrm{F})_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{d \log \mathrm{F}}{dt} \right)_{a_k} + \ldots.$$

540. Supposons que la fonction I se réduise à une constante C. Elle n'aura pas de point critique, et toutes ses périodes s'annuleront. La relation (11) se réduira donc à

$$\mathrm{C}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}',$$

N désignant le nombre des pôles b de F, N' le nombre de ses zéros b'.

Soit d'ailleurs λ une constante arbitraire. La fonction $\mathrm{F} - \lambda$ ayant les mêmes pôles que F, en nombre N, aura N zéros. Nous obtenons donc ce résultat :

Le nombre des points pour lesquels une fonction rationnelle F *de* z, u *prend une valeur déterminée* λ *est indépendant de* λ *et égal au nombre des pôles de* F.

541. On déduit aisément de ce qui précède la démonstration d'une proposition célèbre, connue sous le nom de *théorème d'Abel*.

Soit ψ un polynôme entier de degré m; les deux courbes f et ψ se couperont en mn points.

Supposons que les coefficients de ψ varient simultanément, d'une manière continue et suivant une loi quelconque. Les points d'intersection se déplaceront et décriront sur la surface de Riemann des lignes continues $L_1, L_2, \ldots$.

Soient ψ_0 et ψ la forme initiale et la forme finale du polynôme variable; les lignes $L_1, L_2, \ldots$ auront pour origine les points d'intersection $b_1, b_2, \ldots$ de f et de ψ_0 et se termineront aux points d'intersection $b'_1, b'_2, \ldots$ de f et de ψ.

Soit I une intégrale abélienne, dont les points critiques a_1, a_2, ... ne soient pas situés sur les lignes L_1, L_2, ... Les mn intégrales

$$\int_{L_1} dI, \quad \int_{L_2} dI, \quad \ldots$$

auront des valeurs finies et déterminées. Le théorème d'Abel a pour objet de déterminer la somme de ces intégrales.

On a évidemment

$$\int_{L_k} dI = (I)_{b'_k} - (I)_{b_k}.$$

D'autre part, la fonction rationnelle

$$F = \frac{\psi}{\psi_0}$$

a pour pôles les points b_1, b_2, ... et pour zéros les points b'_1, b'_2, ... En lui appliquant la formule (11), il viendra

$$\begin{aligned}\sum \int_{L_k} dI &= \sum (I)_{b'_k} - \sum (I)_{b_k} \\ &= \sum \left[\alpha_{k1} \left(\log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{d}{dt} \log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \ldots \right].\end{aligned}$$

542. Mais il est aisé de voir que les deux membres de cette formule sont non seulement équivalents, mais égaux.

En effet, ils le sont à l'origine du mouvement, où $\psi = \psi_0$. Car le premier membre s'annule. D'autre part, $\frac{\psi}{\psi_0}$ étant égal à 1, son logarithme se réduit à un multiple de $2\pi i$, et les dérivées de ce logarithme par rapport à t s'annulent. Le second membre se réduit donc à un multiple de la somme des périodes polaires $-2\pi i \alpha_{k1}$, laquelle est nulle (532).

Si d'ailleurs on fait varier le polynôme ψ d'une manière continue, à partir de sa forme initiale ψ_0, les deux membres varieront d'une manière continue; car les points a_k n'étant

pas situés, par hypothèse, sur les lignes L_1, L_2, ..., ne seront à aucun instant des points critiques pour $\log \frac{\psi}{\psi_0}$.

Le module de la différence des deux membres ne peut donc varier que d'une manière continue. Si donc il cessait d'être nul et devenait, à un certain moment, égal à δ, il prendrait nécessairement dans l'intervalle toutes les valeurs comprises entre o et δ.

Mais, les deux membres étant équivalents, leur différence est représentée à chaque instant par une expression de la forme $m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q$, en désignant par $\omega_1, \ldots, \omega_q$ les périodes de I. Il faudrait donc que tout nombre compris entre o et δ fît partie de la suite des nombres

$$(12) \qquad |m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q|.$$

Or il est aisé de voir que cela est impossible. Ordonnons, en effet, les nombres (12) de la manière suivante.

Nous mettrons en tête, en les disposant dans un ordre arbitraire, ceux d'entre eux (en nombre limité), pour lesquels $|m_1| + \ldots + |m_q| = 1$; puis, dans un ordre arbitraire, ceux en nombre limité, où cette somme est égale à 2, et ainsi de suite. Tous ces nombres sont ainsi disposés en une série, où chacun d'eux figure à un rang déterminé.

Soit δ_1 le premier terme de la série dont la valeur tombe entre o et δ. Si la série contient des termes dont la valeur soit comprise entre δ et δ_1, ils ne viendront qu'après celui-là. Soit δ_2 le premier d'entre eux. Si la série contient des termes dont la valeur soit comprise entre δ_1 et δ_2, ils ne viendront qu'après δ_2. Continuant ainsi, nous formerons deux suites de termes, les uns croissants

$$\delta_1, \quad \delta_3, \quad \delta_5, \quad \ldots,$$

les autres décroissants

$$\delta_2, \quad \delta_4, \quad \delta_6, \quad \ldots,$$

mais plus grands que les précédents. D'ailleurs, chacun de ces termes δ_n étant plus éloigné dans la série que δ_{n-1}, le

rang qu'il occupe et, *a fortiori*, le rang occupé par les autres termes compris comme lui entre δ_{n-2} et δ_{n-1}, ne saurait être moindre que n.

Cela posé, si les deux suites précédentes s'arrêtent à un dernier terme δ_n, la série ne contiendra aucun des nombres compris entre δ_{n-1} et δ_n, et notre proposition sera établie. Si, au contraire, les deux suites contiennent un nombre de termes illimité, les nombres δ_1, δ_3, ... tendront vers une limite Δ, et les nombres δ_2, δ_4, ... vers une limite Δ' égale ou supérieure à Δ. Le nombre Δ ne peut figurer dans la série; car il y devrait occuper un rang déterminé m; mais, Δ étant compris, quel que soit n, dans l'intervalle de δ_{n-2} à δ_{n-1}, ce rang serait au moins égal à n, quel que fût ce dernier nombre; ce qui est absurde.

543. Nous aurons donc, comme expression du théorème d'Abel, la formule

$$(13)\qquad \sum\int_{L_k} dI = \sum\left[\alpha_{k1}\left(\log\frac{\psi}{\psi_0}\right)_{a_k} + \alpha_{k2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{\psi}{\psi_0}\right)_{a_k} + \ldots\right].$$

Les expressions $\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)_{a_k}$, $\left(\frac{d}{dt}\log\frac{\psi}{\psi_0}\right)_{a_k}$, $\cdots$ sont évidemment rationnelles par rapport aux coefficients de ψ et de ψ_0.

Le second membre de la formule précédente se compose donc d'une partie logarithmique et d'une partie rationnelle par rapport à ces coefficients.

544. Deux cas particuliers doivent être signalés ici :

On dit que l'intégrale I est de *première espèce*, si elle n'a aucun point critique. Dans ce cas, le second membre disparaît, et l'on a simplement

$$(14)\qquad \sum\int_{L_k} dI = 0.$$

L'intégrale I sera de *seconde espèce*, si, tout en admettant des points critiques, elle n'a pas de périodes polaires. Dans

ce cas, les résidus α_{k1} seront tous nuls, et le second membre se réduit à sa partie rationnelle.

Enfin l'intégrale sera de *troisième espèce*, si elle a des périodes polaires.

545. *Remarque.* — Il peut arriver que ψ varie de telle sorte que quelques-uns de ses points d'intersection avec f restent fixes. Leurs trajectoires L_k se réduisant à de simples points, les intégrales correspondantes disparaîtront du premier membre des équations (13) ou (14), qui ne contiendront plus que les intégrales relatives aux points d'intersections variables.

546. Soient $\beta_1 = (z_1, u_1)$, ..., $\beta_\mu = (z_\mu, u_\mu)$ des points variables, décrivant simultanément sur la surface de Riemann des lignes arbitraires L_1, ..., L_μ (ne passant pas par les points critiques de l'intégrale I). Nous pourrons déterminer une courbe φ, adjointe à f et d'un degré assez élevé pour que son équation contienne plus de μ coefficients arbitraires. On pourra donc déterminer ces coefficients, en tout ou en partie, par la condition que φ passe par les points β_1, ..., β_μ, et, s'il reste encore des arbitraires, on achèvera de déterminer φ en la faisant passer par des points fixes γ_1, γ_2, ..., choisis à volonté sur f. Les coefficients de l'adjointe ainsi formés sont rationnels et symétriques en $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$. Elle coupera f : 1° en certains points fixes simples ou multiples; 2° aux points variables $(z_1, u_1), \ldots, (z_\mu, u_\mu)$; 3° en p autres points variables $(z'_1, u'_1), \ldots, (z'_p, u'_p)$.

Les coordonnées de ces derniers points sont des fonctions algébriques de $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$. Pour les obtenir, éliminons u entre les deux équations

$$\varphi(z, u) = 0, \qquad f(z, u) = 0.$$

Soit $Z = 0$ l'équation finale. On connaît d'avance celles de ses racines qui correspondent aux points fixes, et les racines $z_1, \ldots, z_\mu$. Supprimant ces solutions par la division, il res-

tera une équation $Z' = 0$, de degré p, pour déterminer $z'_1, \ldots, z'_p$. Soit z'_k l'une de ses racines ; la valeur correspondante u'_k s'obtiendra en cherchant la solution commune aux deux équations

$$\varphi(z'_k, u) = 0, \qquad f(z'_k, u) = 0.$$

Elle sera unique (si $Z' = 0$ n'a pas de racine multiple) et s'exprimera rationnellement au moyen de z'_k et de $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$.

Lorsque les points $(z_1, u_1), \ldots, (z_\mu, u_\mu)$ décriront les trajectoires $L_1, \ldots, L_\mu$, les p points $(z'_1, u'_1), \ldots, (z'_p, u'_p)$ décriront des trajectoires correspondantes $L'_1, \ldots, L'_p$; les autres points d'intersection restant fixes, on aura, par le théorème d'Abel,

$$\sum_1^\mu \int_{L_k} dI + \sum_1^p \int_{L'_k} dI = M,$$

M étant une fonction rationnelle et logarithmique des coefficients de φ et de φ_0, et par suite des quantités $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$ et de leurs valeurs initiales $z_{10}, u_{10}, \ldots, z_{\mu 0}, u_{\mu 0}$. Nous obtenons donc cette nouvelle proposition :

La somme d'un nombre quelconque d'intégrales abéliennes semblables est toujours réductible à une somme de p intégrales analogues, prise négativement, plus un terme complémentaire, algébrique et logarithmique.

III. — Réduction des intégrales abéliennes.

547. *Une intégrale abélienne* $I = \int F\,dz$ *est déterminée à une constante près, lorsque l'on connaît :* 1° *ses p premières périodes cycliques* $c_1, \ldots, c_p$; 2° *la position de ses points critiques* $a_1, a_2, \ldots,$ *et aux environs de chacun de ces points, tel que* a_k, *la partie infinie de son développement* (ou, ce qui revient au même, la partie in-

finie $\alpha_{k,\mu_k} t^{-\mu_k} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1}$ du développement de sa dérivée $F \dfrac{dz}{dt}\Big)$.

Soient, en effet, I, I′ deux intégrales pour lesquelles ces divers éléments soient les mêmes. La différence $I - I'$ sera une intégrale abélienne sans point critique, et dont les premières périodes cycliques sont toutes nulles.

Or, nous avons vu (527) qu'une intégrale abélienne $J = P + Qi$ sans points critiques, et dont les périodes cycliques sont

$$c_k = \gamma_k + i\gamma'_k, \qquad d_k = \delta_k + i\delta'_k,$$

se réduit à une constante si l'intégrale $\int_K P\,dQ$ n'est pas positive; d'autre part, cette intégrale est égale (535) à

$$\sum_1^p (\gamma_k \delta'_k - \delta_k \gamma'_k).$$

Or, pour l'intégrale $I - I'$, les quantités γ_k, γ'_k sont nulles. Donc $\int_K P\,dQ$ sera nulle, et $I - I'$ est une constante.

548. Supposons les éléments ci-dessus donnés *a priori*, et proposons-nous de déterminer l'intégrale abélienne correspondante. Elle ne pourra exister que si la somme des résidus α_{k1} est nulle. Nous allons voir que cette condition est suffisante.

Soit Δ une courbe de degré m telle que, parmi ses points d'intersection avec f, il y en ait au moins μ_1 confondus en a_1, μ_2 confondus en a_2, etc. On pourra toujours satisfaire à ces conditions en prenant m suffisamment élevé.

Nous allons établir que l'intégrale cherchée existe, et qu'elle est de la forme

$$I = \int \frac{\Phi\,dz}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}},$$

Φ désignant une adjointe convenablement choisie parmi celles de degré $m+n-3$.

549. Cherchons, à cet effet, quels sont les points de la surface de Riemann aux environs desquels l'expression

$$\frac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}}$$

devient infinie.

Aux environs d'un point (ζ, υ), situé à distance finie, $\dfrac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}$ sera fini. Cela est évident, si $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ n'est pas nul au point considéré.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial z} \gtrless 0$, il en sera de même, car de l'équation $f = 0$ on déduit

$$\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} = -\frac{\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}},$$

et le second membre reste fini.

Enfin, si $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, le point (ζ, υ) sera multiple. Soit ν son ordre de multiplicité. A une valeur $z = \zeta + t$ voisine de ζ correspondent n valeurs $u_1, \ldots, u_n$; celles de ces branches qui se croisent au point multiple auront des développements de la forme

$$u_1 = \upsilon + c_1 t + \ldots, \quad \ldots, \quad u_\nu = \upsilon + c_\nu t + \ldots,$$

les coefficients angulaires $c_1, \ldots, c_\nu$ de leurs tangentes étant différents; les autres développements seront de la forme

$$u_k = \upsilon_k + \ldots \qquad (k = \nu + 1, \ldots, n),$$

υ_k différant de υ.

Si donc on prend sur l'une des branches qui passent au point multiple, sur la première, par exemple, un point (z, u_1) voisin de (ζ, υ), l'expression $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}$ qui est égale à un facteur constant près au produit

$$(u_1 - u_2) \dots (u_1 - u_n)$$

sera d'ordre $\nu - 1$.

Mais, d'autre part, Φ ayant au point (ζ, υ) un point multiple de multiplicité $\nu - 1$, son ordre sera au moins égal à $\nu - 1$. Le quotient restera fini.

Considérons enfin un point situé à l'infini. A une valeur infinie de $z = \dfrac{1}{t}$ correspondent n développements

$$u_1 = \frac{c_1}{t} + \dots, \qquad u_n = \frac{c_n}{t} + \dots,$$

et le produit

$$(u_1 - u_2) \dots (u_1 - u_n)$$

sera d'ordre $-(n-1)$. D'autre part, $\dfrac{dz}{dt}$ est d'ordre -2. Enfin Φ, polynôme d'ordre $n + m - 3$, est d'un ordre au moins égal à $-(n + m - 3)$. Donc

$$\frac{t^m \Phi \dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}$$

restera fini au point considéré.

Quant à Δ, son ordre en un point (ζ, υ) à distance finie sera égal au nombre λ des intersections de Δ et de f qui sont concentrées en ce point [λ étant nul, si (ζ, υ) n'est pas un point d'intersection]. Pour un point à l'infini, cet ordre serait $-m + \lambda$.

Donc *l'expression*

$$\frac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}}$$

ne devient infinie qu'aux points d'intersection de f et de Δ; et si l'un de ces points b_i compte pour λ_i intersections, elle deviendra infinie d'ordre λ_i (au plus).

La partie infinie de son développement

$$(1) \qquad B_{i,\lambda_i} t^{-\lambda_i} + \ldots + B_{i1} t^{-1}$$

s'obtiendra aisément par la division.

550. Si nous prenons pour Φ l'adjointe la plus générale de son degré, elle aura pour coefficients des fonctions linéaires et homogènes de $mn + p - 1$ paramètres indéterminés (t. I, 589). (Nous supposons ici $m > 0$; s'il était nul, le nombre des paramètres serait p.)

Le nombre total des coefficients B est égal au nombre mn des intersections de Δ et de f. Ces coefficients sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes des paramètres. La somme des résidus étant nécessairement nulle, on aura la relation

$$\sum B_{i1} = 0,$$

qui permettra d'exprimer l'une de ces fonctions telle que B_{11} au moyen des autres.

Désignons ces dernières par B_{kl}.

Les p premières périodes cycliques $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ de l'intégrale considérée sont évidemment aussi des fonctions linéaires et homogènes des paramètres.

Le déterminant des $mn - 1 + p$ fonctions $B_{kl}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ n'est pas nul; car, s'il l'était, on pourrait déterminer les rapports des paramètres de manière à les annuler simultanément. L'intégrale abélienne ainsi obtenue n'aurait plus de pôles, et ses premières périodes cycliques seraient nulles; mais elle ne peut se réduire à une constante, car sa différentielle n'est pas identiquement nulle; il y a donc contradiction.

Le déterminant n'étant pas nul, on pourra choisir les paramètres de manière à donner aux fonctions linéaires $B_{kl}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ un système de valeurs arbitraires.

On pourra donc faire en sorte :

1° Que $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ prennent les valeurs assignées $c_1, \ldots, c_p$; 2° que le polynôme (1) s'annule pour tout point b_i qui ne fait pas partie de la suite des points $a_1, a_2, \ldots$, et se réduise, si $b_i = a_k$, au polynôme donné

$$\alpha_{k,\mu_k} t^{-\mu_k} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1}.$$

Les coefficients B_{11} et α_{11} du terme en t^{-1} dans les développements relatifs au point $b_1 = a_1$ échapperont seuls à l'identification directe; mais, comme on a, d'une part,

$$\sum B_{i1} = 0,$$

et, d'autre part, par hypothèse,

$$\sum \alpha_{k1} = 0,$$

ces deux coefficients seront encore égaux.

551. *Intégrales de première espèce.* — Si l'intégrale I n'a pas de point critique, on pourra supposer $m = 0$; Δ se réduit alors à une constante. La forme générale des intégrales de première espèce sera donc

$$\int \frac{\varphi\, dz}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

φ désignant une adjointe d'ordre $n - 3$.

Nous pourrons déterminer une intégrale de première espèce

$$E_k = \int \frac{\varphi_k\, dz}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

telle que toutes ses premières périodes cycliques $c_{k1}, \ldots, c_{kp}$ soient nulles, sauf l'une d'elles c_{kk}, laquelle sera égale à l'unité. Nous désignerons ses secondes périodes cycliques par $d_{k1}, \ldots, d_{kp}$.

Nous obtiendrons ainsi p intégrales particulières $E_1, \ldots, E_p$, que nous appellerons *intégrales normales de première espèce*.

La formule (10) du n° 538, appliquée à deux intégrales normales E_i, E_k donnera évidemment

$$(2) \qquad o = \sum_{l=1}^{l=p} (c_{il} d_{kl} - d_{il} c_{kl}) = d_{ki} - d_{ik}.$$

552. Une intégrale abélienne I, ayant pour premières périodes cycliques $c_1, \ldots, c_p$, peut évidemment se mettre sous la forme

$$I = c_1 E_1 + \ldots + c_p E_p + I',$$

I′ étant une *intégrale réduite,* dont les premières périodes cycliques sont nulles.

Dans l'étude des intégrales de seconde et de troisième espèce, nous pourrons donc nous borner à la considération des intégrales réduites.

553. *Intégrales de seconde espèce.* — Nous pouvons construire une intégrale réduite F_a^μ n'ayant qu'un seul pôle a, aux environs duquel la partie infinie de son développement se réduise à $t^{-\mu}$ (celle du développement de $\frac{dF_a^\mu}{dt}$ se réduira à $-\mu t^{-\mu-1}$).

Soient $d_{a1}^\mu, \ldots, d_{ap}^\mu$ ses secondes périodes cycliques. Leur valeur s'obtiendra en appliquant la formule (10) du n° 538 aux deux intégrales E_k et F_a^μ; il viendra

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} d_{ak}^\mu = \frac{-\mu}{\mu!} \left(\frac{d^\mu E_k}{dt^\mu}\right)_a = \frac{-1}{(\mu-1)!} \left(\frac{d^{\mu-1}}{dt^{\mu-1}} \frac{\varphi_k}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_a.$$

Cette expression est une fonction algébrique des coordonnées ζ, υ du point a. Si ce point n'est pas à l'infini, et si $\frac{\partial f}{\partial u}$ n'y est pas nul, on aura $t = z - \zeta$, et le second membre

se réduira à

$$\frac{-1}{(\mu-1)!}\frac{d^{\mu-1}}{d\zeta^{\mu-1}}\left(\frac{\varphi_k(\zeta,\upsilon)}{\frac{\partial f(\zeta,\upsilon)}{\partial\upsilon}}\right).$$

Le théorème d'Abel, appliqué à F_a^μ, donnera, d'autre part,

$$(4)\qquad \sum\int_{L_k} dF_a^\mu = \frac{-1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^\mu}{dt^\mu}\log\frac{\psi}{\psi_0}\right)_a.$$

554. Une intégrale réduite de seconde espèce I (et, en particulier, une fraction rationnelle en z, u), admettant les pôles a_1, a_2, ..., et ayant pour partie infinie de son développement, aux environs de a_i, un polynôme

$$\alpha_{i,m_i}t^{-m_i}+\ldots+\alpha_{i1}t^{-1}$$

pourra se mettre sous la forme

$$(5)\qquad I=\sum_i(\alpha_{i,m_i}F_{a_i}^{m_i}+\ldots+\alpha_{i1}F_{a_i}^1)+C,$$

C désignant une constante.

En effet, la quantité C définie par cette équation est une intégrale abélienne qui n'a ni pôles, ni premières périodes cycliques. C'est donc une constante.

Réciproquement, une expression I de la forme (5), où les quantités α et C sont des constantes indéterminées, est une intégrale réduite de seconde espèce, n'ayant de pôles qu'aux points a_1, a_2, ... avec des ordres de multiplicité au plus égaux à m_1, m_2, ... (ces ordres de multiplicité pouvant s'abaisser si quelques-uns des coefficients α sont nuls).

555. Pour que cette expression I se réduise à une fraction rationnelle, il faut et il suffit que ses secondes périodes cycliques

$$\delta_k=\sum_i(\alpha_{i1}d_{a_ik}^1+\ldots+\alpha_{i,m_i}d_{a_ik}^{m_i})$$

soient toutes nulles; car ce sera alors une fonction uniforme, n'ayant pour points critiques que des pôles.

Ces polynômes δ_k, au nombre de p, contiennent les indéterminées α, en nombre $\sum m_i = q$. Ils peuvent être liés par des relations linéaires; soit σ le nombre de ces relations. Nous aurons à satisfaire à $p - \sigma$ équations distinctes.

Si $p - \sigma \geqq q$, on ne pourra y satisfaire qu'en supposant les α tous nuls, et I se réduira à la constante arbitraire C.

Si $p - \sigma < q$, ces équations détermineront $p - \sigma$ des quantités α en fonction des autres et I contiendra encore, sous forme linéaire, $q - p + \sigma + 1$ indéterminées (y compris la constante C).

Pour trouver la signification du nombre σ, nous remarquerons qu'une relation linéaire

$$\lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_p \delta_p = 0,$$

entre les polynômes δ_k, équivaut au système des relations

$$\sum_k \lambda_k d^1_{a_i k} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_k \lambda_k d^{m_i}_{a_i k} = 0, \qquad \ldots.$$

Remplaçons les périodes d par leurs valeurs (3), et posons

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p.$$

Ces relations deviennent

$$\left(\frac{\varphi}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_{a_i} = 0, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{d^{m_i-1}}{dt^{m_i-1}} \frac{\varphi}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_{a_i} = 0, \qquad \ldots.$$

Elles expriment que parmi les $2p - 2$ points d'intersection de f avec l'adjointe φ, de degré $n - 3$, autres que ceux qui se trouvent aux points multiples de f, d'après la définition même des adjointes, m_1 coïncident avec a_1, ..., m_i avec a_i, etc.

Si nous avons, entre les polynômes δ, σ relations linéairement distinctes, nous aurons donc σ adjointes φ linéairement distinctes jouissant de la propriété précédente, et réciproquement.

Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH. — *Soient* $a_1, \ldots, a_q$ *q points quelconques (distincts ou non); σ le nombre des adjointes d'ordre $n-3$ linéairement distinctes, qui passent par ces points.*

Les fonctions rationnelles de z, u, qui n'ont aucun pôle en dehors de ces points, dépendent linéairement de $q-p+\sigma+1$ constantes arbitraires, si $q>p-\sigma$; elles se réduisent à une constante, si $q \leqq p-\sigma$.

556. Cherchons l'expression explicite de ces fractions rationnelles.

Soit d'abord $\sigma > 0$, et soit

$$\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_\sigma\varphi_\sigma$$

l'adjointe la plus générale de degré $n-3$, qui passe par les points $a_1, \ldots, a_q$. On peut déterminer les constantes λ de manière à la faire passer par $\sigma - 1$ nouveaux points choisis à volonté; mais le nombre total de ses intersections avec f est $2p-2$; on aura donc l'inégalité

$$q+\sigma-1 \leqq 2p-2.$$

Soient $b_1, \ldots, b_{q'}$ les points d'intersection de φ_1 avec f, autres que $a_1, \ldots, a_q$; et soit σ' le nombre des adjointes d'ordre $n-3$ qui passent par $b_1, \ldots, b_{q'}$. La fonction rationnelle la plus générale, n'ayant de pôle qu'en ces points, contiendra $q'-p+\sigma'+1$ constantes arbitraires. Mais la fonction

$$\frac{\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_\sigma\varphi_\sigma}{\varphi_1},$$

qui en contient σ, jouit évidemment de cette propriété ; on aura donc

$$q'-p+\sigma'+1 \geqq \sigma.$$

Si nous échangeons dans le raisonnement les points $a_1, \ldots, a_q$ et $b_1, \ldots, b_{q'}$, nous trouverons de même

$$q-p+\sigma+1 \geqq \sigma';$$

ajoutant ces inégalités, et remarquant que $q+q'=2p-2$, il vient

$$\sigma'+\sigma \overset{=}{>} \sigma+\sigma'.$$

Donc les deux membres des relations précédentes ne peuvent être inégaux, et l'on a nécessairement

$$q'-p+\sigma'+1=\sigma, \qquad q-p+\sigma+1=\sigma'.$$

Soit maintenant

$$\varphi'=\lambda'_1\varphi'_1+\ldots+\lambda'_{\sigma'}\varphi'_{\sigma'}$$

l'adjointe la plus générale qui passe par les points $b_1, \ldots, b_{q'}$. La fonction rationnelle

$$\frac{\varphi'}{\varphi_1}$$

ne pourra devenir infinie qu'aux points $a_1, \ldots, a_q$, et contiendra le nombre voulu de constantes arbitraires pour être la plus générale de cette espèce.

557. Soit maintenant $\sigma=0$. En prenant m assez grand, nous pourrons déterminer une adjointe Φ d'ordre $n-3+m$ passant par les points $a_1, \ldots, a_q$. Elle coupera f en $mn+2p-2-q$ autres points $b_1, b_2, \ldots$. Soit Ψ l'adjointe du même degré la plus générale parmi celles qui passent par les points b; elle contiendra encore (au moins) $q-p+1$ paramètres arbitraires. D'ailleurs $\frac{\Psi}{\Phi}$ ne devient infinie qu'aux points $a_1, \ldots, a_q$. Ce sera donc la fraction rationnelle cherchée, et le nombre des paramètres sera précisément $q-p+1$.

558. Soit, en particulier, $q=p+1$. On pourra prendre pour Φ une adjointe de degré $n-2$; Ψ contenant deux paramètres sera de la forme $\lambda\Phi+\lambda_1\Phi_1$, et l'on aura

$$\frac{\Psi}{\Phi}=\lambda+\lambda_1\frac{\Phi_1}{\Phi}.$$

La fonction $\frac{\Phi_1}{\Phi}$ ayant $p+1$ pôles $a_1, \ldots, a_{p+1}$ prendra une

valeur donnée $\frac{1}{\mu}$ en $p+1$ points

$$\alpha_1 = (z_1, u_1), \quad \ldots, \quad \alpha_{p+1} = (z_{p+1}, u_{p+1}).$$

Ces points seront évidemment ceux des points d'intersection des courbes

$$f = 0, \qquad \Phi - \mu\Phi_1 = 0$$

qui varient avec μ. Pour $\mu = 0$, ils se confondent respectivement avec $a_1, \ldots, a_{p+1}$; lorsque μ varie, ils décriront des lignes $L_1, \ldots, L_{p+1}$; et l'on aura, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{L_i} dE_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

ou, en différentiant,

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+1} \frac{\varphi_k(z_i, u_i)\, dz_i}{\dfrac{\partial f(z_i, u_i)}{\partial u_i}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Ce système d'équations différentielles, joint aux relations

$$f(z_1, u_1) = 0, \quad \ldots, \quad f(z_i, u_i) = 0, \quad \ldots$$

et aux conditions initiales

$$\ldots, \quad z_i = \zeta_i, \quad u_i = \upsilon_i, \quad \ldots$$

(ζ_i, υ_i étant les coordonnées du point a_i), suffit, comme nous le verrons dans la théorie des équations différentielles, à définir z_2, u_2, ... en fonction de z_1.

Mais on peut établir entre ces variables un système de relations algébriques équivalent au précédent. En effet, les fonctions symétriques des coordonnées $z_1, u_1, \ldots, z_{p+1}, u_{p+1}$ sont évidemment rationnelles en μ, qui, lui-même, en vertu de la relation

$$\mu = \frac{\Phi_1(z_1, u_1)}{\Phi(z_1, u_1)} = \ldots = \frac{\Phi_1(z_{p+1}, u_{p+1})}{\Phi(z_{p+1}, u_{p+1})} = \frac{\Sigma\,\Phi_1(z_i, u_i)}{\Sigma\,\Phi(z_i, u_i)}$$

est une fonction de même nature.

Les équations ainsi obtenues, entre les fonctions symétriques de z_1, u_1, z_2, u_2, ..., ont leurs coefficients rationnels par rapport à ceux de Φ, Φ_1, lesquels sont évidemment rationnels et symétriques en ζ_1, υ_1, ζ_2, υ_2, ... Par l'élimination de ces dernières constantes, on retrouverait les équations différentielles.

559. Parmi les intégrales F_a^μ, au moyen desquelles nous avons exprimé toutes les intégrales réduites de seconde espèce, la plus simple est celle où $\mu = 1$. Nous l'appellerons l'*intégrale élémentaire de seconde espèce*. On peut la mettre (**548**) sous la forme suivante

$$(7) \qquad F_a^1 = \int \frac{\Phi_a\, dz}{\Delta_a \dfrac{\partial f}{\partial u}},$$

Δ_a désignant la tangente à f au point a, et Φ_a une adjointe convenable de degré $n-2$ (passant évidemment par les $n-2$ points d'intersection de f et de Δ_a autres que a).

Ses secondes périodes d_{ak}^1 seront données par la formule

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi i} d_{ak}^1 = -\left(\frac{\varphi_k}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_a.$$

Soient a_1, ..., a_p p points quelconques non situés sur une même adjointe de degré $n-3$. Le déterminant des p^2 périodes $d_{a_ik}^1$ ne sera pas nul.

560. *Toute intégrale réduite* I *de seconde espèce pourra se mettre sous la forme*

$$(9) \qquad I = \lambda_1 F_{a_1}^1 + \ldots + \lambda_p F_{a_p}^1 + R,$$

R *désignant une fraction rationnelle.*

Soient, en effet, δ_1, ..., δ_p les secondes périodes de I. Si nous déterminons les constantes λ par les relations

$$\delta_k = \lambda_1 d_{a_1 k}^1 + \ldots + \lambda_p d_{a_p k}^1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

l'intégrale R, définie par la relation précédente, aura toutes ses périodes cycliques nulles. Elle sera donc rationnelle.

561. *Intégrales de troisième espèce.* — Une intégrale de troisième espèce admet au moins deux points critiques logarithmiques, la somme des résidus devant être nulle.

Nous appellerons *intégrale élémentaire de troisième espèce,* et nous représenterons par G_a^b l'intégrale réduite qui a deux pôles a et b, et dont les développements aux environs de ces deux points ont respectivement pour partie infinie $-\log t$ et $+\log t$.

Cette intégrale pourra se mettre sous la forme

$$(10) \qquad G_a^b = \int \frac{\Phi_{ab}\, dz}{\Delta_{ab} \dfrac{\partial f}{\partial u}},$$

Δ_{ab} désignant la droite qui joint les points a, b, et Φ_{ab} une adjointe de degré $n-2$ (laquelle devra passer par les $n-2$ points d'intersection de Δ_{ab} et de f autres que a, b).

Soient $d_{ab1}, \ldots, d_{abp}$ ses secondes périodes cycliques. En appliquant la formule (10) du n° 538 aux intégrales E_k et G_a^b, on trouvera

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i} d_{abk} = (E_k)_b - (E_k)_a.$$

La même formule, appliquée à F_α^μ et à G_a^b, donne

$$(12) \qquad 0 = (F_\alpha^\mu)_b - (F_\alpha^\mu)_a + \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}}{dt^{\mu-1}} \frac{\Phi_{ab}}{\Delta_{ab}\dfrac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_\alpha.$$

Appliquée à G_a^b et G_α^β, elle donne

$$0 = (G_a^b)_\beta - (G_a^b)_\alpha - (G_\alpha^\beta)_b + (G_\alpha^\beta)_a,$$

ou

$$(13) \qquad \int_\alpha^\beta dG_a^b = \int_a^b dG_\alpha^\beta$$

(les intégrales étant prises suivant des lignes qui restent dans la région délimitée par le contour K et les lacets des points a, b, α, β, région dans laquelle les intégrales G_a^b et G_α^β restent monodromes).

Enfin, le théorème d'Abel (543), appliqué à l'intégrale G_a^b, donnera, en désignant par ζ_0, υ_0 et ζ_1, υ_1 les coordonnées des points a et b,

$$(14) \qquad \sum \int_{L_k} dG_a^b = \log \frac{\psi\,(\zeta_1, \upsilon_1)}{\psi_0(\zeta_1, \upsilon_1)} - \log \frac{\psi\,(\zeta_0, \upsilon_0)}{\psi_0(\zeta_0, \upsilon_0)}.$$

562. *Toute intégrale abélienne* I *est la somme d'une fonction linéaire d'intégrales élémentaires de troisième espèce et d'une intégrale de seconde espèce.*

Soient, en effet, $a_1, \ldots, a_q$ les points critiques de I, $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les résidus correspondants. Posons

$$I = \lambda_2 G_{a_1}^{a_2} + \ldots + \lambda_q G_{a_1}^{a_q} + R.$$

La fonction complémentaire R n'ayant plus de périodes polaires (en vertu de l'équation $\lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 0$) sera une intégrale de seconde espèce.

IV. — Inversion.

563. Soient $a_1 = (z_1, u_1), \ldots, a_p = (z_p, u_p)$ p points mobiles, partant des positions initiales $a_{10} = (z_{10}, u_{10}), \ldots, a_{p0} = (z_{p0}, u_{p0})$; et soient comme précédemment

$$E_k = \int \frac{\varphi_k\, dz}{\frac{\partial f}{\partial u}} \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

les p intégrales normales de première espèce. Soient enfin $e_1, \ldots, e_p$ de nouvelles variables, liées aux premières par les relations

$$(1) \qquad \sum_i \frac{\varphi_k(z_i, u_i)\, dz_i}{\frac{\partial f(z_i, u_i)}{\partial u_i}} = de_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

On en déduit par l'intégration

$$(2)\qquad \sum_i \int_{L_i} dE_k = e_k - e_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

L_i désignant la ligne décrite par le point a_i, et e_{k0} la valeur initiale de e_k.

Si l'on fait varier les lignes L_i sans changer leurs extrémités, on obtiendra pour chaque position des points $a_1, \ldots, a_p$ une infinité de systèmes de valeurs pour $e_1, \ldots, e_p$. En désignant l'un d'eux par $e'_1, \ldots, e'_p$, ils auront évidemment pour forme générale

$$e_k = e'_k + g_k + \sum_l h_l d_{kl},$$

$d_{k1}, \ldots, d_{kp}$ étant les secondes périodes cycliques de E_k, et g_k, h_l des entiers positifs ou négatifs.

564. Le *problème d'inversion* des intégrales abéliennes consiste à trouver réciproquement l'expression des quantités z_i, u_i en fonction de $e_1, \ldots, e_p$, considérées comme variables indépendantes.

Étudions la marche de ces fonctions aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$. Les quantités z_i, u_i étant voisines de z_{i0}, u_{i0} pourront être développées suivant les puissances entières et croissantes d'un même paramètre t_i; et $\frac{dE_k}{dt_i}$, restant fini pour $t_i = 0$, admettra un développement en puissances entières et positives, tel que

$$\frac{dE_k}{dt_i} = \alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \alpha''_{ki} t_i^2 + \ldots.$$

Les nouvelles variables t_i seront des fonctions implicites de $e_1, \ldots, e_p$, déterminées par les équations

$$(3)\quad \sum_i \int_0^{t_i} (\alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \ldots) dt_i - (e_k - e_{k0}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p).$$

Le jacobien des premiers membres par rapport aux va-

riables t_i sera le déterminant D des quantités

$$\alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \ldots.$$

Pour $t_1 = \ldots = t_p = 0$, D se réduit au déterminant D_0 des quantités α_{ki}^0.

Si D_0 n'est pas nul, les équations précédentes définiront effectivement (t. I, n° **191**) des fonctions $t_1, \ldots, t_p$ des variables $e_1, \ldots, e_p$, lesquelles fonctions sont synectiques aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$.

565. Le déterminant D_0 s'annule dans les deux cas suivants :

1° Les points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, tout en restant distincts, sont situés sur une même adjointe $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p$ de degré $n-3$.

En effet, cette condition est exprimée par les p équations

$$\sum_k \lambda_k \alpha_{ki}^0 = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

et, pour qu'on puisse y satisfaire autrement qu'en posant $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$, il faut et il suffit que D_0 soit nul.

2° Si plusieurs points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, par exemple $a_{10}, \ldots, a_{\mu 0}$ coïncident. En effet, dans ce cas, les développements

$$\alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \ldots \qquad (i = 1, 2. \ldots, \mu),$$

étant opérés aux environs du même point, auront les mêmes coefficients, et D_0 aura μ colonnes identiques.

Le déterminant D aura lui-même deux colonnes identiques lorsque deux des variables $t_1, \ldots, t_\mu$ seront égales : il est donc divisible par le produit P de leurs différences, et l'on aura

$$D = PD',$$

D' étant un nouveau déterminant, qui, pour $t_1 = \ldots = t_p = 0$ se réduit à

$$D'_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^0, \alpha'_{11} & \ldots & \alpha_{11}^{\mu-1}, \alpha_{1,\mu+1}^0 & \ldots & \alpha_{1p}^0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p1}^0, \alpha'_{p1} & \ldots & \alpha_{p1}^{\mu-1}, \alpha_{p,\mu+1}^0 & \ldots & \alpha_{pp}^0 \end{vmatrix}.$$

Prenons pour nouvelles variables, au lieu de $t_1, \ldots, t_\mu$, les sommes de puissances semblables

$$\sum_1^\mu t_i = s_1, \quad \ldots, \quad \sum_1^\mu t_i^\mu = s_\mu.$$

Le jacobien de $s_1, \ldots, s_\mu$ par rapport à $t_1, \ldots, t_\mu$ sera

$$\mu! \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & \ldots & t_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{\mu-1} & \ldots & t_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} = \mu! \mathrm{P}.$$

Le jacobien des premiers membres des équations (3) par rapport aux nouvelles variables $s_1, \ldots, s_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_p$ sera donc $\frac{1}{\mu!}\mathrm{D}'$, et si D'_0 n'est pas nul, $s_1, \ldots, s_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_p$ seront aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$ des fonctions synectiques de $e_1, \ldots, e_p$; et $t_1, \ldots, t_\mu$ seront les racines d'une équation algébrique, à coefficients synectiques.

La condition $\mathrm{D}' = 0$ exprime d'ailleurs qu'il existe une adjointe $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p$ passant par les points $a_{\mu+1,0}, \ldots, a_{p,0}$ et satisfaisant, en outre, aux relations

$$\sum_k \lambda_k \alpha_{k1}^0 = 0, \quad \ldots, \quad \sum_k \lambda_k \alpha_{k1}^{\mu-1} = 0,$$

lesquelles expriment que μ de ses points d'intersection avec f sont concentrés au point $a_{10} = \ldots = a_{\mu 0}$.

566. Nous avons ainsi élucidé la nature des fonctions $t_1, \ldots, t_p$ aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$ sous la seule condition que les points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$ ne soient pas sur une même adjointe φ de degré $n - 3$.

Soit ψ une fonction rationnelle de z, u, qui ne devienne infinie en aucun des points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$. Aux environs du point a_{i0}, on aura pour $\psi(z_i, u_i)$ un développement en puissances tel que

$$\psi(z_i, u_i) = \beta_i^0 + \beta_i' t_i + \ldots.$$

Les sommes S_1, S_2, ... des puissances semblables des quantités $\psi(z_i, u_i)$ seront donc des fonctions synectiques de $t_1, \dots, t_p$, D'ailleurs si $a_{10} = a_{20} = \dots = a_{\mu 0}$, les développements de $\psi(z_1, u_1), \dots, \psi(z_\mu, u_\mu)$ auront les mêmes coefficients. Les développements de S_1, S_2, ... ne contiendront donc $t_1, \dots, t_\mu$ que par les sommes s_1, s_2, ... de leurs puissances semblables, qui sont synectiques en $e_1, \dots, e_p$.

Donc S_1, S_2, ... seront elles-mêmes synectiques en $e_1, \dots, e_p$.

Si, contrairement à ce que nous avons supposé en premier lieu, $\psi(z, u)$ devenait infini en quelqu'un des points $a_{10}, \dots, a_{p0}$ tel que a_{10}, le développement de S_1, S_2, ... contiendrait des puissances négatives de t_1 (ou, si $a_{10} = \dots = a_{\mu 0}$, des sommes de puissances négatives semblables de $t_1, \dots, t_\mu$) lesquelles sont des quotients de fonctions synectiques.

Donc toute fonction rationnelle symétrique Q des quantités $\psi(z_i, u_i)$ sera aux environs du point $(e_{10}, \dots, e_{p0})$ une fonction synectique de $e_1, \dots, e_p$, ou un quotient de fonctions synectiques.

On donne à ces fonctions Q le nom de *fonctions abéliennes*.

567. Faisons varier $e_1, \dots, e_p$ à partir de leurs valeurs initiales; on pourra suivre de proche en proche le mouvement des points $a_1, \dots, a_p$ et la variation des fonctions Q. On ne se trouvera arrêté que lorsque les points $a_1, \dots, a_p$ atteindront des positions $a'_1, \dots, a'_p$ telles qu'ils soient situés sur une même adjointe de degré $n - 3$.

Il est aisé de déterminer les valeurs $e'_1, \dots, e'_p$ des variables indépendantes pour lesquelles cette circonstance se produira. Considérons en effet une adjointe variable, déterminée à chaque instant par la condition de passer par les points $a_1, \dots, a_{p-1}$. Dans sa première position φ_0, elle coupera f aux points $a_{10}, \dots, a_{p-1,0}$ et en $p - 1$ autres points $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-2}$. Dans sa position finale φ, elle la coupera aux points $a'_1, \dots, a'_p$ et en $p - 2$ autres points $b_1, \dots, b_{p-2}$.

On aura, d'après le théorème d'Abel,

$$(4)\qquad \sum_1^{p-1}\int_{a_{i0}}^{a'_i} d\mathrm{E}_k + \int_{\beta_0}^{a'_p} d\mathrm{E}_k + \sum_1^{p-2}\int_{\beta_i}^{b_i} d\mathrm{E}_k = 0.$$

On a d'autre part, d'après l'équation qui définit e_k,

$$(5)\qquad \sum_1^{p}\int_{a_{i0}}^{a'_i} d\mathrm{E}_k = e'_k - e_{k0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

On en déduit

$$(6)\qquad e'_k - e_{k0} = \int_{a_{p0}}^{\beta_0} d\mathrm{E}_k - \sum_1^{p-2}\int_{\beta_i}^{b_i} d\mathrm{E}_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Ces systèmes de valeurs singuliers des quantités e_k ne dépendent, comme on le voit, que de $p-2$ points variables b_i.

568. Réciproquement tout système de valeurs $e'_1, \ldots, e'_p$ défini par les relations (6) constitue, quels que soient les points b_i, un point d'indétermination commun à toutes les fonctions abéliennes.

En effet, par les $p-2$ points b_i, nous pouvons faire passer un faisceau d'adjointes de degré $n-3$. Soient φ l'une quelconque d'entre elles, $a'_1, \ldots, a'_p$ ses autres points d'intersection avec f. Faisons décrire aux points mobiles $a_1, \ldots, a_p$ des lignes quelconques $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_p$ partant de $a_{10}, \ldots, a_{p0}$ et aboutissant à $a'_1, \ldots, a'_p$. Les fonctions e_k définies par les équations (2) varieront suivant une loi déterminée et leurs valeurs finales e'_k seront données par les formules (5), ou, en vertu des équations (4), par les formules équivalentes (6), lesquelles sont indépendantes de l'adjointe particulière φ que l'on a choisie. Si donc, considérant les e_k comme variables indépendantes, nous les faisons varier de e_{k0} à e'_k suivant une loi convenable, les points $a_1, \ldots, a_p$ viendront aux positions finales $a'_1, \ldots, a'_p$. Or celles-ci, variant avec le choix de l'adjointe φ, sont indéterminées.

569. Les fonctions abéliennes sont uniformes. Nous établirons cette proposition en montrant leur identité avec d'autres fonctions, uniformes par leur définition même. Nous résoudrons en même temps le problème de l'inversion, en donnant leur expression explicite en fonction de $e_1, \ldots, e_p$.

570. Soient

$$v_1 = v'_1 + iv''_1, \quad \ldots, \quad v_p = v'_p + iv''_p$$

p variables complexes indépendantes;

$$d_{kl} = d_{lk} = d'_{kl} + i\,d''_{kl} \qquad (k = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, p)$$

des constantes complexes en nombre p^2; $m_1, \ldots, m_p$ des entiers réels, variables de $-\infty$ à $+\infty$. Désignons par φ la forme quadratique

$$\varphi = \sum_{kl} d_{kl} m_k m_l,$$

par ψ la forme linéaire

$$\psi = \sum_k 2 m_k v_k,$$

et considérons la série

$$(7) \qquad \Theta(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{m_1, \ldots, m_p} e^{\pi i(\varphi+\psi)}.$$

Elle sera absolument convergente, si la forme

$$\varphi'' = \sum_{kl} d''_{kl} m_k m_l$$

est toujours positive (sauf si tous les m sont nuls).

Posons en effet

$$\psi'' = \sum_k 2 m_k v''_k.$$

Le terme général de la série Θ aura pour module $e^{-\pi(\varphi''+\psi'')}$. Or si les indices $m_1, \ldots, m_p$, ou seulement quelques-uns d'entre eux, croissent indéfiniment, $\varphi'' + \psi''$

tendra vers ∞, et la série $\sum(\varphi''+\psi'')^{-\mu}$ sera convergente, si $\mu > \frac{p}{2}$ (t. I, n° 318). A plus forte raison la série $\sum e^{-\pi(\varphi''+\psi'')}$ dont les termes décroissent plus rapidement.

Si l'on dérive terme à terme la série Θ par rapport à l'une des variables v, on obtiendra de nouvelles séries, dont la convergence s'établit de même. Donc Θ sera une fonction analytique de $v_1, \ldots, v_p$, uniforme et entière.

571. Elle est paire, car elle n'est pas altérée, si l'on y change le signe des variables, pourvu que l'on change en même temps le signe des indices de sommation.

Elle reste également inaltérée, si l'on accroît de l'unité une des variables $v_1, \ldots, v_p$; car son terme général se reproduit, multiplié par une puissance de $e^{2\pi i}=1$.

Remplaçons enfin un des indices de sommation, tel que m_l, par m_l-1, et changeons en même temps $v_1, \ldots, v_p$ en $v_1+d_{1l}, \ldots, v_p+d_{pl}$; $\varphi+\psi$ sera changé en $\varphi+\psi-2v_l-d_{ll}$. Nous obtenons donc la relation

$$(8)\qquad \Theta(v_1+d_{1l}, \ldots, v_p+d_{pl}) = e^{\pi i(-2v_l-d_{ll})}\Theta(v_1, \ldots, v_p).$$

Donc, si nous remplaçons plus généralement $v_1, \ldots, v_p$ par de nouvelles quantités $v'_1, \ldots, v'_p$ définies par les relations

$$(9)\qquad v'_k = v_k + g_k + \sum_l h_l d_{kl}, \qquad k=1, \ldots, p,$$

g_k et h_l étant des entiers, Θ se reproduira, multiplié par un facteur exponentiel.

Nous dirons que deux systèmes de quantités v et v', liés par des relations de la forme (9) sont *équivalents;* et nous représenterons l'équivalence par le signe $\equiv$.

572. On peut prendre pour constantes d_{kl} les secondes périodes cycliques des p intégrales normales de première espèce $E_1, \ldots, E_p$. Elles satisfont en effet (551) à la relation

$d_{kl} = d_{lk}$. Il faut en outre, pour la convergence, que la forme φ'' soit positive. Mais cette condition sera également remplie.

Considérons en effet l'intégrale de première espèce

$$E = m_1 E_1 + \ldots + m_p E_p = P + Qi.$$

Ses périodes cycliques sont, pour la première moitié.

$$m_1, \quad \ldots, \quad m_p$$

et pour la seconde moitié

$$m_1 d_{11} + \ldots + m_p d_{p1}, \quad \ldots, \quad m_1 d_{1p} + \ldots + m_p d_{pp}.$$

L'intégrale $\int_K P\,dQ$ sera positive (527). Or nous avons trouvé (535) l'expression de cette intégrale; ici elle se réduit à

$$m_1(m_1 d''_{11} + \ldots + m_p d''_{p1}) + \ldots$$
$$+ m_p(m_1 d''_{1p} + \ldots + m_p d''_{pp}) = \varphi''.$$

573. Les coefficients d_{kl} étant ainsi choisis, posons

$$v_1 = E_1(z) - e_1, \quad \ldots. \quad v_p = E_p(z) - e_p,$$

$e_1, \ldots, e_p$ étant des paramètres. Par cette substitution, Θ se changera en une fonction de la seule variable indépendante z

$$\theta[E_1(z) - e_1, \ldots, E_p(z) - e_p] = \theta(z),$$

dont nous allons étudier les propriétés.

A une position donnée a du point z sur la surface de Riemann correspondent, suivant le chemin suivi par la variable pour parvenir en a, une infinité de systèmes de valeurs des intégrales $E_1, \ldots, E_p$. Désignons par $E_1(a), \ldots, E_p(a)$ l'un de ces systèmes, choisi à volonté; les autres lui seront évidemment équivalents. Donc les diverses valeurs que θ peut acquérir au point a ne diffèrent que par des facteurs exponentiels. Ceux-ci n'étant ni nuls ni infinis, on voit que la fonction θ s'annulera toujours aux mêmes points de la surface de Riemann, quel que soit le chemin suivi.

Elle ne peut d'ailleurs s'annuler en un point donné a que pour des valeurs spéciales des paramètres; car $\theta(a)$, se présentant sous la forme d'une série de puissances positives et négatives des exponentielles $e^{2\pi i e_1}, \ldots, e^{2\pi i e_p}$, dont les coefficients ne sont pas nuls (car ce sont des exponentielles) ne peut s'annuler quels que soient $e_1, \ldots, e_p$.

A fortiori, $\theta(z)$ ne peut s'annuler identiquement que pour des systèmes particuliers de valeurs de $e_1, \ldots, e_p$, que nous écarterons provisoirement.

574. Les zéros $a_1, a_2, \ldots$ de $\theta(z)$ sont des points isolés. En effet, aux environs d'un point quelconque a, $E_1, \ldots, E_p$, restant finies, sont développables suivant les puissances entières et positives d'un paramètre t; on en déduit pour θ un développement

$$\theta = S(t, e_1, \ldots, e_p)$$

suivant les puissances entières et positives de $t, e_1, \ldots, e_p$. Ce développement permet de suivre la variation de θ aux environs de a; et en utilisant des développements contigus à celui-là, on pourra suivre cette variation tout le long d'une ligne quelconque (t. I, n°s 341 et suivants).

D'ailleurs, le développement S ne peut s'annuler qu'en des points isolés, s'il n'est pas identiquement nul (t. I, n° 338). Mais, dans ce cas, les développements contigus le seraient aussi; θ serait donc nul sur toute la surface de Riemann, hypothèse que nous avons exclue.

Ces zéros étant isolés, il n'en existera qu'un nombre fini dans toute portion finie de la surface de Riemann; mais ils sont également en nombre fini dans les environs de chacun des n points à l'infini; leur nombre total est donc borné.

Enfin, ils varient d'une manière continue avec $e_1, \ldots, e_p$. Soient, en effet, a l'un de ces zéros, μ son ordre de multiplicité. L'équation

$$S(t, e_1, \ldots, e_p),$$

ayant μ racines nulles, admettra, pour des valeurs de

$e_1, \ldots, e_p$ infiniment voisines de celles que l'on considère, μ racines infiniment petites (287).

575. Pour déterminer le nombre q des zéros $a_1, a_2, \ldots$, joignons un point arbitraire O aux p rétrosections, par des lacets $M_l C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1} M_l^{-1}$ tracés de manière à éviter ces zéros. Soit, comme précédemment, K le contour constitué par ces lacets. Il transforme la surface de Riemann en une surface s simplement connexe, dans l'intérieur de laquelle $E_1, \ldots, E_p$, et par suite θ, seront synectiques. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K d\log\theta$$

sera donc égale à la somme des résidus de $\frac{d\log\theta}{dt}$ pour les points $a_1 \ldots, a_q$. Or, à un zéro a de multiplicité μ, correspond un résidu μ. La valeur de l'intégrale sera donc égale à q.

Pour la calculer directement, cherchons la valeur de l'intégrale prise le long des lacets $M_l C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1} M_l^{-1}$.

Lorsqu'on décrit la partie $C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1}$ du lacet qui sépare M_l de M_l^{-1}, $E_1, \ldots, E_p$, et par suite, θ, $\frac{d\log\theta}{dz}$, reprennent au retour leurs valeurs primitives. Donc

$$\int_{M_l} + \int_{M_l^{-1}} = 0.$$

Lorsqu'on décrit le contour C_l^{-1}, les intégrales $E_1, \ldots, E_p$ reprennent leurs valeurs primitives, sauf E_l qui diminue d'une unité; θ, $\frac{d\log\theta}{dz}$ ne changent pas; donc

$$\int_{D_l} + \int_{D_l^{-1}} = 0.$$

Mais, lorsqu'on décrit D_l, $E_1, \ldots, E_p$ s'accroissent respec-

tivement de $d_{1l}, \ldots, d_{pl}$; θ se reproduit, multiplié par

$$e^{\pi i[-2(E_l-e_l)-d_{ll}]};$$

$\frac{d\log\theta}{dz}$ diminue de $2\pi i\,\frac{dE_l}{dz}$; donc

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_l}+\int_{C_l^{-1}}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}2\pi i\,dE_l=c_{ll}=1.$$

Chaque lacet donnant un résultat analogue, l'intégrale totale est égale à p. Donc *la fonction* θ *admet* p *zéros.*

576. Calculons de même l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K E_k\,d\log\theta.$$

Elle sera égale à la somme des résidus de la fonction $E_k\,\frac{d\log\theta}{dt}$, soit à

$$\sum_i (E_k)_{a_i}\qquad (i=1,\ldots,p),$$

$(E_k)_{a_i}$ désignant la valeur de E_k au point a_i lorsque la variable z se rend de sa position initiale au point a_i en restant dans la région s.

Calculons directement cette intégrale. On a encore

$$\int_{M_l}+\int_{M_l^{-1}}=0,$$

et de même

$$\int_{D_l}+\int_{D_l^{-1}}=0,\qquad (\text{si } l \gtrless k),$$

car E_k, $\frac{d\log\theta}{dz}$ ne changent pas quand on décrit C_l^{-1}. Mais si $l=k$, E_k diminuant d'une unité, on aura

$$\int_{D_k}+\int_{D_k^{-1}}=\int_{D_k}d\log\theta.$$

Or, le long de D_k, $\log\theta$ s'accroît de

$$\pi i[-2(\varepsilon_k - e_k) - d_{kk}] + 2g_k\pi i,$$

g_k désignant un entier et ε_k la valeur de E_k au commencement du contour D_k. Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{D_k} + \int_{D_k^{-1}}\right) = e_k - \varepsilon_k - \frac{1}{2}d_{kk} + g_k.$$

Enfin, lorsqu'on décrit D_l, E_k s'accroît de d_{kl} et $\dfrac{d\log\theta}{dz}$ décroît de $2\pi i\dfrac{dE_l}{dz}$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_l} + \int_{C_l^{-1}}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}[E_k\, d\log\theta - (E_k + d_{kl})(d\log\theta - 2\pi i\, dE_l)]\\ &= -\frac{d_{kl}}{2\pi i}\int_{C_l} d\log\theta + d_{kl}\int_{C_l} dE_l + \int_{C_l} E_k\, dE_l.\end{aligned}$$

Or, lorsqu'on décrit C_l, E_l s'accroît d'une unité, et $\dfrac{1}{2\pi i}\log\theta$ d'un nombre entier, qu'on peut représenter par $-h_l - 1$.

L'expression précédente se réduit donc à

$$\int_{C_l} E_k\, dE_l + h_l d_{kl}.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$\varepsilon_k + \frac{1}{2}d_{kk} - \sum_l \int_{C_l} E_k\, dE_l = \sigma_k,$$

quantité indépendante des paramètres $e_1, \ldots, e_p$, nous aurons finalement l'égalité

$$\sum_i (E_k)_{a_i} = e_k - \sigma_k + g_k + \sum h_l d_{kl} \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

et, par suite, l'équivalence

$$(10) \qquad \sum_i E_k(a_i) \equiv e_k - \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

$E_1(a_i), \ldots, E_p(a_i)$ désignant l'un quelconque des systèmes de valeurs que les intégrales $E_1, \ldots, E_p$ peuvent prendre au point a_i.

577. Supposons que les paramètres $e_1, \ldots, e_p$ varient progressivement à partir des valeurs initiales $e_{10}, \ldots, e_{p0}$. Soient $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, les zéros de la fonction θ à l'instant initial. Ils varient en même temps que les paramètres en décrivant des lignes continues $L_1, \ldots, L_p$. On aura à l'instant initial

$$\sum_i E_k(a_{io}) \equiv e_{k0} - \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Retranchons ces relations des précédentes, il viendra

$$\sum_i [E_k(a_i) - E_k(a_{io})] \equiv e_k - e_{k0},$$

et par suite

$$\sum_i \int_{L_i} dE_k \equiv e_k - e_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Mais, dans ces dernières relations, les deux membres ont des valeurs entièrement déterminées; ils varient d'une manière continue et s'annulent tous deux à l'instant initial. Ils sont donc non seulement équivalents, mais égaux (542).

Nous retombons ainsi sur le système des équations (2). Nous avons vu que celles-ci permettent de suivre le déplacement des points $a_1, \ldots, a_p$ lorsque $e_1, \ldots, e_p$ varient, tant que ces paramètres ne passent pas par un système de valeurs $e'_1, \ldots, e'_p$, de la forme (6).

Nous avons vu en outre que pour un système de valeurs de cette forme, les positions des points $a_1, \ldots, a_p$ cessent d'être déterminées. La fonction

$$\Theta(E_1 - e'_1, \ldots, E_p - e'_p),$$

au lieu d'avoir p zéros, en aura une infinité; elle sera donc identiquement nulle.

578. On peut construire une fonction θ admettant p zéros $a_1, \ldots, a_p$ donnés arbitrairement. Il suffira pour cela de déterminer $e_1, \ldots, e_p$ par les équations (2). Les lignes L_i pouvant être tracées à volonté entre les points a_{i0} et a_i, on pourra satisfaire à la question par une infinité de systèmes de valeurs de $e_1, \ldots, e_p$, tous équivalents entre eux.

579. Nous avons ainsi établi l'existence d'un système de valeurs des paramètres tel que la fonction θ s'annule aux points donnés $a_1, \ldots, a_p$. Mais les équations (2) qui nous ont fourni ce résultat seraient peu propres au calcul effectif de ces valeurs, car elles contiennent les constantes $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, qu'il serait malaisé de déterminer. Il vaut mieux recourir aux équivalences (10), le calcul des constantes σ_k étant plus facile. Ces formules donnent

$$e_k \equiv \sum_i \mathrm{E}_k(a_i) + \sigma_k.$$

D'après ce que nous venons de voir, il faut et il suffit que les e_k aient cette forme pour que la fonction

$$\Theta[\mathrm{E}_1(z) - e_1, \ \ldots, \ \mathrm{E}_p(z) - e_p], \tag{11}$$

ait pour zéros les points $a_1, \ldots, a_p$.

Supposons $e_1, \ldots, e_p$ ainsi choisis. Par les points $a_2, \ldots, a_p$ faisons passer une adjointe d'ordre $n - 3$; elle coupera f en $p - 1$ nouveaux points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$, et, d'après le théorème d'Abel, les expressions

$$\sum_2^p \mathrm{E}_k(a_i) + \sum_2^p \mathrm{E}_k(\alpha_i) = \tau_k \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

resteront constantes si $a_2, \ldots, a_p$ varient (ou du moins seront équivalentes à un système de constantes). Pour les calculer, on pourra assigner à $a_2, \ldots, a_p$ un système de valeurs particulières; par des opérations algébriques on déterminera les points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$; et par des quadratures, on obtiendra les quantités τ_k.

Cela posé, considérons z, a_2, ..., a_p comme constants, et a_1 comme une variable. L'expression (11) s'annulera pour $a_1 = z$; mais elle s'annule aussi, quel que soit z, lorsque a_1, ..., a_p sont sur une même adjointe d'ordre $n-3$ (577). Donc elle admet aussi les zéros α_2, ..., α_p. D'ailleurs, la fonction Θ étant paire, elle pourra se mettre sous la forme

$$\Theta\,[e_1 - \mathrm{E}_1(z), \ldots, e_p - \mathrm{E}_p(z)]$$

ou

$$\Theta\,[\mathrm{E}_1(a_1) - \varepsilon_1, \ldots, \mathrm{E}_p(a_1) - \varepsilon_p]$$

en posant

$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= \mathrm{E}_k(z) - \sum_2^p \mathrm{E}_k(a_i) - \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, p) \\ &= \mathrm{E}_k(z) + \sum_2^p \mathrm{E}_k(\alpha_i) - \tau_k - \sigma_k.\end{aligned}$$

Pour qu'elle admette les zéros z, α_2, ..., α_p, il faudra qu'on ait

$$-\tau_k - \sigma_k \equiv \sigma_k, \qquad \text{d'où} \qquad \sigma_k \equiv -\tfrac{1}{2}\tau_k.$$

580. Soient comme précédemment (z_1, u_1), ...; (z_p, u_p) les coordonnées des zéros $a_1, \ldots, a_p$ de la fonction θ; et soit

$$\chi(z, u) = \frac{\Psi(z, u)}{\Phi(z, u)}$$

une fraction rationnelle quelconque en z, u. Les p quantités

$$\chi_i = \chi(z_i, u_i)$$

sont les racines d'une équation de degré p

$$\Pi(\mathrm{X} - \chi_i) = \mathrm{X}^p + \mathrm{A}_1\mathrm{X}^{p-1} + \ldots + \mathrm{A}_p = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions uniformes de $e_1, \ldots, e_p$; et le problème de l'inversion consiste à trouver l'expression de ces coefficients.

Nous pouvons évidemment supposer, pour traiter cette question, que le degré de Φ est au moins égal à celui de Ψ;

car dans le cas contraire il suffirait de former l'équation qui a pour racines les quantités $\frac{1}{\chi_i}$.

581. Considérons la fraction

$$\lambda - \chi = \frac{\lambda\Phi - \Psi}{\Phi},$$

λ désignant une constante. Elle a évidemment pour zéros ceux des points d'intersection de f et de $\lambda\Phi - \Psi$ dont la position dépend du paramètre λ. Désignons-les par $b_1^\lambda, \ldots, b_q^\lambda$. Si λ varie de manière à tendre vers ∞, ces points décriront des lignes $L_1, \ldots, L_q$ aboutissant à des points $b_1, \ldots, b_q$ qui sont ceux des points d'intersection de f et de Φ qui ne sont pas sur la courbe Ψ. Ces points $b_1, \ldots, b_q$ seront les pôles de la fraction.

Soit E_k une intégrale normale de première espèce; désignons par $E_k(b_m)$ l'une quelconque des valeurs qu'elle prend au point b_m, et par $\overline{E}_k(b_m^\lambda)$ celle de ces valeurs au point b_m^λ qui est déterminée par la relation

$$\overline{E}_k(b_m^\lambda) + \int_{L_m} dE_k = E_k(b_m).$$

On aura, d'après le théorème d'Abel,

$$o = \sum_m \int_{L_m} dE_k = \sum_m \left[\overline{E}(b_m^\lambda) - E_k(b_m)\right].$$

582. Cela posé, considérons l'expression

$$\text{(12)} \qquad H = \prod_1^q \frac{\Theta\left[\overline{E}_1(b_m^\lambda) - e_1, \ldots, \overline{E}_p(b_m^\lambda) - e_p\right]}{\Theta\left[E_1(b_m) - e_1, \ldots, E_p(b_m) - e_p\right]}$$

Remplaçons les quantités $e_1, \ldots, e_p$ par leurs valeurs

$$\begin{aligned} e_k &\equiv \sum E_k(a_i) + \sigma_k \equiv E_k(a_1) - \sum_2^p E_k(\alpha_i) + \tau_k + \sigma_k \\ &\equiv E_k(a_1) - \sum_2^p E_k(\alpha_i) - \sigma_k, \end{aligned}$$

et changeons les signes de tous les arguments, ce qui n'altère pas les fonctions paires Θ. Cette expression prendra la forme

$$\prod_1^q \frac{\Theta[E_1(a_1) - \varepsilon_{m1}^\lambda, \ldots, E_p(a_1) - \varepsilon_{mp}^\lambda]}{\Theta[E_1(a_1) - \varepsilon_{m1}, \ldots, E_p(a_1) - \varepsilon_{mp}]},$$

en posant, pour abréger,

$$\varepsilon_{mk} = E_k(b_m) + \sum_2^p E_k(\alpha_i) + \sigma_k,$$

$$\varepsilon_{mk}^\lambda = \overline{E}_k(b_m^\lambda) + \sum_2^p E_k(\alpha_i) + \sigma_k.$$

Considérée comme fonction de a_1, elle est uniforme sur toute la surface de Riemann; car chacun de ses facteurs reste inaltéré si l'on accroît d'un entier l'une des intégrales $E_1(a_1)$, ..., $E_p(a_1)$; et si on les accroît simultanément des périodes d_{1l}, ..., d_{pl}, ils sont respectivement multipliés par des exponentielles, ayant pour somme de leurs exposants

$$2\pi i \sum_1^q (\varepsilon_{mk}^\lambda - \varepsilon_{mk}) = 2\pi i \sum_1^q \left[\overline{E}_k(b_m^\lambda) - E(b_m)\right] = 0.$$

Chaque facteur du numérateur admet d'ailleurs pour zéros les points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et l'un des points b_m^λ. Le facteur correspondant du dénominateur a les mêmes zéros, sauf b_m^λ, qui est remplacé par b_m.

Donc H, considéré comme dépendant de a_1, est une fonction rationnelle des coordonnées z_1, u_1, ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles que la fonction

$$\lambda - \chi(z_1, u_1).$$

Donc elle est égale au produit de cette fonction par un facteur indépendant de z_1, u_1.

Comme on peut faire le même raisonnement pour chacun des points $a_2, \ldots, a_p$, on aura finalement

$$(13) \qquad H = C\Pi_1^p(\lambda - \chi_i) = C[\lambda^p + A_1\lambda^{p-1} + \ldots],$$

C étant une constante, qu'on pourra déterminer en assignant à $a_1, \ldots, a_p$ un système de valeurs particulières.

En donnant successivement à λ p valeurs particulières $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, nous obtiendrons p relations de la forme

$$\lambda_k^p + A_1\lambda_k^{p-1} + \ldots + A_p = \frac{H_k}{C_k}, \quad (k = 1, \ldots p),$$

dont la résolution donnera les coefficients $A_1, \ldots, A_p$.

583. Soient $(z_1, u_1), \ldots, (z_p, u_p)$ p points variables, décrivant des lignes $L_1, \ldots, L_p$ entre leurs positions initiales $a_1, \ldots, a_p$ et leurs positions finales $b_1, \ldots, b_p$. Posons

$$E_k(a_i) + \int_{L_i} dE_k = \overline{E}_k(b_i)$$

et considérons la fonction

$$(14) \qquad I = \log \frac{\Theta[\ldots, E_k(z) - \Sigma_i \overline{E}_k(b_i) - \sigma_k, \ldots]}{\Theta[\ldots, E_k(z) - \Sigma_i E_k(a_i) - \sigma_k, \ldots]}.$$

C'est une intégrale abélienne. En effet, si l'on fait décrire à z un contour fermé quelconque, les valeurs initiales de $E_1(z), \ldots, E_p(z)$ seront remplacées par des valeurs finales équivalentes ; le quotient des deux fonctions Θ se reproduira multiplié par une exponentielle dont l'exposant est une constante, et sa dérivée logarithmique $\frac{dI}{dz}$ restera inaltérée. C'est donc une fonction uniforme. D'ailleurs $\frac{dI}{dz}\frac{dz}{dt}$ a pour points critiques les pôles simples a_i et b_i, les résidus correspondants étant -1 et $+1$. Donc I est bien une intégrale abélienne, ayant les points logarithmiques a_i et b_i.

D'ailleurs, lorsque z décrit un des contours C_l, les fonctions Θ ne sont pas altérées, et I ne peut varier que de multiples de $2\pi i$. Ses premières périodes cycliques seront donc des multiples de $2\pi i$. Elles varient d'ailleurs d'une manière continue lorsque les points b_i se déplacent (tant que les lignes L_i ne rencontrent pas les coupures C_l). Mais, dans leur position initiale, I se réduit à la constante $\log 1 = 0$.

Les premières périodes cycliques, étant nulles à cet instant,

resteront telles dans toute la suite du mouvement; on aura donc

$$(15) \qquad I = \Sigma G_{a_i}^{b_i} + C,$$

C étant une constante, car elle n'a plus de pôle, et ses premières périodes cycliques sont nulles. On pourra, si l'on veut, faire disparaître cette constante en changeant l'origine des intégrales $G_{a_i}^{b_i}$.

L'égalité (15) étant ainsi établie tant que les points z et b_i ne traversent pas les coupures C_l, subsistera de quelque manière que varient ces quantités, car ses deux membres sont des fonctions analytiques des coordonnées des points z et b_i.

584. Supposons que les points a_i se réunissent en un même point a, et les points b_i en un même point b.

L'équation précédente deviendra

$$(16) \qquad pG_a^b = \log \frac{\Theta[\ldots, E_k(z) - p\overline{E_k}(b) - \sigma_k, \ldots]}{\Theta[\ldots, E_k(z) - pE_k(a) - \sigma_k, \ldots]}.$$

585. On peut également exprimer les intégrales de seconde espèce F_a^μ au moyen de la transcendante Θ.

Soit en effet z' un point situé dans le voisinage du point fixe a; considérons l'expression

$$I = \log \Theta[\ldots, E_k(z) - pE_k(z') - \sigma_k, \ldots],$$

On pourra développer $E_k(z')$ suivant les puissances entières et positives d'un paramètre t', qui s'annule pour $z' = a$.

Si z décrit un lacet $M_l C_l M_l^{-1}$ aboutissant à un contour C_l, Θ ne sera pas changé; son logarithme ne pourra varier que d'un multiple de $2\pi i$, et la dérivée $\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ restera invariable.

Si z décrit un lacet aboutissant à un contour D_l, E_k s'accroîtra de d_{kl}; $\log \Theta$ s'accroîtra d'une quantité de la forme

$$\pi i[-2E_l(z) + 2pE_l(z') + 2\sigma_l - d_{ll}] + 2m\pi i$$

(m étant entier); et $\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ s'accroîtra d'une constante.

Donc si cette fonction n'a pour points critiques que des pôles, ce sera une intégrale réduite de seconde espèce.

Or son seul point critique est le point z' où Θ s'annule. Lorsque z se meut aux environs de ce point, il sera dans les environs du point a; on pourra donc développer $E_k(z)$ de la même manière que $E_k(z')$; il n'y aura de changé que la valeur du paramètre, qui sera différente de t'; appelons-la t.

Le point z' étant un zéro de multiplicité p pour la fonction Θ, le développement de cette fonction suivant les puissances de t, t' sera de la forme

$$\Theta = (t - t')^p(\alpha_{00} + \alpha_{10}t + \alpha_{01}t' + \ldots).$$

La partie infinie de I sera $p\log(t - t')$ et celle de $\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ sera $\frac{(\mu - 1)!p}{(t - t')^\mu}$.

On aura donc

$$\frac{d^\mu I}{dt'^\mu} = (\mu - 1)!\, p F_{z'}^\mu + C,$$

C désignant une constante (car c'est une intégrale réduite qui n'a plus de pôle).

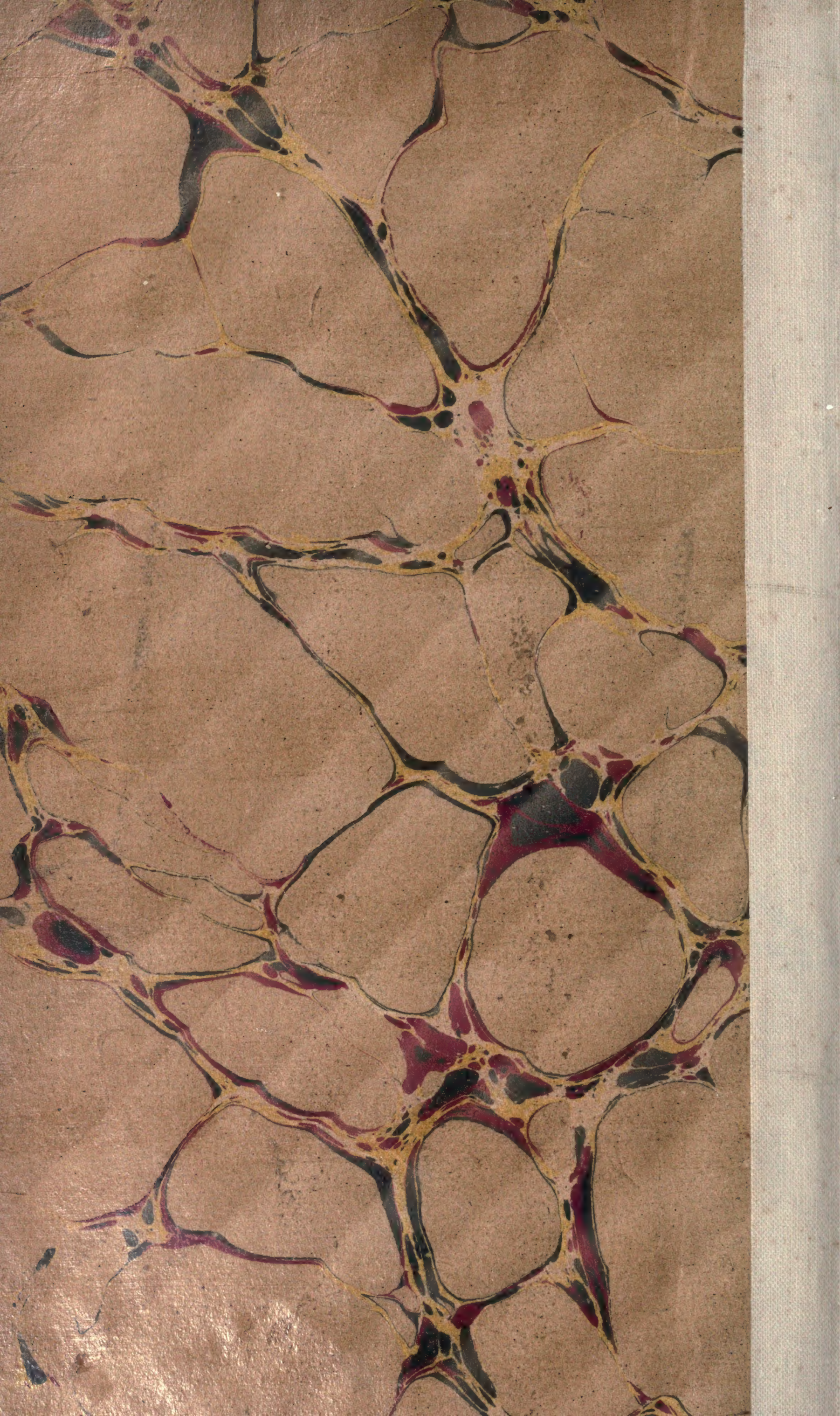
Faisons enfin tendre z' vers a; nous aurons pour déterminer F_a^μ la relation

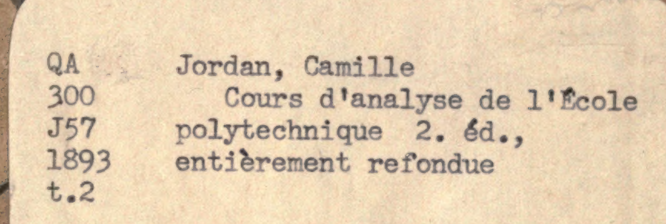
$$(17) \qquad \left[\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}\right]_{t'=0} = (\mu - 1)!\, p F_a^\mu + C.$$

FIN DU TOME DEUXIÈME.

19865 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55.






QA 300 J57 1893 t.2

Jordan, Camille
Cours d'analyse de l'École polytechnique 2. éd., entièrement refondue

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

